Geometrisches zur elektrischen Festigkeitsrechnung. II.

Von

J. Spielrein.

In einem gleichnamigen Aufsatz¹⁾ habe ich auf vektoranalytischem Wege Beziehungen dafür abgeleitet, wie die relative Änderung des Betrages eines Feldvektors von der Krümmung der Feldlinien und der mittleren Krümmung der Potentialflächen abhängt. In dem vorliegenden Aufsatz will ich diese Abhängigkeit auf elementargeometrische Weise erläutern und dabei einige spezielle Beispiele durchrechnen.

Abb. 1.

Wirbelfreies Feld. Wir betrachten zwei benachbarte Feldlinien a_1b_1 und a_2b_2 in einem wirbelfreien Feld (Abb. 1). Den Betrag des Feldvektors auf diesen Linien bezeichnen wir mit E_1 und E_2 . Die zu den Feldlinien orthogonalen Kurven a_1a_2 und b_1b_2 sind Niveaulinien des Feldes. Das Linienintegral des wirbelfreien Feldvektors zwischen zwei Potentialflächen ist konstant. Wir können also, wenn die Längen l_1 und l_2 der Bogen a_1b_1 und a_2b_2 klein sind, unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung schreiben:

$$E_1 l_1 = E_2 l_2 \quad \dots \dots \dots 1)$$

Wir nehmen zuerst an, daß es sich um ein ebenes Feld handelt, und versuchen die Änderung der Feldstärke längs einer Niveaulinie zu bestimmen. Aus der Gl. 1) erhalten wir

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{oder} \quad \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2} = \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}.$$

Wir multiplizieren beide Nenner mit dem halben Abstand $\frac{1}{2} a_1 a_2 = \frac{1}{2} \delta n$ der beiden Feldlinien und erhalten:

$$\frac{E_2 - E_1}{\frac{1}{2}(E_1 + E_2)\delta n} = \frac{l_1 - l_2}{\frac{1}{2}(l_1 + l_2)\delta n} \quad \dots \dots \dots 2)$$

Ist δn genügend klein, so sind E_1 und E_2 nur wenig voneinander und von der mittleren Feldstärke $E = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ verschieden.

Die linke Seite ist also annähernd gleich dem relativen Zuwachs bei einer Verschiebung um eine Längeneinheit in der Richtung der Niveaulinie, also gleich $\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n}$. Die

Abb. 2.

rechte Seite ist annähernd gleich dem Verhältnis der Differenz der Bogenlängen l_1 und l_2 zu der Fläche $a_1a_2b_2b_1$. Wir wollen zeigen, daß dieses Verhältnis gleich der Krümmung der Feldlinie ist. Zu diesem Zweck betrachten wir zwei parallele Kreisbögen A_1B_1 und A_2B_2 (Abb. 2) mit den Radien r_1 und r_2 . Man sieht sofort, daß das Verhältnis der schraffierten Fläche zur Differenz der Bogen A_2B_2 und A_1B_1 genau gleich dem mittleren Radius r ist:

$$\frac{\frac{1}{2} \varphi (r_2^2 - r_1^2)}{\varphi (r_2 - r_1)} = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) = r.$$

Man kann aber auch die kleine Strecke a_1b_1 der Feldlinie durch einen Kreisbogen ersetzen, der zu dem Krümmungskreis der Feldlinie gehört. Die Strecke a_2b_2

¹⁾ Archiv f. E., 1915, Bd. 4, S. 78.

kann dann durch einen konzentrischen Kreisbogen ersetzt werden. Ist der Abstand der beiden Kreise genügend klein im Verhältnis zu ihren Radien, so kann man annähernd den mittleren Radius gleich dem Radius ϱ des Krümmungskreises von $a_1 b_1$ setzen. Auf diese Weise findet man, daß die rechte Seite von 2) gleich dem reziproken Krümmungsradius $\frac{1}{\varrho}$ ist. $\frac{1}{\varrho}$ wird Krümmung genannt und mit k bezeichnet. Wir erhalten also die Formel:

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = k \dots \dots \dots 3)$$

Es läßt sich zeigen, daß diese Formel in jedem wirbelfreien Feld streng richtig ist, auch dann, wenn die Feldlinien Raumkurven sind. Dann bezeichnet $\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n}$ die relative Änderung der Feldstärke in der Richtung der Hauptnormale der Kurve. Die Änderung der Feldstärke auf der zur Hauptnormale senkrechten Niveaulinie (in der Binormalenrichtung) ist immer Null.

Die Formel 3) gilt in jedem stetigen wirbelfreien Feld, ganz gleich, ob es an der betrachteten Stelle Quellen hat oder nicht. Das ist z. B. der Fall für die magnetische Feldstärke in einem stromfreien Raum, auch dann, wenn dieser Raum mit ferromagnetischen Körpern mit örtlich variabler Permeabilität erfüllt ist. Dasselbe Gesetz gilt für die elektrische Feldstärke in einem statischen Felde, auch in einem inhomogenen Medium mit stetig variabler Dielektrizitätskonstante. Auch die Geschwindigkeitslinien einer wirbelfreien Gasströmung gehorchen der Formel 3).

Die relative Änderung der Feldstärke auf einer Potentialfläche ist in jedem Punkt des wirbelfreien Feldes durch die Krümmung der durch diesen Punkt gehenden Feldlinie vollständig bestimmt. Wir sehen, daß die Feldstärke dann und nur dann auf einer Potentialfläche konstant ist, wenn alle Feldlinien in ihren Schnittpunkten mit dieser Fläche die Krümmung Null haben. Sind aber die Feldlinien gekrümmt, so steigt die Feldstärke bei einer Verschiebung gegen den Krümmungsmittelpunkt der Feldlinie; auf der konkaven Seite einer Feldlinie ist die Feldstärke größer, als auf der konvexen. Das sieht man sofort aus der Abb. 1: Hier ist $l_1 > l_2$ und $E_1 < E_2$.

Abb. 3.

Quellenfreies Feld. Wir beschränken unsere Untersuchung auf flächennormale Felder, d. h. auf Felder, in denen zu den Feldlinien orthogonale Flächen vorhanden sind¹⁾. Wir betrachten eine durch zwei benachbarte Orthogonalflächen 1 und 2 begrenzte Krafttröhre (Abb. 3). Ihre Querschnitte durch die Orthogonalflächen mögen die Inhalte f_1 und f_2 haben, die Feldstärken auf diesen Querschnitten die Werte E_1 und E_2 . Da der Fluß eines quellenfreien Vektors in einer Krafttröhre konstant ist, so wird unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung

$$E_1 f_1 = E_2 f_2, \dots \dots \dots 4)$$

$$\text{also auch} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{f_2}{f_1} \quad \text{oder} \quad \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} = \frac{f_2 - f_1}{f_1 + f_2}.$$

Wir multiplizieren beide Nenner mit dem halben Abstand $\frac{1}{2} \delta t$ der Orthogonalflächen und erhalten:

$$\frac{E_1 - E_2}{\frac{1}{2}(E_1 + E_2) \delta t} = \frac{f_2 - f_1}{\frac{1}{2}(f_1 + f_2) \delta t} \dots \dots \dots 5)$$

¹⁾ Vgl. J. Spielrein, Archiv f. E. Bd. 3, S. 364, 1915.

Die linke Seite von 5) ist gleich der relativen Abnahme von E bei einer Verschiebung um die Längeneinheit in der Richtung der Tangente der Feldlinie, also gleich $-\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t}$. Die rechte Seite ist annähernd gleich dem Verhältnis der Differenz $f_2 - f_1$ zu dem von den Orthogonalflächen eingeschlossenen Volumen der Feldröhre. Man kann beweisen, daß dieses Verhältnis gleich der mittleren Krümmung H der Orthogonalflächen ist¹⁾. Es wird also

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} = -H \quad \dots \dots \dots 6)$$

Die mittlere Krümmung einer Fläche ist bekanntlich gleich der algebraischen Summe der Krümmungen zweier zueinander senkrechter Normalschnitte. So sind z. B. alle Normalschnitte einer Kugel große Kreise der Kugel. Die Krümmung eines großen Kreises ist gleich dem reziproken Kugelradius $\frac{1}{R}$. Die mittlere Krümmung einer Kugelfläche ist also $H = \frac{2}{R}$. Die mittlere

Krümmung eines Kreiszylinders vom Radius R ist gleich $\frac{1}{R}$, weil die Axialschnitte der Zylinderfläche geradlinig sind, also die Krümmung Null haben. Man kontrolliert leicht, daß die rechte Seite von 5) gleich der mittleren Krümmung der Orthogonalfläche ist, wenn die Orthogonalflächen parallele Kugel- oder Zylinderflächen sind.

Die Krümmung einer Kurve ist immer positiv. Dagegen kann die mittlere Krümmung einer Fläche positiv oder negativ erscheinen. Betrachten wir z. B. die Oberfläche eines Ellipsoids. Von außen gesehen erscheint das Ellipsoid konvex, von innen gesehen erscheint es konkav. Alle seine Normalschnitte haben ihre Krümmungsmittelpunkte auf derselben Seite der Tangentialebene (alle Hauptnormalen dieser Schnitte sind nach innen gerichtet). Die mittlere Krümmung der Ellipsoidfläche ist gleich der Summe der Krümmungen zweier zueinander senkrechter Normalschnitte. Wir werden die mittlere Krümmung der Ellipsoidfläche als positiv betrachten, wenn sie von der Feldlinie von innen nach außen durchsetzt wird, als

Abb. 4.

Abb. 5.

negativ im entgegengesetzten Falle. So ist z. B. die mittlere Krümmung der Fläche 1 in Abb. 4 positiv, die Krümmung der Fläche 2 negativ.

Es kann aber auch vorkommen, daß die Krümmungsmittelpunkte der beiden Normalschnitte der Fläche auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene liegen. Dann ist die mittlere Krümmung der Fläche gleich der Differenz der beiden Normalschnitte. Betrachten wir z. B. eine Rotationsfläche, deren Meridianebene die Kurve M_1PM_2 ist (Abb. 5). Der eine Normalschnitt der Rotationsfläche ist der Meridianschnitt

¹⁾ Siehe z. B. W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis I, S. 84 oder J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, S. 155.

selbst, seine Krümmung in P ist gleich dem reziproken Krümmungsradius $\frac{1}{PK_1} = \frac{1}{R}$. Für die Rotationsflächen besteht der Satz, daß in jedem Punkt P der Krümmungsradius des zur Meridianebene senkrechten Normalschnittes gleich dem Normalenabschnitt $PK_2 = N$ zwischen P und der Drehachse ist. Mit anderen Worten, die Krümmungsmittelpunkte aller zu den Meridianebenen senkrechten Normalschnitte einer Rotationsfläche befinden sich auf der Drehachse. Die Krümmung eines solchen Normalschnittes ist also gleich $\frac{1}{N}$. Befindet sich der Flächenpunkt P zwischen K_1 und K_2 , so ist die mittlere Krümmung der Fläche gleich der Differenz beider Normalschnitte, also

$$H = \frac{1}{N} - \frac{1}{R}, \quad \dots \dots \dots 7)$$

wenn der Feldvektor von innen nach außen (von P nach K_1) gerichtet ist, und gleich $\frac{1}{R} - \frac{1}{N}$ im entgegengesetzten Fall.

Wir sehen aus der Formel 6), daß die relative Änderung der Feldstärke längs der Feldlinie in einem flächennormalen und quellenfreien Felde vollständig bestimmt ist durch die mittlere Krümmung der Orthogonalflächen¹⁾. Die Feldstärke nimmt ab nach der Seite hin, auf der die Orthogonalfläche konvex ist, also eine positive Krümmung hat. Es folgt ferner aus Formel 6), daß die Feldstärke eines quellenfreien Feldes dann und nur dann längs den Kraftlinien konstant ist, wenn die Orthogonalflächen die mittlere Krümmung Null haben. (Solche Flächen heißen Minimalflächen.) Auch eine krumme Fläche kann die mittlere Krümmung Null haben. So ist z. B. die Schraubenfläche eine Minimalfläche. Nach 7) kann eine Rotationsfläche nur dann die mittlere Krümmung Null haben, wenn der Krümmungsradius R ihrer Meridianlinie in allen Punkten gleich der Normale N ist. Das ist eine charakteristische Eigenschaft der Kettenlinie (siehe z. B. Hütte I, S. 113, 20. Aufl.). Die Rotationsflächen deren Meridianlinien Kettenlinien sind, heißen Katenoiden; das sind die einzigen, Rotationsflächen, deren mittlere Krümmung Null ist. Auf die praktische Bedeutung der Minimalflächen für die elektrische Festigkeitslehre habe ich auf S. 84 meiner bereits zitierten Arbeit hingewiesen.

Kraftlinienbilder. Man kann bekanntlich jedes wirbelfreie Feld durch seine Potentialflächen charakterisieren, wenn man die Flächen in solchen Abständen zeichnet, daß die Potentialdifferenz von Fläche zu Fläche denselben kleinen Wert behält. Es genügt dann, noch diese Potentialdifferenz oder die Verteilung der Feldstärke auf einer beliebigen Kraftlinie zu kennen, um die Feldstärke im ganzen Feld bestimmen zu können. Denn die Änderung der Feldstärke quer zu der Feldlinie, also auf einer Potentialfläche, wird dadurch bestimmt, daß der Betrag der Feldstärke in jedem Punkt der Potentialfläche annähernd proportional dem reziproken Abstand l von der benachbarten Potentialfläche ist. Die Formel $\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = k$ drückt im Grunde genommen dieselbe Eigenschaft des wirbelfreien Feldes aus, nur ist sie nicht mehr annähernd, sondern streng richtig. Sie wird erhalten im gewissen Sinne durch Differentiation der Formel $E_1 l_1 = E_2 l_2$.

¹⁾ Wenn das quellenfreie Feld nicht flächennormal ist, so muß man in Formel 6) die Krümmung H durch die Divergenz des Tangenteneinheitsvektors t ersetzen. Diese Divergenz kann ausgedrückt werden durch

$$\operatorname{div} t = -t (\kappa_n \kappa_n + \kappa_b \kappa_b),$$

wo κ_n , κ_b die Krümmungen und κ_n , κ_b die Hauptnormalen der n- und der b-Linien des Feldvektors sind. (Siehe Formel 253, S. 154 meines Lehrbuches der Vektorrechnung.)

Zur Darstellung eines quellenfreien Feldes genügt es, das Feld in Kraftröhren gleichen Flusses einzuteilen. Längs einer Kraftröhre ist dann der Betrag der Feldstärke annähernd proportional dem reziproken Querschnitt f der Kraftröhre. Um auch die Feldverteilung von Kraftröhre zu Kraftröhre bestimmen zu können, genügt es, diesen Fluß oder die Feldverteilung auf einer beliebigen Orthogonalfläche der Feldlinien zu kennen. Auch die Formel $\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} = -H$ kann als Ableitung der Formel $E_1 f_1 = E_2 f_2$ betrachtet werden.

Laplacesches Feld. Ein Laplacesches, d. h. ein zugleich quellen- und wirbelfreies Feld ist durch den Verlauf der Kraftröhren und der Potentialflächen bis auf einen konstanten Faktor vollständig bestimmt. Die Änderung der Feldstärke längs einer Kraftröhre wird durch ihren Querschnitt f bestimmt:

$$Ef = \Phi \text{ (konstanter Fluß des Feldvektors) 8)}$$

Die Änderung der Feldstärke quer zu den Feldlinien wird durch den Abstand l zweier Potentialflächen bestimmt:

$$El = P \text{ (konstante Potentialdifferenz) 9)}$$

Die Potentialflächen teilen die Kraftröhren in eine große Anzahl kleiner Raumelemente ein, die mit krummen Zylindern zu vergleichen sind, deren Grundflächen gleich f und deren Höhen gleich l sind. Wird die Einteilung so ausgeführt, daß alle Kraftröhren denselben Fluß Φ und alle benachbarten Potentialflächen dieselbe Potentialdifferenz P haben, so erhält man aus 8) und 9) durch Division die rein geometrische Beziehung

$$\frac{f}{l} = \frac{\Phi}{P} = \text{const.} 10)}$$

in der die Konstante für alle Zellen denselben Wert haben muß. Wir sehen, daß nicht jede beliebig angenommene Feldlinienschar in einem Laplaceschen Feld möglich ist. Die Feldlinien müssen hier die geometrische Bedingung 10) erfüllen. Die Formel 10) ist streng richtig, wenn sowohl f als auch l unendlich klein sind; für endliche Querschnitte der Kraftröhren und endliche Abstände der Potentialflächen gilt sie nur genähert. Für die Anwendung dieser Formel ist es erforderlich, daß man das Feld durch Kraftröhren und Potentialflächen in kleine Zellen einteilt.

Es ist zuweilen vorteilhaft, anstatt der Bedingung 10) eine Formel zu benutzen, in der nur die geometrischen Eigenschaften der Feldlinien und der Potentialflächen auftreten, so daß man das Feld überhaupt nicht in Zellen zu zerlegen braucht. Eine solche Formel habe ich in der bereits zitierten Arbeit abgeleitet. Sie lautet:

$$\frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{k}{N} 11)}$$

Hier ist: $\frac{\partial H}{\partial n}$ — die Ableitung der mittleren Krümmung der Potentialflächen in der Richtung der Hauptnormale der Feldlinie,

$\frac{\partial k}{\partial t}$ — die Ableitung der Feldlinienkrümmung in der Richtung der Feldlinientangente,

N — der Krümmungsradius des zur Schmiegungeebene der Feldlinie senkrechten Normalschnittes der Potentialfläche.

Die Formeln 10) und 11) sind beide für den Entwurf von Kraftlinienbildern und folglich für die Bestimmung der Feldverteilung sehr nützlich. Die Formel 10) wird

in der Praxis viel angewendet. Wir wollen einige Beispiele betrachten, aus denen die Nützlichkeit der Formel 11) ersichtlich wird.

In einem parallelebenen Felde sind die Potentialflächen Zylinderflächen; die Feldlinien sind ebene Kurven, die in jeder zu den Erzeugenden senkrechten Ebene denselben Verlauf haben. Die Erzeugenden der Potentialflächen sind hier also die zu

Abb. 6.

diesen Ebenen senkrechten Normalschnitte der Zylinderflächen. Ihre Krümmung ist Null, so daß in 11) $\frac{1}{N} = 0$ zu setzen ist. Außerdem ist die mittlere Krümmung H der zylindrischen Potentialflächen gleich der Krümmung K der Niveaulinien, die man als Schnittlinien der Potentialflächen mit der Ebenenschar der Feldlinien erhält. Die Formel 11) nimmt hier also die Form an:

$$\frac{\partial K}{\partial n} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0 \quad \dots \dots \dots 12)$$

In einem parallelebenen Felde ist die Zunahme der Niveaulinienkrümmung längs der Niveaulinie gleich der Abnahme der Feldlinienkrümmung längs der Feldlinie. Wenn

also die Niveaulinien Kreise oder Geraden sind, so sind es auch die Feldlinien, und umgekehrt.

Die einfachsten parallelebenen Felder sind die Felder des Plattenkondensators und des Zylinderkondensators. Ebenso das bekannte Feld zwischen zwei nicht-konaxialen Kreiszyklindern (Abb. 6). Hier sind sowohl die Feldlinien, als auch die Niveaulinien Kreise, so daß die Bedingung 12) in allen Punkten identisch erfüllt ist. Mit Hilfe der Formel 3) oder 6) kann man die Feldverteilung sofort berechnen. Wir bestimmen z. B. die Feldverteilung auf der geraden Niveaulinie NN. Es sei $2d$ der Abstand der Punkte q_1 und q_2 , in denen sich alle Feldlinien schneiden. Die Krümmung eines Kreises durch den Punkt P im Abstand n von O ist

$$\frac{1}{R} = \frac{2n}{d^2 + n^2},$$

wie man aus dem rechtwinkligen Dreieck $P'q_1P$ sofort sieht (Abb. 7). Die Hauptnormale der Feldlinie ist von P nach O, also im Sinne fallender n gerichtet. Die Formel 3) wird hier zu

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dn} = \frac{2n}{d^2 + n^2},$$

also

$$E = E_0 \frac{d^2}{d^2 + n^2}, \quad \dots \dots \dots 13)$$

Abb. 7.

wo E_0 die Feldstärke im Punkt O ($n=0$) ist. Die Formel 13) bestimmt die Feldverteilung auf der gradlinigen Niveaulinie. Die Feldverteilung längs den Feldlinien ist durch den reziproken Abstand der benachbarten Feldlinien bestimmt.

Auch die Formel 10) wird in einem parallelebenen Felde wesentlich vereinfacht. Der Querschnitt f der Krafröhren kann hier durch den Abstand der benachbarten Feldlinien ersetzt werden (Breite der Krafröhren), weil die zu den Erzeugenden der Niveauflächen parallele Höhe aller Krafröhren konstant genommen werden kann. Für alle Vierseite $a_1 a_2 b_2 b_1$, in die man das ebene Feld einteilen kann (Abb. 1), gilt dann statt 10) die vereinfachte Bedingung

$$\frac{a_1 a_2}{a_1 b_1} = \text{const.} \quad \dots \dots \dots 14)$$

Da aber bei endlicher Einteilung des Feldes $a_1 a_2$ nicht gleich $b_1 b_2$ und $a_1 b_1$ nicht gleich $a_2 b_2$ ist, so kann man zur Erzielung einer größeren Genauigkeit für jedes Vierseit irgendwelche Mittelwerte benutzen. Ist eine solche Einteilung des Feldes in Zellen gelungen, so ist dadurch auch die Feldstärke nach 8) und 9) bestimmt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die so erzielten Resultate nicht sehr genau sind. Noch besser sieht man das im Falle eines meridianebenen (axialsymmetrischen) Feldes. Bevor wir hierauf näher eingehen, wollen wir noch ein exaktes Beispiel für ein meridianebenes Feld betrachten.

Wir wollen z. B. das Feld zwischen zwei konaxialen Kreiskegelflächen mit der gemeinsamen Spitze in P_s bestimmen (Abb. 8). Es ist naheliegend anzunehmen, daß auch die dazwischenliegenden Potentialflächen Kreiskegelflächen sind. Die Feldlinien müssen dann in jeder Meridianebene eine Schar konzentrischer Kreisbogen bilden. Die Zulässigkeit einer solchen Annahme können wir mit Hilfe der Formel 11) prüfen. Wir haben gesehen, daß in jedem Punkt P einer Rotationsfläche der Krümmungsradius des zur Meridianebene senkrechten Normalschnittes gleich dem Normalenabschnitt $N = PP_N$

ist. Die Niveaulinien sind hier Geraden, ihre Krümmung ist Null. Nach 7) wird also die Krümmung der Kreiskegelfläche im Punkt P,

$$H = \frac{1}{N} = \frac{1}{PP_N}.$$

Abb. 8.

Die Änderung von H beim Fortschreiten um die Längeneinheit in der Richtung der Niveaulinie PP_s ist gleich

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{1}{(PP_N)^2} \cdot \frac{PP_N}{PP_s} = \frac{1}{PP_N \times PP_s} = \frac{k}{N},$$

denn PP_s ist gleich dem Radius q der durch P gehenden Feldlinie. Da die Feldlinienkrümmung längs den Feldlinien konstant bleibt, $\frac{\partial k}{\partial t} = 0$, so sieht man, daß die Gleichung 11) hier erfüllt ist. Ein solcher Feldverlauf ist also in einem Laplaceschen Felde möglich.

Um den Betrag des Feldvektors auszurechnen, benutzen wir die Gleichungen 3) und 6). Es sei Θ der halbe Öffnungswinkel der Kegelfläche. Dann ist

$$k = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{PP_s}, \quad H = \frac{1}{PP_N} = \frac{1}{\varrho} \cotg \Theta$$

und folglich

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \Theta} = -\frac{1}{\varrho} \cotg \Theta.$$

Integriert gibt das:

$$E \varrho \sin \Theta = \text{const.} \quad \text{oder} \quad E = \frac{C}{\varrho \sin \Theta} \quad \dots \dots \dots 15)$$

Der Betrag der Feldstärke ist also umgekehrt proportional dem Abstand $\varrho \sin \Theta$ des Aufpunktes von der Achse. Die Flächen konstanten Betrages sind konaxiale Kreiszylinder $\varrho \sin \Theta = \text{const.}$

Wir wollen jetzt noch das Kraftlinienbild für dieses Feld zeichnen. Man erhält die Potentialdifferenz zwischen den Potentialflächen mit den Öffnungswinkeln Θ_0 und Θ , wenn man das Linienintegral der Feldstärke zwischen diesen Flächen ausrechnet. Wir integrieren längs einer Feldlinie mit dem Radius ϱ :

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\Theta_0}^{\Theta} E \varrho d\Theta = C \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{\varrho d\Theta}{\varrho \sin \Theta} = C \ln \frac{\tg \frac{\Theta}{2}}{\tg \frac{\Theta_0}{2}}.$$

Setzen wir $\varphi_0 = 0$ und $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\varphi = C \ln \tg \frac{\Theta}{2}.$$

In der Abb. 8 sind die Niveaulinien eingezeichnet für $\tg \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$. Die Potentialdifferenz zwischen benachbarten Niveaulinien ist gleich $C \ln 2$.

Um das Feld in Kraftröhren einzuteilen, berechnen wir den Fluß durch die Äquatorialebene $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (Abb. 8 unten). Alle Feldlinien durchsetzen diese Ebene senkrecht. Außerdem ist für diese Ebene $\sin \Theta = 1$, so daß für alle ihre Punkte der Abstand von der Achse $\varrho \sin \Theta = \varrho$ ist. Wir wählen eine Röhre, die in der Äquatorialebene durch die Kreise mit den Radien ϱ_0 und ϱ begrenzt ist. Der Fluß durch diese Röhre ist:

$$\Phi = \int_{\varrho_0}^{\varrho} E 2\pi \varrho d\varrho = 2\pi C \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\varrho d\varrho}{\varrho} = 2\pi C (\varrho - \varrho_0).$$

Wir sehen, daß alle Kraftröhren konstanten Flusses dieselbe Breite haben müssen. In einem parallelebenen Felde müßte man hieraus folgern, daß der Betrag der Feldstärke auf den Niveaulinien konstant bleibt. In einem meridianebenen Feld ist das nicht der Fall, denn hier ist der Querschnitt der Kraftröhren proportional dem Produkt aus ihrer Breite und ihrem Abstand von der Achse. Für Kraftröhren von konstanter Breite folgt aus 9), daß E umgekehrt proportional diesem Abstand sein muß. Das entspricht durchaus der Formel 15).

Dieser Umstand muß auch berücksichtigt werden, wenn man die Zulässigkeit des Kraftlinienbildes nach der Formel 10) prüfen will. Sind z. B. ad und bc zwei Feld-

linien in einem meridianebenen Felde und ab ihr Abstand voneinander, so ist der Querschnitt f der durch diese Linien begrenzten Krafröhre proportional der Breite ab und dem Abstand r von der Achse (Abb. 9). Es wird also nach Formel 10) in jeder Meridianebene eine solche Einteilung auszuführen sein, daß für alle Vierseite das Verhältnis

$$\frac{r}{ab} \frac{ad}{ab} = \text{const.} \quad \dots \quad 16)$$

bleibt. Bei endlichen Abmessungen der Vierseite kann man zur Erzielung einer größeren Genauigkeit ad und ab durch die punktierten Mittellinien ersetzen und den Abstand r bis zu ihrem Schnittpunkt messen. Das ist die Formel, die von K. Kuhlmann in seiner Arbeit über Hochspannungsisolatoren¹⁾ benutzt worden ist.

Diskussion der Genauigkeit. Wenn der Leser versucht, mit Hilfe der Formel 16) die Richtigkeit eines Kraftlinienbildes nachzuprüfen, so merkt er bald, daß dabei eine ziemliche Unsicherheit entsteht. Die Aufgabe, den Feldverlauf zwischen gegebenen Potentialflächen zu bestimmen, besteht im wesentlichen in der Integration der Laplaceschen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese Integration ist in den meisten Fällen außerordentlich schwierig. Die Formel 10) oder 16) gibt aber nicht die Lösung dieser Differentialgleichung an, sondern sie ermöglicht nur, die Richtigkeit eines „nach Gefühl“ entworfenen Kraftlinienbildes zu kontrollieren. Die kleinen Fehler, die man bei der Aufzeichnung der einzelnen Vierseite macht, können sich zu ganz beträchtlichen Abweichungen addieren, ohne daß man mit Hilfe der Formel 10) an jedem einzelnen Vierseit eine Abweichung merkt. Je größer man die Zahl der Vierseite nimmt, desto genauer kann man die einzelnen Vierseite zeichnen. Da aber die Zahl der Fehlerquellen mit der Zahl der Vierseite wächst, so wird auch durch eine größere Unterteilung die Genauigkeit nicht wesentlich erhöht. Wer jemals die graphische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder die Interpolation von Funktionswerten ausgeführt hat, weiß, wie groß dabei der Einfluß auch ganz kleiner Fehler sein kann.

Abb. 9.

Die Unsicherheit der Feldkontrolle mit Hilfe dieser Formel ist zuweilen so groß, daß auch geübte und erfahrene Rechner durch ihre Benutzung zu Fehlschlüssen geführt werden können. Das ist z. B. auch in der zitierten Arbeit von Kuhlmann der Fall. Die Richtigkeit seiner Berechnung der Kraftlinienbilder begründet er nämlich durch eine „glänzende Übereinstimmung“ mit zwei genau durchgerechneten Beispielen, ohne zu merken, daß diese Beispiele falsch sind

Abb. 10.

(Abb. 5a und 5b auf S. 209). Diese Übereinstimmung mit falschen Bildern spricht aber nicht gegen die Kuhlmannschen Kraftlinienbilder. Sie zeigt nur, daß die Formel 10) oder 16) allein nicht imstande ist, ein genügend scharfes Kriterium zu bilden. Deswegen ist es nützlich, die Formeln 3), 6) und 11) auch dann zur Kontrolle heranzuziehen, wenn das Feld nur graphisch bestimmbar ist. Betrachten wir z. B. das eine der Kuhlmannschen Beispiele: Wir zeichnen in einer Ebene ein Feld, dessen Niveaulinien konzentrische Kreise sind. Die Feldlinien sind dann

¹⁾ Archiv f. Elektrotechnik, 1915, Bd. 3, S. 209.

die Radien dieser Kreise. Ein solches Feld ist als parallelebeenes wohl möglich (Zylinderkondensator). Dreht man aber die Ebene dieser Kreise um eine ihrer Geraden, so erzeugen die Kreise parallele Kreisringflächen, die Feldlinien bleiben aber in jeder Meridianebene die Radien dieser Kreise (Abb. 10, S. 253). Da hier die Krümmung k der Feldlinien Null ist, so wäre nach 11)

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0,$$

die mittlere Krümmung der Kreisringflächen müßte konstant sein, was bekanntlich nicht der Fall ist¹⁾. Jenes Kraftlinienbild läßt sich also nicht als Meridianschnitt eines meridianebenen Laplaceschen Feldes ansehen.

Die graphische Benutzung der Formeln 3), 6) und 11) kann der Leser am besten an Beispielen einüben, wobei es sich empfiehlt, die Kraftlinienbilder in einem großen Maßstab zu zeichnen.

¹⁾ Man kann sogar beweisen, daß eine Schar paralleler Flächen konstanter mittlerer Krümmung nur aus parallelen Ebenen, Kreiszyindern oder Kugeln bestehen kann. Die Kenntnis dieses Satzes verdanke ich einer gelegentlichen Mitteilung des Herrn Prof. Dr. R. Rothe in Berlin.