DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XII.

**I. Die Elasticitätsconstanten des Flussspathes;
von Hermann Klang.**

(Mittheilungen aus dem math.-physikal. Institut zu Königsberg Nr. II.)

Auf Anregung und unter rathendem Beistand des Hrn. Prof. Voigt, sowie mit seinen Apparaten, unternahm ich schon vor längerer Zeit Beobachtungen zur Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Flussspathes, deren Resultate nachstehend mitgetheilt werden sollen.

Was die Anordnung der Beobachtungen, sowie die benutzten Apparate betrifft, so verweise ich im allgemeinen auf die „Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Steinsalzes“ von W. Voigt¹⁾, wo letztere ausführlich beschrieben sind. Kleine Abänderungen, wie sie im Verlaufe der Untersuchung als practisch befunden wurden, werden gelegentlich Erwähnung finden.

Aus dem blassgrünen, in dünnen Platten wasserhellen Krystall wurden drei Gattungen von Stäbchen angefertigt in Richtungen, wie sie das Material erlaubte. Die parallel der Octaëderfläche ausgesägten Platten waren von Dr. Steeg und Reuter in Homburg zu Stäbchen geschnitten und so vorzüglich geschliffen, dass die Prüfung bei Bestimmung der Dimensionen keine irgend in Betracht kommenden Abweichungen von der prismatischen Gestalt aufwies.

Ich bezeichne die drei Gattungen durch I, II, III, während die verschiedenen Stäbchen derselben Gattung durch Indices markirt werden mögen. Die Richtungen im Krystall sind folgende:

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 1 u. 177. 1876.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XII.

Bei I ist die Längsrichtung parallel zur Octaëderflächenkante, und die Schmalseite liegt in der Octaëderfläche.

Bei II ist die Längsrichtung senkrecht zur Octaëderflächenkante, und die Schmalseite liegt in der Octaëderfläche.

Bei III ist die Längsrichtung parallel zur Octaëderflächenkante, und die Breitseite liegt in der Octaëderfläche.

Bezeichne ich also die Krystallachsen mit x, y, z und mit l, b, d die Kantenrichtungen der Stäbchen, so sind die Richtungen der drei Gattungen durch folgende Winkel definit. Es ist:

$$\begin{aligned} \text{Für I: } \cos^2(lx) &= 0, \cos^2(ly) = \cos^2(lz) = \frac{1}{3} \\ \cos^2(bx) &= \cos^2(by) = \cos^2(bz) = \frac{1}{3} \\ \cos^2(dx) &= \frac{2}{3}, \cos^2(dy) = \cos^2(dz) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für II: } \cos^2(lx) &= \frac{2}{3}, \cos^2(ly) = \cos^2(lz) = \frac{1}{3} \\ \cos^2(bx) &= 0, \cos^2(by) = \cos^2(bz) = \frac{1}{3} \\ \cos^2(dx) &= \cos^2(dy) = \cos^2(dz) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für III: } \cos^2(lx) &= 0, \cos^2(ly) = \cos^2(lz) = \frac{1}{3} \\ \cos^2(bx) &= \frac{2}{3}, \cos^2(by) = \cos^2(bz) = \frac{1}{3} \\ \cos^2(dx) &= \cos^2(dy) = \cos^2(dz) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Bezeichne ich ferner mit α die elastische Biegung für 1 g Belastung, mit τ den Torsionswinkel für 1 g, mit M den Hebelarm der tordirenden Kraft und mit l, b, d die Dimensionen des Stäbchens, so lauten die allgemeinen Formeln für die Biegung und Torsion eines aus einem Krystall des regulären Systems geschnittenen, vollkommenen Prismas in den Neumann'schen Constanten:

$$\alpha = \frac{l^3}{4bd^3} \left[\frac{1}{2s} - \frac{B}{(A-B)(A+2B)} - \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{A-B} \right) \{ \cos^4(lx) + \cos^4(ly) + \cos^4(lz) \} \right]$$

und:

$$\tau = \frac{3Ml}{b^3d^3} \left[\frac{b^2 + d^2}{s} - 4 \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{A-B} \right) \left\{ \begin{aligned} &\cos^2(lx)(d^2\cos^2(dx) + b^2\cos^2(bx)) \\ &+ \cos^2(ly)(d^2\cos^2(dy) + b^2\cos^2(by)) \\ &+ \cos^2(lz)(d^2\cos^2(dz) + b^2\cos^2(bz)) \end{aligned} \right\} \right].$$

Berücksichtige ich nun die Richtung der drei Stäbchengattungen und setze abkürzend $l^3/(4\pi bd^3) = E$ (sodass also E der sogenannte Elasticitätscoefficient ist) und $(d^3b^3 \cdot \tau)/(M \cdot l) = T$, so wird:

$$\frac{1}{E_I} = \frac{1}{E_{II}} = \frac{1}{E_{III}} = \frac{1}{4\epsilon} + \frac{A}{2(A-B)(A+2B)}$$

$$T_I = (b^2 + 2d^2) \frac{1}{\epsilon} + (2b^2 + d^2) \frac{2}{A-B}$$

$$T_{II} = T_{III} = (2b^2 + d^2) \frac{1}{\epsilon} + (b^2 + 2d^2) \frac{2}{A-B}$$

Die Bestätigung oder Nichtbestätigung der Relation $E_I = E_{II} = E_{III}$ kann zugleich als Prüfung der Theorie dienen.

I. Biegung.

Der Biegungsapparat erfuhr folgende kleine Veränderungen. Die abgerundete Schneide wurde nicht mehr lose auf das Stäbchen aufgesetzt, sondern durch eine unter dasselbe greifende schwache Feder gehalten. Die beiden Enden eines Seidenfadens wurden mit ihren Schlingen über die beiden Enden des Schneiderrückens bis genau an die Seiten des Stäbchens geschoben, während eine kleine, unten auf dem Faden laufende Rolle den Haken für die Wagschale trug (Taf. II Fig. 9). Ausserdem wurden an jedem der beiden Träger, auf denen das Stäbchen ruhte, zwei Arme drehbar befestigt, durch deren beiderseitiges Heranschieben bis an das Stäbchen man eine seitliche Verschiebung desselben verhindern konnte. Dadurch, wie durch das Festsitzen der Schneide auf dem Stäbchen, wurde eine unvergleichlich sicherere Handhabung beim Auflegen des Stäbchens ermöglicht, und der früher nicht unbedeutende Zeitverlust bei der vorbereitenden Einrichtung erheblich reducirt, während durch die Verwendung des Seidenfadens mit der Rolle eine vollständig gleichmässige Vertheilung des Druckes auf die ganze Schneide erreicht wurde.

Mit dem so modificirten Apparate wurde eine Reihe von Beobachtungen angestellt, von denen ich, da sie nicht zur definitiven Verwendung kommen, nur kurz die Resultate angebe. Nach der bekannten Formel:

$$E = \frac{l^3}{4\pi b d^3}$$

ergab sich:

Für	I_1	I_2	II_0	II_1	III_1	III_2	III_3
E	9,31	9,37	8,84	8,53	8,84	8,75	8,91 Millionen g.

Wie ein Ueberblick der obigen Resultate lehrt, zeigen die Werthe für E , welche alle gleich ausfallen sollten, sehr beträchtliche Abweichungen, und es war nun die Frage, wodurch dieselben zu erklären seien. Die erste Vermuthung war, die Schuld der Fehlerhaftigkeit der Mikrometerschraube beizumessen. Dieselbe wurde untersucht und erheblich gefunden, jedoch keineswegs zur Erklärung ausreichend, auch war eine nachträgliche Correction nicht mehr anzubringen möglich, weil an verschiedenen Stellen der Schraube beobachtet worden war.

Da möglicherweise beim Schneiden der Stäbchen die vorgeschriebene Richtung nicht völlig innegehalten worden sein konnte, wurden einige Winkel zwischen den Spaltungs- und Schliffflächen gemessen. Die Abweichungen betrugen jedoch höchstens $1\frac{1}{4}^{\circ}$ (bei $\frac{1}{2}^{\circ}$ Unsicherheit) und waren mithin zu vernachlässigen, zumal bei den benutzten Lagen der Längsrichtungen ihr Einfluss besonders gering sein musste, wie später noch dargelegt werden wird.

Eine weitere Vermuthung war, die Abweichungen (wenigstens theilweise) der Temperaturverschiedenheit zuzuschreiben. Um über den Einfluss derselben eine Vorstellung zu gewinnen, wurde ein Stäbchen der dritten Gattung bei zwei erreichbar verschiedenen Temperaturen ($9-20^{\circ}$) gebogen. Es fand sich ein sehr wohl merkbarer Einfluss, nämlich eine Verminderung von E um circa 0,0015 seines Werthes für 1° Temperaturzunahme. (Da alle drei Gattungen Stäbchen in Bezug auf die Biegung dasselbe Verhalten haben, war es erlaubt, den bei III gefundenen Einfluss auf alle drei Gattungen anzuwenden.) Doch auch dieser Einfluss war sowohl quantitativ als qualitativ zur Herstellung leidlicher Uebereinstimmung ungenügend.

Wenn etwa Inhomogenitäten der Materie vorhanden waren, mussten sie sich zeigen, wenn verschiedene Theile eines Stäbchens gebogen wurden. Es zeigte sich keine wesentliche Abweichung der so erhaltenen α untereinander, dagegen gab das Mittel der α ein in Bezug auf die früheren Resultate viel zu kleines E , während eine darauf mit demselben Stäbchen bei grösserem l ausgeführte Beobachtung zu ungefähr dem früheren Werth führte. Es schien sonach, als ob die theoretische Abhängigkeit von E in Bezug auf l nicht richtig wäre. Aber

auch die strengere Formel für die Biegung sehr kurzer Stäbchen, die neben 1 noch ein Correctionsglied $3(d/l)^2$ ergibt, vermochte diese Abweichung keineswegs zu erklären.

Hr. Prof. Voigt rieth mir, zu untersuchen, ob nicht etwa die Träger der Stäbchen selbst bei der Biegung nachgäben, da dieses die erhaltenen Resultate erklären würde. Liegen nämlich die Träger auf ihren Unterlagen nicht absolut fest auf, so mussten sie — mit dem Gefundenen übereinstimmend — um so mehr mitgebogen werden, je kleiner l war, weil dann die Entfernung der Träger von den ihre Schlitten andrückenden Schrauben, also der Hebelarm vergrössert wurde. (Zur besseren Anschauung verweise ich auf die Abbildung des Bieungsapparates, wie sie zu der Baumgarten'schen Untersuchung „Ueber die Elasticität von Kalkspathstäbchen“¹⁾ gegeben ist.)

Es wurden zur Prüfung verschiedene Längen eines Stahlstäbchens gebogen, zunächst bei gewöhnlicher Befestigung der Träger, dann bei unter ihre Enden gelegten Stanniolstreifen und recht fest angezogenen Schrauben, sodass jedes Federn der Träger verhindert war. Die Beobachtungen zeigten so beträchtliche Unterschiede, dass sie zur Erklärung aller bisherigen Abweichungen vollkommen hinreichten, wobei man zu bedenken hat, dass dergleichen äusserst kleine Fehlerquellen erst dadurch so enormen Einfluss gewannen, dass die ganze beobachtete Biegung sehr klein, nämlich im Maximum 0,03 mm war.

Leider war der entdeckte fehlerhafte Einfluss nicht nur von l abhängig, sondern auch, wie eine Beobachtung zeigte, von dem verschieden starken Anziehen der Schraube, also von nicht mehr constatirbaren Nebenumständen. Ausserdem war ja auch nicht festzustellen, ob bei allen Messungen wirklich die Träger nachgegeben, oder erst im Verlauf der Beobachtungen — etwa durch unter die Schienen gekommenen Staub — dazu gelangten. Ein Ueberblick der Beobachtungen, sowie der Umstand, dass zwischen der Beobachtung von I_1 und I_2 und der der anderen Stäbchen eine beträchtliche Zwischenzeit lag, legt z. B. die Annahme sehr nahe, dass erst nach Beob-

1) Baumgarten, Pogg. Ann. 152. p. 369. 1874.

achtung von I_1 und I_2 das Federn der Träger eingetreten sei. Eine blosse Berücksichtigung des Temperaturunterschiedes (von 6° gegen 17° bei späteren Beobachtungen) würde dann für E_{I_1} und E_{I_2} Werthe ergeben, die mit den später angegebenen ganz gut übereinstimmen, nämlich 9,16 und 9,22.

Da unter diesen Umständen auf die früheren Beobachtungen, die ich nebst ihrer Geschichte zur Beurtheilung der Zuverlässigkeit der später anzugebenden Werthe mitgetheilt habe, gar nichts zu geben war, wurden mit den letzten Ueberbleibseln der Stäbchen bei befestigten Trägern neue Beobachtungen angestellt. Um bei denselben von dem Fehler der Mikrometerschraube frei zu sein, wurde bei nur einer Belastung in ziemlich genau aneinander anschliessenden Intervallen um einen ganzen Umgang der Schraubentrommel herum beobachtet. Betrug z. B. die Biegung circa 25 Trommeltheile, so wurden vier Beobachtungen (etwa von 0—25, 25—50, 50—75 und 75—100) angestellt, wobei sich offenbar der Fehler der Schraube eliminirte. Hierzu war das ganze Mikrometer durch eine Schraube zum Heben und Senken eingerichtet.

Leider waren nur noch vier brauchbare Stäbchen vorhanden, da bei den inzwischen angestellten Torsionsbeobachtungen ein grosser Theil zerbrochen, ein anderer dauernd deformirt und damit für Biegungsbeobachtungen unverwendbar geworden war. Bei den folgenden Beobachtungen wurde eine Belastung von 100 g angewandt. Die Durchbiegungen sind (immer als Mittel von neun Ablesungen) in Trommeltheilen angegeben, von denen 1410 auf 1 mm gingen. Nach Beendigung einer Beobachtung um die Trommel herum wurde das Stäbchen umgedreht, sodass die untere Seite nach oben kam, wieder gebogen, und aus beiden Beobachtungen (σ und ν) das Mittel genommen.

Da die Torsionsbeobachtungen sämmtlich bei 16 — 18° angestellt sind, wurden alle α noch mit $1 + (17 - \vartheta) 0,0015$ multiplicirt, um sie auf die Temperatur von 17° zu reduciren. Die Resultate sind folgende:

Stäbchen I_3 ($\vartheta = 16^\circ$):

Dimensionen: $l = 29$ mm, $b = 5,07$ mm, $d = 0,990$ mm.

Biegungen:

$\circ$ 18,1 18,7 19,8 18,6 u 18,6 19,0 20,1 18,6 Mittel 18,94
cor. $\alpha = 0,1897$, $E = 9,15$.

Stäbchen II_1 ($\vartheta = 17^\circ$):

Dimensionen: $l = 32$ mm, $b = 4,86$ mm, $d = 0,940$ mm.

Biegungen:

$\circ$ 31,5 31,3 31,3 u 32,0 31,8 31,5 Mittel 31,56
cor. $\alpha = 0,3156$, $E = 9,07$.

Stäbchen II_2 ($\vartheta = 15^\circ$):

Dimensionen: $l = 35$ mm, $b = 4,89$ mm, $d = 0,942$ mm.

Biegungen:

$\circ$ 40,0 40,8 39,7 u 40,5 40,9 39,2 Mittel 40,18
cor. $\alpha = 0,4030$, $E = 9,18$.

Stäbchen III_1 ($\vartheta = 16^\circ$):

Dimensionen: $l = 29$ mm, $b = 4,04$ mm, $d = 0,932$ mm.

Biegungen:

$\circ$ 28,8 28,2 28,2 u 29,1 28,7 28,4 Mittel 28,56
cor. $\alpha = 0,2860$, $E = 9,19$.

Nehmen wir noch bei den beiden Stäbchen der zweiten Gattung das Mittel, so haben wir:

$$E_I = 9,15, \quad E_{II} = 9,13, \quad E_{III} = 9,19,$$

also eine Uebereinstimmung, wie sie in Anbetracht der zahlreichen und nie ganz vermeidbaren Fehlerquellen nicht besser erwartet werden konnte. Als Mittel aus allen vier Werthen erhalten wir:

$$E = 9,148 \text{ Millionen g.}$$

II. Torsion.

Der Apparat war für meine Beobachtungen unverändert geblieben bis auf die Fassungen, die die Spiegel an den Stäbchen befestigten. Um die Messung ihrer Längen (die, je kürzer meine Stäbchen waren, um so genauer vorgenommen werden mussten) möglichst sicher zu gestalten, wurden gegen die beiden Enden des beobachteten Stäbchens hin schmale Streifen dünnen Stanniols aufgeklebt und die mit einer Klemme mit scharfen Kanten versehenen Spiegel durch kleine

Schraubchen auf diese Stanniolstreifen festgeschraubt (Taf. II Fig. 10). Die Spiegel sassen dabei gut und konnten nach der Beobachtung entfernt werden, um die Länge zwischen den beiden Klemmeneindrücken bequem und genau zu bestimmen.

Für alle Torsionsbeobachtungen war die Entfernung der Scala von den Spiegeln $E = 2873$ mm. Bei jedem Stäbchen wurde zunächst an dem linken (l); dann an dem rechten (r) Ende tordirt, während das andere Ende fest war. Die Hebelarme, d. h. die Radien der Rollen links und rechts, waren:

$$M_l = 36,85 \text{ mm}, \quad M_r = 36,73 \text{ mm}.$$

Die Ausschläge sind die Mittel aus drei Beobachtungen und in Millimetern ausgedrückt. — Es folgen nun die Resultate der Torsion von je zwei Stäbchen jeder Gattung.

Stäbchen I_0 .

(Dies Stäbchen zerbrach nach Beendigung der linksseitigen Beobachtung, konnte aber nochmals eingespannt und beiderseitig beobachtet werden. Der Werth für T wurde deshalb aus den drei Beobachtungen (l, l', r') als Mittel berechnet.)

Dimensionen: $l = 33,0$ mm, $b = 5,04$ mm, $d = 0,985$ mm.

Belastung:	30 g	20 g	10 g
Ausschlag (l):	40,7	29,25	17,75

Torsionswinkel:

$$\begin{array}{l} 24' 21'' \\ 17' 30'' \\ 10' 37'' \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6' 51'' \\ 6' 53'' \end{array}$$

$$\tau_l = 41,20''$$

$$\left(\frac{M}{\tau}\right)_l = 184\,500$$

$$T_1 = \frac{20,10}{1 \text{ Million}}.$$

Nach neuer Einspannung bei $l = 26,3$ mm.

Belastung:	30 g	20 g	10 g		30 g	20 g	10 g
Ausschlag:	l' 31,3	22,45	13,65	r'	31,65	22,75	13,9.

Torsionswinkel:

$$l \left\{ \begin{array}{l} 18' 43,5'' \\ 13' 26'' \\ 8' 10'' \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5' 17,5'' \\ 5' 16'' \end{array}$$

$$\tau_{l'} = 31,68''$$

$$\left(\frac{M}{\tau}\right)_{l'} = 239\,900$$

$$r' \left\{ \begin{array}{l} 18' 56'' \\ 13' 36,5'' \\ 8' 19'' \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5' 19,5'' \\ 5' 17,5'' \end{array}$$

$$\tau_{r'} = 31,85''$$

$$\left(\frac{M}{\tau}\right)_{r'} = 237\,900$$

$$\text{Mittel für } \left(\frac{M}{\tau}\right) = 238\,900, \quad T_2 = \frac{19,60}{1 \text{ Million}}, \quad \frac{T_1 + 2 T_2}{3} = T = \frac{19,77}{1 \text{ Million}}.$$

Stäbchen I_5 :Dimensionen: $l = 23,4$ mm, $b = 5,03$ mm, $d = 0,994$ mm.

Belastung: 40 g 30 g 20 g 10 g 40 g 30 g 20 g 10 g
 Ausschlag: l 34,25 26,35 18,45 10,65 r 34,35 26,55 18,75 11,00.

Torsionswinkel:

$$l \begin{cases} 20' 29'' \\ 15' 46'' \\ 11' 2'' \\ 6' 22'' \end{cases} \begin{cases} 4' 43'' \\ 4' 44'' \\ 4' 40'' \end{cases}$$

$$r \begin{cases} 20' 33'' \\ 15' 53'' \\ 11' 13'' \\ 6' 35'' \end{cases} \begin{cases} 4' 40'' \\ 4' 40'' \\ 4' 38'' \end{cases}$$

$$\tau_l = 28,23''$$

$$\tau_r = 27,93''$$

$$\left(\frac{M}{\tau}\right)_l = 269\,300$$

$$\left(\frac{M}{\tau}\right)_r = 271\,300$$

$$\text{Mittel für } \left(\frac{M}{\tau}\right) = 270\,300,$$

$$T = \frac{19,76}{1 \text{ Million}}$$

Stäbchen II_3 :Dimensionen: $l = 26,5$ mm, $b = 4,90$ mm, $d = 0,928$ mm.

Belastung: 40 g 30 g 20 g 10 g 40 g 30 g 20 g 10 g
 Ausschlag: l 55,9 43,5 31,15 18,8 r 56,0 43,6 31,3 19,0.

Torsionswinkel:

$$l \begin{cases} 33' 26,5'' \\ 26' 1,5'' \\ 18' 38'' \\ 11' 15'' \end{cases} \begin{cases} 7' 25'' \\ 7' 23,5'' \\ 7' 23'' \end{cases}$$

$$r \begin{cases} 33' 30'' \\ 26' 6,5'' \\ 18' 43,5'' \\ 11' 22'' \end{cases} \begin{cases} 7' 23,5'' \\ 7' 23'' \\ 7' 21,5'' \end{cases}$$

$$\tau_l = 44,38''$$

$$\tau_r = 44,27''$$

$$\left(\frac{M}{\tau}\right)_l = 171\,280$$

$$\left(\frac{M}{\tau}\right)_r = 171,140$$

$$\text{Mittel für } \frac{M}{\tau} = 171\,200,$$

$$T = \frac{20,99}{1 \text{ Million}}$$

Stäbchen II_4 :Dimensionen: $l = 25$ mm, $b = 4,89$ mm, $d = 0,938$ mm.

Belastung: 40 g 30 g 20 g 10 g 40 g 30 g 20 g 10 g
 Ausschlag: l 49,4 38,5 27,6 16,7 r 49,2 38,35 27,5 16,65.

Torsionswinkel:

$$l \begin{cases} 29' 33'' \\ 23' 2'' \\ 16' 29'' \\ 9' 59'' \end{cases} \begin{cases} 6' 31'' \\ 6' 31'' \\ 6' 30'' \end{cases}$$

$$r \begin{cases} 29' 26'' \\ 22' 57'' \\ 16' 27'' \\ 9' 57'' \end{cases} \begin{cases} 6' 29'' \\ 6' 29'' \\ 6' 30'' \end{cases}$$

$$\tau_l = 39,10''$$

$$\tau_r = 38,95''$$

$$\left(\frac{M}{\tau}\right)_l = 194\,300$$

$$\left(\frac{M}{\tau}\right)_r = 194\,500$$

$$\text{Mittel für } \frac{M}{\tau} = 194\,400,$$

$$T = \frac{19,86}{1 \text{ Million}}$$

Stäbchen III_3 :Dimensionen: $l = 28,4$ mm, $b = 4,03$ mm. $d = 0,931$ mm.

Belastung: 30 g 20 g 10 g 30 g 20 g 10 g
 Ausschlag: l 55,6 39,95 24,15 r 55,55 39,95 24,05.

Torsionswinkel:

$$l \left\{ \begin{array}{l} 33' 15,5'' \\ 23' 54'' \\ 14' 27'' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 9' 21,5'' \\ 9' 27'' \end{array} \right.$$

$$r \left\{ \begin{array}{l} 33' 13,5'' \\ 23' 54'' \\ 14' 23,5'' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 9' 19,5'' \\ 9' 20,5'' \end{array} \right.$$

$$\tau_l = 56,48'' \quad \tau_r = 56,50''$$

$$\left(\frac{M}{\tau} \right)_l = 134\,700 \quad \left(\frac{M}{\tau} \right)_r = 134\,100$$

$$\text{Mittel für } \frac{M}{\tau} = 134\,400, \quad T = \frac{13,84}{l \text{ Million}}.$$

Stäbchen III_4 :Dimensionen: $l = 25$ mm, $b = 4,04$ mm, $d = 0,932$ mm.

Belastung: 40 g 30 g 20 g 10 g 40 g 30 g 20 g 10 g
 Ausschlag: l 63,35 49,25 35,25 21,3 r 63,1 49,1 35,15 21,15.

Torsionswinkel:

$$l \left\{ \begin{array}{l} 37' 53,5'' \\ 29' 28'' \\ 21' 5,5'' \\ 12' 44,5'' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 8' 25,5'' \\ 8' 23,5'' \\ 8' 21'' \end{array} \right.$$

$$r \left\{ \begin{array}{l} 37' 44,5'' \\ 29' 22,5'' \\ 21' 1,5'' \\ 12' 39'' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 8' 22'' \\ 8' 21'' \\ 8' 22,5'' \end{array} \right.$$

$$\tau_l = 50,30'' \quad \tau_r = 50,18''$$

$$\left(\frac{M}{\tau} \right)_l = 151\,100 \quad \left(\frac{M}{\tau} \right)_r = 150\,900$$

$$\text{Mittel für } \frac{M}{\tau} = 151\,000, \quad T = \frac{14,14}{l \text{ Million}}.$$

Unter Zugrundelegung der auf p. 323 aufgestellten Ausdrücke für T in den Neumann'schen Constanten erhalten wir aus den Torsionsbeobachtungen folgende sechs Gleichungen:

$$27,3 \frac{1}{\varepsilon} + 51,8 \frac{2}{A-B} = 19,77 \cdot \frac{1}{\text{Million}}$$

$$27,3 \frac{1}{\varepsilon} + 51,6 \frac{2}{A-B} = 19,76 \quad "$$

$$49,1 \frac{1}{\varepsilon} + 25,8 \frac{2}{A-B} = 20,99 \quad "$$

$$48,2 \frac{1}{\varepsilon} + 25,4 \frac{2}{A-B} = 19,86 \quad "$$

$$33,3 \frac{1}{\varepsilon} + 17,8 \frac{2}{A-B} = 13,84 \quad "$$

$$33,5 \frac{1}{\varepsilon} + 18,1 \frac{2}{A-B} = 14,14 \quad "$$

Die Gleichungen haben die Form:

$$ax + by = c.$$

Wir bilden die Gleichungen:

$$x \sum a^2 + y \sum ab = \sum ac$$

$$x \sum ab + y \sum b^2 = \sum bc.$$

Dieselben werden:

$$8456 \cdot \frac{1}{\varepsilon} + 6513 \frac{2}{A-B} = 4002 \cdot \frac{1}{\text{Million}}$$

$$6513 \cdot \frac{1}{\varepsilon} + 7301 \frac{2}{A-B} = 3592 \cdot \frac{1}{\text{Million}}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{0,3015}{\text{Million}}, \quad \frac{2}{A-B} = \frac{0,2231}{\text{Million}}.$$

Setzen wir diese Werthe rückwärts in die sechs Gleichungen ein, so ergibt sich folgende Uebereinstimmung:

Werthe für T . 1 Million						
beobachtet	19,77	19,76	20,99	19,86	13,84	14,14
berechnet	19,79	19,75	20,56	20,20	14,01	14,33
ungefähre Differenz	$-\frac{1}{1000}$	$+\frac{1}{2000}$	$+\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{50}$

III. Berechnung der Constanten.

Die Biegungsbeobachtungen gaben:

$$E = 9,148 \text{ Millionen g.}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{A-B} \cdot \frac{A}{A+2B} = \frac{4}{E} = \frac{0,4373}{1 \text{ Million}}.$$

Setzen wir hierin die durch die Torsion gefundenen Werthe für $1/\varepsilon$ und $2/(A-B)$ ein, so erhalten wir:

$$0,3015 + 0,2231 \frac{A}{A+2B} = 0,4373,$$

woraus sich ergibt:

$$9A - 28B = 0, \quad A = 3\frac{1}{3}B,$$

dazu:

$$A - B = 8,965 \text{ Millionen g.}$$

Hieraus: $B = 4,247$, $A = 13,212$ und $\varepsilon = 3,317$.

Also haben wir, wenn wir nur die leidlich sicheren Stellen beibehalten:

$$A = 13\,200\,000 \text{ g, } B = 4\,250\,000 \text{ g, } \varepsilon = 3\,300\,000 \text{ g.}$$

Auch bei diesen Untersuchungen zeigt sich also — gegen die Navier-Poisson'sche Theorie — eine Abhängigkeit des Biegungs- und Torsionscoefficienten eines Krystalls des regulären Systems von der Richtung im Krystall, da nicht, wie jene Theorie verlangt $\epsilon = (A-B)/2$ gefunden wurde.

Graphische Darstellung der Resultate. — Ueber die Gestalt der beiden Oberflächen für die Biegungs- und Torsionscoefficienten¹⁾ lässt sich im allgemeinen bei regulären Krystallen Folgendes sagen. Eine der Oberflächen wird immer einem abgerundeten Würfel, die andere einem abgerundeten Octaëder ähneln. Ob die erstere oder zweite die Oberfläche des Biegungscoefficienten ist, hängt davon ab, ob $1/(2\epsilon) - 1/(A-B) > 0$ oder < 0 ist. Eine weitere allgemeine und merkwürdige Eigenschaft ist die, dass die Centralschnitte jeder der beiden Oberflächen senkrecht zu jeder der vier Octaëdernormalen immer Kreise liefern, da für diese Schnitte $\cos^4 lx + \cos^4 ly + \cos^4 lz$ constant ist. Es lässt sich dies einfach etwa folgendermassen zeigen. Da die Richtung der Octaëdernormale O durch:

$$\cos Ox = \cos Oy = \cos Oz = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

bestimmt ist, so ist für jede Richtung l senkrecht zu O :

$$\cos Ox \cos lx + \cos Oy \cos ly + \cos Oz \cos lz = 0$$

oder, wenn wir abkürzend $\cos lx = u$, $\cos ly = v$, $\cos lz = w$ setzen:

$$u + v + w = 0.$$

Durch Quadriren der Relation:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

folgt aber:

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 + w^4 &= 1 - 2(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) \\ &= 1 - 2 \left[\frac{(u+v+w)^2 - (u^2+v^2+w^2)}{2} \right]^2 - 2uvw(u+v+w) \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \text{ also constant.} \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft ist besonders geeignet, eine klare Vorstellung von den beiden Oberflächentypen zu geben. Bei der Darstellung auf der Kugel theilen die vier ausgezeichneten

1) Siehe Voigt, Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 212. 1876.

Schnitte die Kugeloberfläche in acht Dreiecke, von denen immer je vier ein Viereck einschliessen (also sechs Vierecke). Sind W , G , O die Austrittsstellen der Würfel-, Granatoöder- und Octaëdernormalen, so sind die Ecken der Dreiecke die Punkte G , während die O in den Mitten der Dreiecke, die W in den Mitten der Vierecke liegen. Bei beiden Typen bleiben die vier Kreise fest, während bei dem Würfeltypus die W ein Minimum, die O ein Maximum andeuten und umgekehrt beim Octaëdertypus. Man hat sich also im ersten Falle nur die Vierecke eingedrückt, die Dreiecke heraustretend zu denken, und im zweiten umgekehrt, um ein anschauliches Bild von den beiden Oberflächen zu bekommen.

In unserem speciellen Falle ist $1/(2\varepsilon) - 1/(A-B) > 0$, also entspricht der Würfeltypus auch hier, ebenso wie beim Steinsalz, der Biegungsoberfläche, während man wohl, da der Flusspath in Octaëderflächen spaltet, hier eine Vertauschung der Typen hätte erwarten sollen.

Die drei charakteristischen Werthe des Biegungs-, resp. Torsionscoëfficienten ergeben sich für Flusspath:

$$B_W = \frac{0,241}{10^6}, \quad B_G = \frac{0,260}{10^6}, \quad B_O = \frac{0,267}{10^6},$$

$$T_W = \frac{0,151}{10^6}, \quad T_G = \frac{0,132}{10^6}, \quad T_O = \frac{0,125}{10^6},$$

wobei als Einheit der Belastung und Länge Gramm und Millimeter vorausgesetzt sind. Die drei Werthe der B und die der T sind untereinander nicht wesentlich verschieden, deshalb wird die Abweichung der beiden Oberflächen von der Kugelgestalt nur unbedeutend sein. Die Werthe der B sind den bei Steinsalz gefundenen ungefähr gleich, dagegen sind die T nur circa $\frac{1}{3}$ von jenen.

Bei Beginn der Torsionsbeobachtungen, die eine sehr vorsichtige Behandlung erheischten, wurden zunächst, um mit der Handhabung des Apparates vertraut zu werden, ohne das kostbare Beobachtungsmaterial zu riskiren, Beobachtungen mit zwei Spiegelglasstäbchen angestellt. Um diese Beobachtungen gleich zur Berechnung der Constanten verwenden zu können, wurden die Stäbchen vorher auch gebogen. Die Biegungs-

beobachtungen waren zwar noch nach der älteren Methode an-
gestellt, doch war eine Biegung der Träger bei der Grösse
von l ($= 90$ mm) nicht zu befürchten, und auch der Einfluss
des Fehlers der Schraube konnte bei den recht grossen
Werthen der Biegung nur sehr gering sein. — Die gefundenen
Resultate mögen hier gleichfalls Platz finden. Für unkrystal-
linische Medien haben wir in den Neumann'schen Constanten:

$$E = (A - B) \cdot \frac{A + 2B}{A + B} = \frac{l^3}{4\pi b d^3} \quad \text{und} \quad A - B = \frac{6 M l (b^2 + d^2)}{\pi b^3 d^3}.$$

Biegung.

Stäbchen 1:

$$l = 90 \text{ mm}, \quad b = 3,91 \text{ mm}, \quad d = 1,50 \text{ mm}.$$

Belastung:	100 g	75 g	50 g	25 g	100 g	75 g	50 g	25 g
	o 266,6	199,5	133,6	67,1	u 264,8	198,9	132,6	66,0
$\alpha = 2,66, \quad E = 7,32$ Millionen g.								

Stäbchen 2:

$$l = 90 \text{ mm}, \quad b = 3,95 \text{ mm}, \quad d = 1,49 \text{ mm}.$$

Belastung:	100 g	75 g	50 g	25 g	100 g	75 g	50 g	25 g
	<i>o</i> 269,7	201,4	135,2	67,5	<i>u</i> 267,3	200,0	133,4	66,6
$\alpha = 2,68, \quad E = 7,30$ Millionen g.								

Torsion.

Stäbchen 1:

$$l = 39,0 \text{ mm}, \quad b = 3,93 \text{ mm}, \quad d = 1,50 \text{ mm}.$$

Belastung:	100 g	75 g	50 g	25 g	100 g	75 g	50 g	25 g
Ausschlag:	l 84,2	63,8	43,4	23,1	r 84,4	64,2	44,0	23,85.

Torsionswinkel.

l	$\left\{ \begin{array}{l} 50' 21,5'' \\ 38' 10'' \\ 25' 58'' \\ 13' 49'' \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 12' 11,5'' \\ 12' 12'' \\ 12' 9'' \end{array} \right\}$	r	$\left\{ \begin{array}{l} 50' 29'' \\ 38' 24'' \\ 26' 19,5'' \\ 14' 16'' \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 12' 5'' \\ 12' 4,5'' \\ 12' 3,5'' \end{array} \right\}$
	$\tau_l = 29,2''$			$\tau_r = 29,0''$	

Setzt man diese Werthe in die Torsionsformel ein, so
erhält man im Mittel:

$$A - B = 5,27 \text{ Millionen g}.$$

Stäbchen 2:

$$l = 42,1 \text{ mm}, \quad b = 4,00 \text{ mm}, \quad d = 1,49 \text{ mm}.$$

Belastung:	100 g	75 g	50 g	25 g		100 g	75 g	50 g	25 g
Ausschlag:	l 91,9	70,35	47,95	26,45		r 91,9	70,1	48,3	26,55.

Torsionswinkel.

$$\begin{array}{ccc}
 l \left\{ \begin{array}{l} 54' 58'' \\ 42' 5'' \\ 28' 41'' \\ 15' 49'' \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} 26' 17'' \\ 26' 16'' \end{array} \right\} & \\
 \hline
 \tau_l = 31.5'' & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 r \left\{ \begin{array}{l} 54' 58'' \\ 41' 56'' \\ 28' 54'' \\ 15' 53'' \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} 13' 2'' \\ 13' 2'' \\ 13' 2'' \\ 13' 1'' \end{array} \right\} & \\
 \hline
 \tau_r = 31.3'' & &
 \end{array}$$

(Bei der linksseitigen Beobachtung wurden zufällig die Belastungen in der Reihenfolge 100, 50, 75, 25 angewandt. Da zwischen 50 und 75 eine Störung durch Erschütterung eintrat, wurde die Berechnung in der oben angedeuteten Weise ausgeführt.)

Die Werthe für τ_l und τ_r ergeben im Mittel:

$$A - B = 5,25 \text{ Millionen g.}$$

Als Mittel der Beobachtungen haben wir sonach:

$$A - B = 5,26. \quad (A - B) \frac{A + 2B}{A + B} = 7,31.$$

Hieraus folgt: $A = 1,57 B$.

Die Werthe der Constanten selbst sind:

$$A = 14\,600\,000 \text{ g.} \quad B = 9\,300\,000 \text{ g.}$$

Diese Werthe der Constanten können jedoch, trotz der ganz guten Uebereinstimmung bei beiden Stäbchen selbst für die untersuchte Glassorte nur als Annäherung gelten, denn (abgesehen von der Verschiedenheit der Glassorten, die die Aufstellung allgemeingültiger Werthe unmöglich macht) ist Glas immer mehr oder minder inhomogen, also sind eigentlich die obigen Formeln auf Glas gar nicht streng anwendbar.

Königsberg i. Pr., im November 1880.

II. Ueber den Ursprung der Stösse und Stosstöne bei harmonischen Intervallen; von Dr. Rudolph Koenig in Paris.

In meiner Abhandlung „Ueber den Zusammenklang zweier Töne“¹⁾ hatte ich die Ansicht ausgesprochen, dass die Erscheinung der Stösse bei harmonischen Intervallen aus der directen

1) R. Koenig, Pogg. Ann. 157. p. 177. 1876.