Di una particolare teoria delle deformazioni elastiche finite.

NOTA DI UMBERTO CRUDELI.

I. — In un lavoro comparso nelle *Göttinger Nachrichten* ¹⁾ del 1893 ed in uno successivo (1894) degli *Annalen der Physik* ²⁾, il Voigt si propose di estendere la teoria classica dell'elasticità, nel caso di solidi isotropi, assumendo, come potenziale elastico (specifico), tale una funzione razionale di terzo grado degl'invarianti fondamentali di deformazione che si traducesse in una funzione razionale di terzo grado delle caratteristiche di deformazione. Il secondo dei suddetti lavori avrebbe avuto per iscopo di mostrare la generica espressione del potenziale elastico, facendovi figurare tutti gl'invarianti fondamentali di deformazione (i quali, come è noto, sono in numero di tre) e di sviluppare, corrispondentemente, la proposta teoria, ciò che, a motivo di un teorema inesatto dello Schönflies ³⁾, egli non fece che parzialmente, e con procedimento non corretto, nel primo di quei lavori medesimi. Lo scopo principale dei quali era certamente di applicare le nuove considerazioni alla deformazione dei cilindri per semplice trazione, affinchè potessero confrontarsi, in qualche caso concreto, le corrispondenti formule con quelle empiriche di J. O. Thompson ⁴⁾, le quali trovansi citate anche in qualche recente trattato di fisica ⁵⁾. Un tale confronto, però, non venne effettivamente eseguito. Comunque, il procedimento del Voigt richiede una completa correzione, non

¹⁾ (*von der Gesell. der Wiss.*, pag. 534).

²⁾ Pag. 536. — Vedasi anche: *Sitzungsb. der Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin.*, 1901, pag. 1266.

³⁾ Vedasi: *Göttinger Nachr.*, 1894, pag. 33,

⁴⁾ *Ann. der Phys.*, 1891, pag. 555.

⁵⁾ Vedasi, p. es., il *Trattato di fisica sperimentale* di Battelli e Cardani, vol. I, pag. 283.

avendo egli tenuto presente che, qualora, in vista di una migliore teoria, si voglia assumere, come espressione del potenziale elastico, una funzione di grado superiore al secondo, rispetto alle caratteristiche di deformazione, non più è logico ritenere, come espressioni delle caratteristiche medesime, quelle che figurano nella teoria classica e che, inoltre, le componenti di tensione non più sono date dalle derivate del potenziale rispetto alle corrispondenti caratteristiche della deformazione ⁶⁾.

Una prima idea che razionalmente si presenta allo studioso, intento ad ottenere un'ulteriore approssimazione nello studio delle deformazioni elastiche, è certamente quella di ritenere, in uno sviluppo in serie del potenziale (considerato come funzione degli allungamenti principali), oltre i termini del secondo grado negli allungamenti medesimi, anche quelli che immediatamente seguono, cioè anche i termini del terzo grado. Alcuni autori poi hanno proposto, formule da sostituire a quella classica di Hooke ⁷⁾ limitandosi alle deformazioni per semplice trazione ed a quelle per semplice compressione, senza, però, mostrare se e come le loro formule potevano entrare in uno schema generale di qualche nuova teoria dell'elasticità.

Io, qui, conservando per il potenziale l'espressione proposta dal Voigt, debitamente interpretata, e sfruttando le formule generali dell'Almansi ⁸⁾ relative alle tensioni elastiche, mi limiterò a correggere il procedimento del Voigt per ritrovare, nel caso di un cilindro rotondo soggetto a semplice trazione, l'allungamento del cilindro stesso in funzione della tensione che insiste sopra una sezione normale all'asse.

II. — In corrispondenza di un generico punto del solido deformato, siano a_1 , a_2 , a_3 gli allungamenti principali e si ponga

⁶⁾ Almansi, *Rend. Accad. dei Lincei*, 1911, I. e II. sem., e II. sem. 1917.

⁷⁾ Vedasi, p. es.: *Mehmke, Zum Gesetz der elastischen Dehnungen, Zeits. für Math. und Phys.*, 1897, pag. 327.

F. Kohlrausch und T. Grüneisen, *Sitzungsber. der Preuss. Akad. zu Berlin*, 1901, pag. 1086.

A. Montel, *Elasticità e resistenza dei corpi pietrosi*, Torino 1914, (Introduzione).

⁸⁾ *Rend. Accad. dei Lincei*, 1911.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = a_1 + a_2 + a_3 \\ \gamma = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ \zeta = a_1 a_2 a_3 \end{array} \right.$$

$$2\varphi = c_1 \delta^2 + c_2 \gamma + \frac{2}{3} c'_1 \delta^3 + c'_2 \delta \gamma + 2c'_3 \zeta \quad ,$$

denotando φ il potenziale di elasticità e $c_1, c_2, c'_1, c'_2, c'_3$ delle costanti ⁹⁾.

Le tensioni unitarie sopra elementi normali alle direzioni cui corrispondono gli allungamenti principali sono date dalle formule di Almansi

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \\ \tau_2 = \frac{1}{(1+a_3)(1+a_1)} \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} \\ \tau_3 = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} \end{array} \right.$$

Talchè, nel nostro caso,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)} \left\{ c_1 \delta + c_2 a_1 + c'_1 \delta^2 + \right. \\ \left. + c'_2 \left(a_1 \delta + \frac{1}{2} \gamma \right) + c'_3 a_2 a_3 \right\} \quad , \\ \text{e le due analoghe.} \end{array} \right.$$

⁹⁾ Giova notare che trattandosi qui di deformazioni finite, i tre invarianti di deformazione δ, γ, ζ non coincidono coi fondamentali.

Potremo anche scrivere

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + a_2)(1 + a_3) \tau_1 = (c_1 + c_3) a_1 + c_1 (a_2 + a_3) + T_1 \\ (1 + a_3)(1 + a_1) \tau_2 = (c_1 + c_3) a_2 + c_1 (a_3 + a_1) + T_2 \\ (1 + a_1)(1 + a_2) \tau_3 = (c_1 + c_3) a_3 + c_1 (a_1 + a_2) + T_3 \end{array} \right.$$

dove

$$T_1 = c'_1 \delta^2 + c'_1 \left(a_1 \delta + \frac{1}{2} \gamma \right) + c'_1 a_2 a_3, \quad T_2 = \text{etc.}$$

Nel caso del cilindro rotondo (isotropo ed omogeneo) soggetto a semplice trazione, supporremo a_1, a_2, a_3 costanti in tutto il solido ed, inoltre, assumendo come direzione 1 la direzione dell'asse, verrà supposto $a_2 = a_3$, $\tau_2 = \tau_3 = 0$. Quindi, denotando τ_1 con τ , a_1 con a ed a_2 od a_3 con a' , otterremo, dalle formule precedenti

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + a')^2 \tau = (c_1 + c_3) a + 2c_1 a' + T_1 \\ 0 = (c_1 + c_3) a' + c_1 (a + a') + T_2 \end{array} \right.$$

dove

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 = \left(c'_1 + \frac{3}{2} c'_2 \right) a^2 + 2(2c'_1 + c'_2) a a' + \\ \quad + (4c'_1 + c'_2 + c'_3) a'^2 \\ T_2 = \left(c'_1 + \frac{1}{2} c'_2 \right) a^2 + (4c'_1 + c'_2 + c'_3) a a' + \\ \quad + (4c'_1 + 3c'_2) a'^2 \end{array} \right.$$

Ora si osservi che, denotando con σ_0 la primitiva sezione retta del cilindro e con σ la sezione retta finale del cilindro medesimo si ha

$$(1 + a')^2 = \frac{\sigma}{\sigma_0},$$

talchè, ponendo $\tau\sigma = \tau_0\sigma_0$, potremo scrivere

$$(2) \quad \begin{cases} \tau_0 = (c_1 + c_2) a + 2c_1 a' + T_1 \\ 0 = (c_1 + c_2) a' + c_1 (a + a') + T_2 \end{cases} ;$$

dalla seconda delle quali otteniamo

$$a' = -\frac{c_1}{2c_1 + c_2} a - \frac{1}{2c_1 + c_2} T_2 .$$

E, ponendo

$$\frac{c_1}{2c_1 + c_2} = \lambda \quad , \quad c_2 = \frac{E}{1 + \lambda} \quad ,$$

avremo

$$a' = -\lambda a - (1 + \lambda)(1 - 2\lambda) \frac{T_2}{E}$$

La prima delle (2) potrà scriversi

$$\tau_0 = Ea + T_1 - 2\lambda T_2 \quad ,$$

da cui

$$a = \frac{\tau_0}{E} - \frac{1}{E} (T_1 - 2\lambda T_2) .$$

In prima approssimazione si ha la formula della teoria classica $a = \frac{\tau_0}{E}$. In seconda approssimazione, tenendo come espressioni di T_1 e di T_2 quelle che si ottengono col sostituire, dapprima, nelle (1), $-\lambda a$ ad a' e poi $\frac{\tau_0}{E}$ ad a , avremo

$$a = \frac{\tau_0}{E} - \frac{1}{2E^2} \{ 2(1 - 2\lambda)^2 c'_1 + 3(1 - 2\lambda)(2\lambda^2 + 1)c'_2 + \\ + 6\lambda^2 c'_3 \} \tau_0^2 ,$$

formula che coincide con quella del Voigt ¹⁰⁾. Infine, denotando con h_0 la primitiva lunghezza del cilindro e con v il complessivo allungamento del cilindro medesimo, e ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_0 \sigma_0 = P, \quad \frac{h_0}{\sigma_0 E} = \alpha, \\ -\frac{1}{2 \sigma_0^2 E^2} \{ 2 (1 - 2\lambda)^2 c'_1 + 3 (1 - 2\lambda) (2\lambda^2 + 1) c'_2 + \\ \quad + 6 \lambda^2 c'_3 \} = \beta, \end{array} \right.$$

avremo

$$v = \alpha P + \beta P^2.$$

¹⁰⁾ *Annal. der Physik*, 1894. Nella formula in discorso del Voigt, nella quale λ ed E , dal Voigt non introdotti, sono espressi mediante c_1 e c_2 , va rilevato un errore di stampa: al posto di $c'_1 c_2$ va posto $c'_1 c_3$.