dafs nicht eine Menge Species-Fische hindurchschlüpfen. Wo man behaupten sollte, dafs diefs nicht der Fall sey, dürfte man — blofs schlechte Augen gehabt haben. Je älter und erfahrungsreicher die Wissenschaft wird, desto feiner mufs sie — wenn es sich mal um den Speciesfang handelt — die Maschen an ihren Systemnetzen stricken!

(Fortsetzung folgt.)

VI. *Ueber die Brechung des Lichts in Prismen mit Rücksicht auf mehrere innere Reflexionen;*
von E. Reusch in Tübingen.

Betrachtet man mit einiger Aufmerksamkeit das aus einem Prisma hervortretende Licht, wenn als Lichtquelle eine einfache Kerze ¹⁾ angewendet wird, so kann man unter günstigen Umständen gegen 15 Bilder der Flamme unterscheiden, welche theils farbig, theils farblos aus den drei polirten Seiten des Prismas austreten. Immer gehören mehrere derselben zusammen oder treten nach einerlei Hauptrichtung aus und man begreift, dafs das getrennte Auftreten zusammengehöriger Bilder theils mit Abweichungen der Prismenwinkel von den Normalwinkeln 60° , 90° , 45° , theils damit zusammenhängt, dafs die Lichtstrahlen, je nach der Eintrittsstelle verschiedene Wege im Innern zurücklegen, wozu noch kommt, dafs bei Anwendung einer sehr nahen Lichtquelle, die Winkel verschieden sind, unter denen die Strahlen die Eintrittsfläche treffen. Wenn nun gleich die Dioptrik durch eine nähere Untersuchung dieses Gegenstandes keinen sehr erheblichen Zuwachs gewinnt, so schien mir doch die Sache nicht ohne alles Interesse, namentlich sofern bei Anwendung paralleler Licht-

1) Lampenlicht paßt weniger wegen des diffusen Lichts, das von dem die Flamme umgebenden Glase herrührt.

strahlen jene Bilder die Träger gewisser Unvollkommenheiten des Prismas sind, deren Erkennung und Messung unter Umständen von Werth seyn kann.

Die Untersuchung wurde in der Art angestellt, daß man zuerst auf graphischem Wege für eine passende Richtung des einfallenden Lichts und unter Voraussetzung genau gleichseitiger oder rechtwinklig - gleichschenkliger Prismen, die Strahlen auf ihrem Wege durchs Prisma verfolgte; es ergab sich hierbei die Nothwendigkeit, Strahlen zu unterscheiden, welche an verschiedenen Stellen der der Lichtquelle zugekehrten Fläche eintreten. Beobachtungen am Prisma zeigten, bis zu welcher Anzahl innerer Reflexionen man zu gehen hatte. Mit Hülfe der so erhaltenen Zeichnungen wurde nun der Weg eines jeden Hauptstrahls durch Rechnung verfolgt, indem zugleich die in den Zeichnungen liegende Beschränkung in Betreff der Winkel des Prismas aufgehoben wurde. Das letzte Geschäft war die Zusammenstellung der Bilder und der Nachweis ihres Zusammenhanges mit gewissen Fehlern des Prismas.

I. Das gleichseitige Prisma.

§. 1.

Das gleichseitige Dreieck PQR (Fig. 1 Taf. I) sey der Querschnitt des Prismas, LS die (mit PQ nahezu parallele) Richtung der auffallenden, SQ der gebrochenen Strahlen; dann erhält man vorerst die Richtungen, welche ein Strahl nach allen möglichen inneren Reflexionen einschlägt dadurch, daß man von den Ecken P, Q, R aus die einander und dem Stücke PS gleichen Längen PU, QU', QT, RS', RT' abschneidet und die Schnittpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken verbindet. Verfolgt man z. B. in Fig. 2 Taf. I den Strahl $abcd\dots$ auf seinem Wege im Innern des Prismas, so ist $bc \parallel SQ, cd \parallel PT, de \parallel PT$ etc.

Ferner bemerkt man sogleich, daß die an verschiedenen Stellen von PR eintretenden Strahlen sich verschieden auf ihrem Wege im Innern des Prismas verhalten: alle Strahlen die zwischen P und S einfallen, erleiden gleich

nach dem Eintritt eine vollständige Reflexion an PQ , während die unter S einfallenden zuerst auf QR treffen. Aber auch hier giebt es im weiteren Verlauf der Reflexionen Unterschiede: zieht man (Fig. 1 Taf. I) $U'v \parallel RU$ und $Vv \parallel SQ$, so gelangt ein bei V eintretender Strahl auf dem Wege $VvU'R$ in die Ecke R ; der Punkt V scheidet daher die Strahlen, welche nach zweimaliger Reflexion auf die Seiten QR oder PR fallen. Zieht man ferner $T'n \parallel PT$, $nm \parallel RU'$, $mw \parallel RU$, $Ww \parallel QS$, so gelangt der bei W eintretende Strahl auf dem Wege $WwmnT'P$ in die Ecke P und der Punkt W scheidet so Strahlen, welche nach vier Reflexionen auf PR oder PQ fallen. Da man nun recht gut noch Bilder unterscheidet, welche vier und mehr inneren Reflexionen entsprechen, so ergiebt sich die Nothwendigkeit, die zwischen den angegebenen Scheidepunkten enthaltenen vier Strahlenbüschel A, B, C, D besonders zu untersuchen.

Die Figuren 2 bis 5 Taf. I enthalten für jedes derselben den Weg eines Hauptstrahls sammt den Richtungen, nach welchen die einzelnen Bilder austreten; $A_1, A_2 \dots A_5$ sind die Bilder, welche dem Strahlenbüschel A entsprechen, ebenso $B_1, B_2 \dots$ die für B u. s. f.

Bei der Verfolgung der einzelnen Strahlen durch Rechnung werden wir annehmen, die Winkel P, Q, R halten nicht gerade 60° , sondern seyen innerhalb der durch die Natur der Sache gegebenen Grenzen beliebig, weil hieraus größere Allgemeinheit erwächst und namentlich eine Erklärung der eigenthümlichen doppelten und mehrfachen Bilder gewonnen wird, welche man am Prisma leicht beobachtet.

Die Bezeichnungen seyen folgende: ab (Fig. 2 bis 5 Taf. I) ist immer der einfallende Lichtstrahl, α und β dessen Einfalls- und Brechungswinkel bezogen auf die Normale der Eintrittsfläche PR ; $c, d, e, f \dots$ seyen die Winkel, welche die reflectirten Strahlen an den gleichnamigen Punkten mit den Seitenflächen des Prismas machen; β_n, α_n seyen für das n te Bild Brechungs- und Austrittswinkel,

wobei noch durch Accente oben rechts angedeutet werden soll, zu welchem Strahlenbüschel ein Bild gehört, so zwar, daß α_n, β_n sich auf die Bilder von A, α'_n, β'_n auf die von B, α''_n, β''_n auf die von C u. s. f. beziehen.

§. 2.

Für das Strahlenbüschel A (Fig. 2 Taf. I) hat man außer den Gleichungen $\sin \alpha = n \sin \beta, \sin \alpha_n = n \sin \beta_n$, welche dem Eintritt und Austritt entsprechen, wegen der inneren Reflexionen noch folgende leicht aus der Figur abzulesende Relationen:

$$\begin{aligned} P + c &= 90 - \beta, & Q + c &= d = 90 - \beta_1, \\ Q + d &= 180 - e = 90 + \beta_2, & P + e &= 180 - f = 90 + \beta_3, \\ R + f &= 180 - g = 90 + \beta_4, & Q + g &= 90 + \beta_5. \end{aligned}$$

Verwandelt man die Vorzeichen der ersten, vierten und sechsten Gleichung in die entgegengesetzten, so fallen, indem man hintereinander die Summe der 2., 3., 4... ersten Gleichungen bildet, die Winkel $c, d, e \dots$ heraus und es bleiben Beziehungen zwischen β, β_n und den Winkeln des Prismas. Ähnliche Bemerkungen gelten für die übrigen Strahlenbüschel, und man erhält so folgende Relationen:

A (Fig. 2, Taf. I.)	B (Fig. 3, Taf. I.)
$A_1 \quad \beta - \beta_1 = Q - P$	$B_1 \quad \beta + \beta'_1 = R$
$A_2 \quad \beta + \beta_2 = 2Q - P$	$B_2 \quad \beta - \beta'_2 = R - Q$
$A_3 \quad \beta - \beta_3 = 2(Q - P)$	$B_3 \quad \beta - \beta'_3 = 2(R - Q)$
$A_4 \quad \beta + \beta_4 = 2(90 - Q)$	$B_4 \quad \beta + \beta'_4 = 3R - 2Q$
$A_5 \quad \beta - \beta_5 = 3(60 - P).$	$B_5 \quad \beta - \beta'_5 = 3(R - Q).$
C (Fig. 4, Taf. I.)	D (Fig. 5, Taf. I.)
$C_1 \quad \beta + \beta''_1 = R$	$D_1 \quad \beta + \beta''_1 = R$
$C_2 \quad \beta - \beta''_2 = R - Q$	$D_2 \quad \beta - \beta''_2 = R - Q$
$C_3 \quad \beta + \beta''_3 = 2(90 - Q)$	$D_3 \quad \beta + \beta''_3 = 2(90 - Q)$
$C_4 \quad \beta - \beta''_4 = P - Q$	$D_4 \quad \beta - \beta''_4 = P - Q$
$C_5 \quad \beta - \beta''_5 = 3(P - 60).$	$D_5 \quad \beta + \beta''_5 = P$
	$D_6 \quad \beta - \beta''_6 = 0.$

Mehrere der austretenden Strahlen gehören jedoch zu demselben Hauptbilde, wie man dies entweder aus den

Figuren oder den obigen Gleichungen leicht ersieht: so gehören die Strahlen B_1, C_1, D_1 zum Hauptspectrum, geliefert von dem längs SR auffallenden Lichte (Fig. 1, Taf. I). Ebenso gehören $B_2, C_2, D_2, C_3, D_3, C_4, D_4$ je zu einem Hauptbilde, so dafs man überhaupt, wenn man bis zu fünf inneren Reflexionen fortgeht, die 15 in der Fig. 6 Taf. I zusammengestellten Bilder erhält.

Ist das Prisma genau gleichseitig, so werden alle Differenzen $\beta - \beta_*$ der Null gleich und die Bilder sind offenbar farblos, während die Summen $\beta + \beta_* = 60^\circ$ werden und gefärbten Bildern entsprechen. Die farblosen Bilder treten alle unter demselben Winkel aus, unter welchem der ursprüngliche Strahl eingetreten ist, die farbigen unter dem Winkel, welcher dem Hauptspectrum entspricht.

In Betreff des Aufsuchens der Bilder mögen folgende Bemerkungen genügen: Die Zeichnungen setzen ein Crownglasprisma voraus; man stellt dasselbe so, dafs das Bild A_1 , welches der vollständigen Reflexion an PQ entspricht, sich auf die in einem Abstand von wenigen Füssen befindliche Lichtquelle projicirt. Dann sieht man vorerst aus PR das einzelne Spectrum C_3 in der Nähe der Kante P hervortreten. Die farblosen Bilder B_3, A_3, D_6 sammt dem Spiegelbilde sieht man der Reihe nach, indem man das Auge langsam in der Richtung RP bewegt. Das Bild D_6 wird viel heller, wenn man das Prisma etwas dreht in der Art, dafs C_3 aus dem Sehfeld verschwindet.

Aus der Fläche QR tritt links von A_1 sein Begleiter C_4 auf dunklen Grunde hervor.

Die Spectra A_4, B_4 sieht man, wenn die Parthie RV (Fig. 1, Taf. I) durch ein Kartenblatt verdeckt wird, oder (nach einiger Uebung) indem man blofs mit dem Finger langsam durch das eintretende Strahlenbüschel fährt.

Die aus PQ auftauchenden Bilder werden leicht gesehen, A_3, B_3, C_3 besonders dann, wenn man das hellere Bild B_3 durch einen Bleistift, der ins einfallende Büschel gehalten wird, abblendet.

Bei gröfser Annäherung an die Lichtquelle sieht man

noch weitere Bilder, die sich leicht erklären, wenn man in den Figuren 2, 3, 4 Taf. I den Strahl auf 2 weiteren Reflexionen verfolgt; es ist nämlich gh in diesen Figuren parallel cd der Fig. 5 Taf. I, man wird daher einige weitere Spectra in der Richtung von D_3 und einige schwache farblose Bilder in der Richtung von D_4 zu erwarten haben. Die letzteren werden ziemlich leicht gesehen, um aber die Zeichnungen nicht zu sehr mit Linien zu überziehen, beschränkte man sich auf 5 Reflexionen.

Andere Stellungen des Prismas entsprechen Modificationen in den Bildern. Stellt man z. B. das Prisma für eine mittlere Farbe unter den Winkel der kleinsten Ablenkung, so fällt SQ mit PQ zusammen und alle inneren Strahlen werden parallel den Seiten des Dreiecks. Dann finden nur Reflexionen und Brechungen statt, analog den in Fig. 5 angezeigten; aus jeder Fläche treten nach einerlei Richtung zwei Bilder aus, ein farbiges und ein farbloses.

Stellt man endlich das Prisma so, daß das Hauptspectrum in Folge totaler Reflexion an der Fläche QR verschwindet, so verschwinden zugleich alle übrigen Spectra und es bleiben nur die farblosen in Fig. 6 Taf. I verzeichneten Bilder.

Fällt Licht gleichzeitig auf zwei Flächen des Prismas, so läßt sich durch abwechselndes Verdecken der Eintrittsflächen die Ursache der Bilder leicht erkennen.

§. 3.

Das Auseinandertreten zusammengehöriger Bilder wird durch die Nähe der Lichtquelle begünstigt, findet übrigens auch bei parallelen Strahlen in Folge gewisser Abweichungen der Prismenwinkel unter einander und von 60° statt und kann zur Erkennung und Messung dieser Abweichungen dienen. Natürlich eignen sich hierzu nur die farblosen Bilder. So ist für die Bilder A_1 und C_4 nach §. 2

$$\beta - \beta''_4 - (\beta - \beta_1) = \beta_1 - \beta''_4 = 2(P - Q).$$

Diesem Unterschiede in den Brechungswinkeln ent-

spricht ein Unterschied $\alpha_1 - \alpha''_4$ in den Austrittswinkeln, welcher gemessen werden kann. Sind diese Differenzen klein, so kann man sich erlauben, sie als Aenderungen von α_1 und β_1 in der Gleichung $\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$ anzusehen und zu setzen

$$\alpha_1 - \alpha''_4 = n \frac{\cos \beta_1}{\cos \alpha_1} (\beta_1 - \beta''_4)$$

woraus, da überdies α_1 und β_1 wenig von α und β abweichen,

$$P - Q = \frac{1}{2n} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\alpha_1 - \alpha''_4)$$

Für $n = \frac{3}{2}$ und $\alpha = 30^\circ$ (Fig. 1 Taf. I) erhält man

$$P - Q = 0,306 (\alpha_1 - \alpha''_4).$$

Für die Bilder A_3 und B_3 findet man

$$\beta_3 - \beta'_3 = 2(P + R - 2Q) = (60 - Q)$$

und hiermit

$$60 - Q = \frac{1}{6n} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\alpha_3 - \alpha'_3)$$

wo der Coëfficient der letzten Differenz unter denselben Voraussetzungen 0,102 ist. Das Zusammenfallen dieser Bilder ist daher ein sicheres Kennzeichen dafür, daß der der Eintrittsfläche gegenüberliegende Winkel 60° mißt.

Das eigenthümliche von den Winkeln des Prismas ganz unabhängige Bild D_6 , würde genau in der Richtung des Spiegelbildes gesehen werden, wenn es nicht in Folge des Nichtparallelismus der Kanten eine Verschiebung längs den Kanten erlitt.

Zur Beobachtung dieser Bilder eignet sich der Mond sehr gut; natürlich muß ein Fernrohr angewendet werden, wenn es sich darum handelt, die an verschiedenen Stellen des Prismas auftauchenden Bilder gleichzeitig zu sehen. Ein Feldstecher von 4 bis 6maliger Vergrößerung thut schon gute Dienste, wenn man keine Messung beabsichtigt.

In Betreff des Bildes C_4 , welches überhaupt die Veranlassung zur vorliegenden Untersuchung gegeben hat, seyen

noch einige Bemerkungen erlaubt. Ist $P = Q$, so ist für dieses Bild der Austrittswinkel gleich dem des Eintritts; diejenige Farbe des Hauptspectrums, auf welche man das Bild C_1 fallen läßt, erleidet daher die kleinste Ablenkung. Hat man die Anordnung für die Fraunhofer'schen Linien getroffen, so läßt sich dieses Bild durch Vorhalten einer weiteren Spalte vor das Prisma in eine weiße Lichtlinie verwandeln, welche mit einer Fraunhofer'schen Linie in Coïncidenz gebracht werden kann. Andererseits ist es aber dieses Bild, *welches über einen ziemlich Theil des Spectrums weißes Licht verbreitet* und so bei manchen Beobachtungen einen Irrthum in der Beurtheilung der Qualität der Farben veranlassen könnte. Auch hat man wohl deswegen schon lange die Nothwendigkeit eingesehen, den Rücken des Prismas zu schwärzen oder besser nicht zu poliren.

Das Bild C_1 läßt sich auch zusammenhalten mit dem Spiegelbild im Rücken des Prismas, sofern nämlich Licht gleichzeitig auf PR und PQ fällt. Coïncidiren beide Bilder, so ist offenbar $P = Q$. Ist aber $P = Q$, so kann man auch das Spiegelbild im Rücken mit dem Hauptspectrum combiniren und diese oder jene Farbe desselben dadurch ins Minimum der Ablenkung bringen, daß man das Spiegelbild darauf fallen läßt, oder umgekehrt den Satz vom Minimum der Ablenkung mit Hülfe des Spiegelbildes empirisch demonstrieren.

I. Das rechtwinklige Prisma.

§. 4.

Die Figuren 7 bis 16 Taf. I versinnlichen für ein genau rechtwinklig - gleichschenkliges Prisma aus Kronglas den Gang der Hauptstrahlen und zwar einmal (Fig. 7 bis 11) für den Fall, daß das Licht durch eine Kathete PR (ungefähr parallel der Hypotenuse) eintritt, dann (Fig. 12 bis 16) für den Fall, daß das Licht durch die Hypotenuse ein- geht. Die Vergleichung der Strahlen im Innern des Prisma's, so wie deren Unterscheidung nach der Eintrittsstelle wird

wesentlich erleichtert durch folgende Bemerkung: ist LS (Fig. 7 Taf. I) die Richtung der einfallenden, SQ der gebrochenen Strahlen, so mache man $QT \equiv PS$ und ziehe PT ; ferner falle man auf QS und PT die Lothe RU , RU' ; dann sind diese vier Transversalen alle möglichen Richtungen des im Innern reflectirten Lichtstrahls. Man sieht nämlich sogleich, daß die Dreiecke PGQ , RUU' , PFR , SFR , $QF'R$, TFR alle gleichschenkelig sind und mit ihren Grundlinien auf den Seiten des Querschnitts PQR stehen. Verfolgt man z. B. in Fig. 8 Taf. I einen Strahl ab , so ist $bc \parallel SQ$, $cd \parallel PT$, $de \parallel RU$, $ef \parallel RU'$, $fg \parallel QS$ u. s. w.

§. 5.

A. Die Kathete PR als Eintrittsfläche.

Ein erster Scheidepunkt für die eintretenden Strahlen liegt nun (Fig. 7 Taf. I) in S ; ein zweiter V zwischen P und S wird gefunden, indem man $Ul \parallel RU'$, $lm \parallel SQ$, $mn \parallel RU'$, $nu \parallel RU$, $uv \parallel PT$, $vV \parallel SQ$ zieht. Die Strahlen zwischen P und V mögen das Strahlenbüschel A heißen; Fig. 8 enthält in den nicht accentuirten Linien $abcd\dots$ den Weg eines Hauptstrahls von A ; nach 6 Reflexionen kommt hi rechts von RU zu liegen. Nach ebenso vielen gleichnamigen Reflexionen kommt ein Strahl des Büschels B zwischen V und S , in die Lage $h'i'$ links von RU und giebt Veranlassung zu einem Bilde B_3 verschieden von dem Bilde A_3 , während die früheren Bilder von A und B übereinstimmen.

Ein weiterer Scheidepunkt W zwischen S und R wird gefunden, indem man $Tx \parallel RU$, $xw \parallel RU'$, $wW \parallel SQ$ zieht. Fig. 9 zeigt den Weg eines Strahls vom Büschel C zwischen S und W , Fig. 10 den eines Strahls vom Büschel D zwischen W und R . Die zwei ersten Bilder der Büschel C und D stimmen überein.

Mit Hülfe der Fig. 8 bis 10 und unter Voraussetzung beliebiger Winkel P , Q , R erhält man nun leicht folgende Relationen:

A (Fig. 8)

$$A_1 \quad \beta - \beta_1 = Q - P$$

$$A_2 \quad \beta + \beta_2 = 2Q - P$$

$$A_3 \quad \beta - \beta_3 = 4(Q - 45)$$

$$A_4 \quad \beta + \beta_4 = 3Q - R$$

$$A_5 \quad \beta - \beta_5 = 2Q - R.$$

C (Fig. 9)

$$C_1 \quad \beta + \beta'_1 = R - Q$$

$$C_2 \quad \beta - \beta''_2 = R - 2Q$$

$$C_3 \quad \beta - \beta'''_3 = 4(45 - Q)$$

$$C_4 \quad \beta + \beta''_4 = 4(45 - Q) + P$$

$$C_5 \quad \beta - \beta''_5 = 3(P - Q).$$

B (Fig. 8, $h'ik'$)

$$B_5 \quad \beta - \beta'_5 = 5Q + 3P - 360$$

D (Fig. 10)

$$D_3 \quad \beta + \beta'''_3 = 4(R - 90) + P$$

$$D_4 \quad \beta - \beta'''_4 = 4(R - 90)$$

$$D_5 \quad \beta - \beta'''_5 = 360 - 5P - 3Q$$

Die Fig. 11 enthält eine Zusammenstellung der 14 Bilder. Die 9 aus den Katheten tretenden Bilder sind für das rechtwinklig-gleichschenklige Prisma farblos, weil für sie alle Differenzen $\beta - \beta_n$ Null werden; die 5 übrigen Bilder sind Spectra, die Summe $\beta + \beta_n$ beträgt durchweg 45° .

Das Bild A_1 entspricht der totalen Reflexion an der Hypotenuse. Das Sichtbarwerden seiner sehr lichtschwachen Begleiter erfordert eine starke Annäherung an die Lichtquelle und Bedeckung von PV (Fig. 7. 8) oder Anwendung von Sonnenlicht.

Auf die Eigenthümlichkeit des Bildes C_2 hat unseres Wissens zuerst Prof. Bauernfeind in München (in seinem Büchlein „das Prismenkreuz“) aufmerksam gemacht. Der Strahl de (Fig. 9) steht nämlich, wenn $Q = 45^\circ$ ist, senkrecht auf bc , und da, wenn überdies $R = 90^\circ$ ist, vermöge der obigen Relationen $\beta = \beta'_2$ wird, so steht auch eC_2 senkrecht auf ab , was auch die Richtung des einfallenden Lichts seyu mag.

Das Bild C_2 eines fernen Objects, das man mit einem Fernrohr einvisirt, bleibt daher stehen, wenn man das Prisma um eine seinen Kanten parallele Axe dreht. Zeigt ein Prisma diese Eigenschaft sowohl wenn P als Q dem Objecte zugekehrt ist, so ist dieß ein sicherer Beweis, daß $R = 90^\circ$ und $P = Q = 45^\circ$.

In der Richtung von C_2 erscheint noch das viel schwä-

chere Bild A_5 , welches dieselben Eigenschaften wie das erstere hat.

Die Bilder A_3 und C_3 werden mit Hülfe eines guten Planglases gesehen, welches die dem einfallenden Licht entgegen laufenden Strahlen seitlich ins Auge reflectirt.

Fällt das Bild D_4 mit dem Spiegelbilde in der Fläche PR zusammen, so ist offenbar $\beta'''_4 = \beta$, folglich $R = 90^\circ$.

§. 6.

Die Unterschiede der Brechungswinkel für zusammengehörige Bilder ergeben sich leicht aus den Relationen in §. 5. Man erhält für

$$A_1 \text{ und } C_1, \quad \beta_1 - \beta''_1 = 4(P - Q)$$

$$B_5 \text{ und } D_5, \quad \beta'_5 - \beta'''_5 = 8(R - 90)$$

$$A_3 \text{ und } C_2, \quad \beta_3 - \beta''_2 = 2(R - 2Q)$$

$$A_3 \text{ und } C_3, \quad \beta_3 - \beta'_3 = 8(45 - Q).$$

Einem sehr kleinen Unterschiede $\Delta\beta$ in den Brechungswinkeln entspricht aber ein Unterschied

$$\Delta\alpha = n \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \Delta\beta$$

in den Austrittswinkeln; dieser kann nun gemessen werden, wenn die Bilder nicht gar zu schwach und ungleich sind, und führt so zur Kenntniß der Fehler in den Winkeln.

Für $\alpha = 45^\circ$ und $n = 1,5$ hat man $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1,871$.

§. 7.

B. Die Hypotenuse als Eintrittsfläche.

Die Richtung der einfallenden Strahlen sey LS , (Fig. 12, Taf. I), die der gebrochenen SR ; die letzteren machen in den Figuren 15° mit der Normalen von PQ , so daß, für $n = 1,5$, $\alpha = 23^\circ$ ist. Die Transversalen SR , SR , PT , QU sind nach der in §. 4 gemachten Bemerkung die Richtungen des im Innern reflectirten Strahls.

Man hat hier fünf Strahlenbüschel zu unterscheiden, deren Gränzpunkte zuerst bestimmt werden müssen. Der Punkt S scheidet die Strahlen, welche nach einer ersten

Brechung auf PR oder PQ fallen. Zieht man $TX \parallel SR$, so scheidet X die Strahlen, welche nach einer ersten Reflexion an RQ , die Seiten PR oder PQ treffen. Zieht man ferner $S'u \parallel SR$, $uv \parallel PT$, $vV \parallel SR$, so scheidet V die Strahlen, welche nach drei Reflexionen an PR , RQ , PQ entweder auf QR oder PR fallen. Der Punkt W endlich, bestimmt durch das leicht zu verfolgende Liniensystem $UyxwW$, scheidet Strahlen, welche nach 4 Reflexionen an RQ , RP , PQ , RP entweder RQ oder PQ treffen. Die zwischen den aufeinander folgenden Punkten P , V , S , W , X , Q enthaltenen Strahlenbüschel mögen der Reihe nach A , B , C , D , E heißen (s. Fig. 12, Taf. I).

Die Figuren 13 bis 15 enthalten für das rechtwinklig-gleichschenklige Prisma die Wege der Hauptstrahlen, jedoch, zur Ersparung von Zeichnungen, in der Art, daß Fig. 13 Taf. I die Bilder von A und B , Fig. 14 von C und D , Fig. 15 von E giebt. Auch sind in den Figuren 13 und 14 die Strahlen von B und D nur soweit verzeichnet, als sie von den Strahlen A und C abweichen.

Mit diesen Figuren erhält man nun, wieder für beliebige Werthe von P , Q , R , die nachfolgenden Gleichungen für die verschiedenen Hauptbilder:

A (Fig. 13, Taf. I).	B (Fig. 13, Taf. I, $e'f'g'h'$).
$A_1 \beta + \beta_1 = R - P$	$B_3 \beta + \beta'_3 = R - Q$
$A_2 \beta - \beta_2 = 2(R - 90)$	$B_4 \beta - \beta'_4 = 0.$
$A_3 \beta + \beta_3 = 4(R - 90) + P$	
$A_4 \beta - \beta_4 = 4(R - 90).$	
C (Fig. 14, Taf. I).	D (Fig. 14, Taf. I, $f'g'h'$).
$C_1 \beta + \beta'_1 = Q$	$D_4 \beta + \beta''_4 = 3P - R.$
$C_2 \beta - \beta''_2 = 2(90 - R)$	
$C_3 \beta + \beta'_3 = 2(90 - R) + P$	E (Fig. 15, Taf. I).
$C_4 \beta + \beta'_4 = 4(90 - R).$	$E_2 \beta + \beta''_2 = 2Q - P$
	$E_3 \beta - \beta''_3 = 2(Q - P)$
	$E_4 \beta + \beta''_4 = Q + 4(45 - P).$

Fig. 16 Taf. I enthält eine Zusammenstellung der 14 Hauptbilder für das rechtwinklig-gleichschenklige Prisma.

Die 6 aus der Hypotenuse tretenden Bilder sind farblos, weil für sie die Differenzen $\beta - \beta_2$ wegen $R = 90^\circ$, $P = Q = 45^\circ$ alle Null werden; die übrigen 8 sind Spectra und es ist $\beta + \beta_2$ durchweg $= 45^\circ$.

Die Bilder $A_2 C_2$ werden (wie $A_3 C_3$, Fig. 11, Taf. I) mit Hülfe eines Planglases gesehen. Die Bilder $C_4 B_4 A_4 E_4$ (samt dem Spiegelbild) sieht man der Reihe nach auftauchen, wenn man das Auge in der Richtung QP bewegt. Die Spectra $D_3 E_3$ sieht mau, wenn durch Bedeckung von PS das hellere Bild A_3 abgeblendet wird; die übrigen Spectra erfordern keine besonderen Vorsichtsmafsregeln.

§. 8.

Die Unterschiede der Brechungswinkel farbloser zusammengehöriger Bilder sind nach den Gleichungen in §. 6 folgende:

$$A_2 \text{ und } C_2, \quad \beta_2 - \beta'_2 = 4(90 - R)$$

$$A_4 \text{ und } C_4, \quad \beta_4 - \beta'_4 = 8(90 - R).$$

Hiermit, wie in §. 5, die Gleichung $\Delta\alpha = n \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \Delta\beta$ verbunden, erhält man $90 - R$. Um den Winkeln α und β bestimmte Werthe zu geben, kann man das Hauptspectrum unter die kleinste Ablenkung bringen, bei welcher Stellung die 4 Bilder E_3 bis C_4 noch gut gesehen werden; für $n = 1,5$, $\beta = 22^\circ 30'$ wird alsdann

$$n \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1,692.$$

Von gröfserem practischem Werth scheint aber das Bild E_3 zu seyn; fällt für Mondlicht E_3 mit dem Spiegelbilde zusammen, so sind die Winkel P und Q gleich. Die Gleichheit dieser Winkel ist aber für alle Reflexionsprismen wegen der Achromasie der Bilder eine wichtigere Bedingung als die Rechtwinkligkeit in R . Bei dem Ocularprisma des hiesigen grofsen Verticalkreises von Reichenbach fand ich durch directe Messungen die Winkel P und Q gleich $44^\circ 58' 15''$ und $44^\circ 58' 55''$, während $R = 90^\circ 2' 50''$ ist; ohne Zweifel wurden bei der Bearbeitung die Winkel P und Q auf Kosten von R verbessert.

Fällt E_3 nicht mit dem Spiegelbilde zusammen, so sey $\alpha - \alpha''_3$ der Unterschied in den Richtungen: alsdann ist sehr nahe

$$\alpha - \alpha_3 = n \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\beta - \beta''_3),$$

weil aber $\beta - \beta''_3 = 2(Q - P)$, so kommt

$$Q - P = \frac{1}{2n} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\alpha - \alpha''_3),$$

wo der Coëfficient für die eben angenommene Stellung des Prismas 0,295 wird.

Das von den Winkeln des Prismas ganz unabhängige Bild B_1 würde genau in der Richtung des Spiegelbildes austreten, wenn die Kanten des Prismas genau parallel wären.

Dafs man durch Verdecken passender Stellen der Eintrittsfläche die Bilder A_1 , B_1 , C_1 zu unterscheiden im Stande ist, braucht wohl kaum bemerkt zu werden.

§. 9.

Eine bekannte Prüfungsmethode für den Winkel R besteht darin, dafs man durch die Hypotenuse das Bild seines Augensterns beobachtet; erscheint derselbe vollkommen rund, so ist $R = 90^\circ$; ist das Bild linsenförmig, so ist $R > 90^\circ$; besteht es aber aus zwei Segmenten, die gröfser als Halbkreise sind, so ist $R < 90^\circ$. Man überzeugt sich leicht, dafs man hier die Bilder A_2 , C_2 (Fig. 13 und 16, Taf. I) beobachtet, welche den rechts und links von S einfallenden Strahlen entsprechen. Die Abweichung von 90° mufs übrigens schon mehrere Minuten betragen, wenn die Probe, in der gewöhnlichen Weise angestellt; ein sicheres Resultat geben soll. Sehr gut gelingt sie aber, wenn man mit einem Feldstecher das Bild der Objectivfassung (oder einer passenden Spalte von weifsem Papier) aus einer Entfernung von mehreren Fufs im Prisma betrachtet. Man kann sogar die Abweichung δ von 90° messen, indem man die Entfernung p sucht, in welcher für $R > 90^\circ$ das linsenförmige Bild eben verschwindet, oder

oder für $R < 90^\circ$ die zwei Bilder der Fassung sich eben berühren; ist nämlich d der Durchmesser der Fassung (oder Breite der Spalte), h der Abstand der Kante R von der Hypotenuse PQ , n der mittlere Brechungscoefficient für die Substanz des Prismas, so findet man leicht

$$\delta = \frac{d}{4(np+h)}$$

was mit 3438 multiplicirt die Abweichung in Minuten giebt. Bei Prismen, für welche $R > 90^\circ$, fand ich es zweckmäfsig vor das Objectiv eine Papierspalte zu bringen, welche aus zwei gegenüber stehenden, eine starke Linie von einander abstehenden, rechtwinkligen Spitzen bestand. Die Entfernung, in welcher sich das Bild der Spalte Xförmig schlofs, konnte mit ziemlicher Sicherheit bestimmt werden, und die hieraus berechneten Werthe von δ stimmten gut mit den am Goniometer gefundenen. Wie sich die Sache für $R < 90^\circ$ macht, konnte ich aus Mangel an einem entsprechenden Prisma nicht ermitteln.

Eine artige Methode diese Abweichungen zu erkennen besteht in Folgendem: man stellt das Prisma so, dafs seine Kanten ohngefähr 45° mit dem Horizonte bilden und die Hypotenuse nach oben gekehrt ist; mit dem blofsen Auge oder besser mit einem vertical abwärts gegen das Prisma gerichteten Feldstecher beobachtet man alsdann ein fernes verticales Object (Thurmspitze, Blitzableiter); ist R verschieden von 90° , so sieht man zwei Bilder; dagegen nur Eines, wenn $R = 90^\circ$. Diese Bilder bleiben stehen, wenn das Prisma um eine den Kanten parallele Axe gedreht wird. Auch hier beobachtet man die Bilder $A_2 C_2$, nur mit dem Unterschiede, dafs die Strahlen sich nicht mehr im Normalschnitt des Prismas bewegen.

Tübingen d. 27. März 1854.

Goussard sc.