GENERALIZZAZIONE DI UN TEOREMA DI GAUSS.

Nota di P. Paci, in Genova.

Adunanza del 23 marzo 1902.

Data una superficie chiusa S , se si indica con r la distanza di un punto fisso A a un punto M dell'elemento variabile ds della superficie e con (rn) l'angolo formato dalla direzione MA colla normale interna alla superficie nel punto M , GAUSS ha dimostrato che l'integrale:

$$\int \frac{\cos (rn)}{r^2} ds,$$

esteso a tutta la superficie, è uguale a 4π se il punto A è interno alla superficie; è uguale a zero se è esterno; e per ogni punto della superficie in cui essa sia convessa e ammetta un piano tangente determinato, l'integrale stesso ha il valore 2π .

Una prima generalizzazione di questo teorema è stata fatta colla considerazione dell'integrale:

$$\int \frac{\mu \cos (rn)}{r^2} ds,$$

dove μ sta ad indicare una funzione continua delle coordinate del punto variabile M *).

Ad una nuova generalizzazione sono stato io condotto dalla considerazione di una questione semplicissima, che qui esporrò a titolo di applicazione.

*) È interessante lo studio e l'uso che ne fa il sig. PICARD nella sua opera: *Traité d'Analyse*, t. I. — Paris, 1891.

Se si indicano con α, β, γ gli angoli che la direzione MA fa coi tre assi rettangolari cui si suppone riferita la superficie e con $\varphi(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ una funzione qualunque continua dei coseni degli angoli stessi, è facile dimostrare che l'integrale:

$$\int \frac{\varphi \cos(rn)}{r^2} ds$$

è costante per tutti i punti interni alla superficie, ed è uguale allo zero per qualunque punto esterno.

Per la dimostrazione basta osservare che per ogni elemento dell'integrale si ha la relazione:

$$\frac{\varphi \cos(rn)}{r^2} ds = \pm \varphi d\sigma,$$

dove $d\sigma$ rappresenta l'elemento che corrisponde all'elemento ds sulla superficie sferica di raggio uguale a uno con centro in A , e il segno deve essere scelto secondo la regola seguita nella dimostrazione del teorema di GAUSS.

Seguendo passo per passo una delle dimostrazioni del teorema di GAUSS, è facile vedere che l'integrale, quando il punto A è interno, si trasforma nell'altro

$$\int \varphi d\sigma,$$

il cui valore è indipendente dalla posizione del punto A ; e che l'integrale stesso è nullo, se il punto A è esterno, giacchè gli elementi corrispondenti su una stessa direzione MA due a due si distruggono.

In particolare, se la funzione è della forma $\varphi(\cos^2\alpha, \cos^2\beta, \cos^2\gamma)$, e la superficie è tutta convessa e in ogni punto ammette un piano tangente determinato, l'integrale è pure costante su tutta la superficie sulla quale però assume valori differenti che all'interno. Infatti, considerando due punti A ed A' sulla superficie e i due integrali relativi, è facile vedere che ad ogni elemento dell'uno si può far corrispondere un elemento eguale dell'altro.

Ponendo $\varphi = 1$, si ha come caso particolare il teorema di GAUSS.

A dimostrare che il mio teorema non è sterile valga la seguente applicazione, mentre suppongo che altre se ne potranno fare.

Vi sono, come è noto, vari metodi per la determinazione della densità in ogni punto di uno strato ellissoidico equipotenziale, due dei

quali da me rinvenuti *). Uno nuovo ne espongo ora fondato sul precedente teorema.

Sia

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la solita equazione della superficie ellissoidica riferita ai suoi assi; si supponga fatta su di essa una distribuzione equipotenziale e proponiamoci di determinarne la densità in ogni punto.

Se M è il punto potenziente di coordinate x, y, z ; A il punto potenziato, pure sulla superficie, di coordinate x', y', z' ; r la distanza dei due punti e K la densità nel punto M , si avrà la funzione potenziale

$$V = \int K \frac{ds}{r},$$

che potremo anche scrivere:

$$V = \int K \frac{r}{\cos(rn)} \cdot \frac{\cos(rn)}{r^2} ds,$$

od anche

$$V = \int K \frac{r}{\cos(rn)} d\sigma.$$

Osserviamo ora che si avranno le relazioni:

$$(2) \quad x' = x + r \cos \alpha, \quad y' = y + r \cos \beta, \quad z' = z + r \cos \gamma.$$

Inoltre, se per semplicità indichiamo con $f(x, y, z)$ il primo membro dell'equazione (1), avranno luogo le due:

$$f(x, y, z) = 1, \quad f(x', y', z') = 1.$$

Se ora nella seconda di queste sostituiamo ad x', y', z' i valori dati dalle (2), si ottiene facilmente la relazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \\ + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cos^2 \gamma \right) \frac{r}{2} = 0. \end{aligned}$$

Ponendo, come di solito,

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2,$$

*) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. VII, 2° sem., 1898.

dalla precedente si deduce facilmente

$$-\sqrt{\Delta f} \cos(rn) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cos^2 \gamma \right) \frac{r}{2} = 0,$$

donde

$$\frac{r}{\cos(rn)} = \frac{2\sqrt{\Delta f}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cos^2 \gamma}.$$

Ora, sostituendo nell'espressione di V , si ottiene

$$V = \int K \frac{2\sqrt{\Delta f}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cos^2 \gamma} d\sigma;$$

per cui, se si pone

$$(3) \quad K = \frac{H}{\sqrt{\Delta f}} \quad *),$$

dove H denota una costante qualunque, e si sostituiscono alle derivate seconde i loro valori, si otterrà:

$$V = H \int \frac{d\sigma}{\frac{1}{a^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{b^2} \cos^2 \beta + \frac{1}{c^2} \cos^2 \gamma}.$$

Ora dal mio teorema consegue che V è costante su tutta la superficie.

Genova, 10 Marzo 1902.

P. PACI.

*) Colgo l'occasione per ricordare una trasformazione da me fatta della (3), che credo poco conosciuta. Essa è rappresentata dalla formola:

$$K = \frac{E}{4\pi\sqrt{abc}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{RR_1}},$$

dove E rappresenta la massa totale e R, R_1 i raggi di curvatura principali. (*Nuovo Cimento*, ser. 2, vol. XV, 1876).