8. *Über*
die Bjerknessche hydrodynamische Analogie
zu den elektrischen Erscheinungen;
von Hans Witte.

V. Bjerknes hat bekanntlich die berühmten Untersuchungen seines Vaters über pulsierende Kugeln weitergeführt und insbesondere die Analogie zu den elektromagnetischen Erscheinungen verfolgt.¹⁾ Neuerdings hat er in einer theoretischen Darlegung²⁾ bemerkenswerte mathematische Ergänzungen geliefert und schließlich in einer der rühmlichst bekannten Sammlung „Die Wissenschaft“ angehörenden Monographie³⁾ das Problem zu einem gewissen Abschlusse gebracht.

Der zweite Teil des Buches unternimmt den Versuch, in den eigenartigen Bewegungserscheinungen *mehr* zu sehen als eine überraschende und hochinteressante Analogie, nämlich Ansätze zu einer wirklich durchführbaren mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen. Dieser Erweiterung ihres Geltungsbereiches scheinen jedoch gewisse Bedenken entgegenzustehen, von denen die zwei wichtigsten hier in Kürze auseinandergesetzt werden sollen.

Bekanntlich liefern die Bjerknesschen pulsierenden Körper genau dasselbe Kraftlinienbild wie elektrostatisch geladene Körper bzw. wie Magnetpole, aber die Kräfte haben das falsche Vorzeichen. Während gleichnamige elektrische Körper bzw. Magnetpole einander abstoßen, ziehen mit gleicher Phase pulsierende Bjerknessche Körper einander an, und umgekehrt.

1) V. Bjerknes, Recherche sur les champs de force hydrodynamiques. Acta Mathematica 30. p. 99. Stockholm 1905; Archives des Sciences phys. et nat. 20. Genf 1905.

2) V. Bjerknes, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 4. Nr. 3. 1907.

3) V. Bjerknes, Die Kraftfelder (Die Wissenschaft, Heft 28, Braunschweig, Vieweg 1909).

Dieser Umstand ist es ja auch gewesen, der von vornherein die Anschauung hervorgerufen hat, daß es sich nur um eine äußerliche Analogie handelt, wie sie zwischen einzelnen elektromagnetischen und einzelnen mechanischen Vorgängen bekanntlich zu Dutzenden aufgefunden sind. An dieser Stelle setzt die mathematische Untersuchung aus dem Jahre 1907 und insbesondere der zweite Teil des genannten Buches ein. Der Verfasser gibt eine Hypothese an, durch die man der Schwierigkeit werde entgehen können. Sie lautet folgendermaßen.

Die mit dem verkehrten Vorzeichen behaftete Wirkung bezieht sich auf den pulsierenden Körper. Denkt man sich zunächst, daß nur ein einziges Medium vorhanden ist (im Bilde der Weltäther), so ist der pulsierende Körper ein von der übrigen Flüssigkeit abgegrenzt gedachtes Flüssigkeitsquantum, das eben die Pulsationen ausführt, im Bilde also ein von dem übrigen Weltäther abgesondert gedachtes Weltätherquantum. Nimmt man dann nachträglich an, daß sich an der betreffenden Stelle auch ponderable Materie befindet — die übrigens die Ursache der Pulsationen des gedachten Ätherquantums sein mag — und daß auf diese ponderable Materie von dem Ätherquantum eine gleich große, aber *entgegengesetzt gerichtete* Kraft ausgeübt wird, so wird die der Theorie entsprechende Bewegung der ponderablen Materie mit der in Wirklichkeit beobachteten identisch sein. Mit anderen (nicht von Bjerknes gewählten) Worten: Die pulsierenden Körper, wie sie etwa bei den Bjerknesschen Experimenten zu sehen sind, entsprechen nicht der ponderablen Materie, sondern nur pulsierenden Ätherquanten, und sie zeigen demnach nicht die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{P}$, sondern nur die „ätheromotorische“ Kraft $\mathfrak{E}$, d. h. eben die Wirkung, die die Resultante von inneren Spannungen X_x, X_y, X_z usw. des Äthers auf ein Ätherquantum ist, und erst das Ätherquantum selber übt seinerseits eine der Kraft $\mathfrak{E}$ entgegengesetzte ponderomotorische Kraft $\mathfrak{P}$ auf etwa dort befindliche ponderable Materie aus; so bekommt man richtig z. B. bei zwei positiv geladenen (gleich pulsierenden) Massenteilchen eine anziehende ätheromotorische, aber gerade deswegen eine abstoßende ponderomotorische Kraft; die erstere sieht man nicht, die zweite ist die, die der Physiker wahrnimmt.

Der Verfasser selber scheint sich nicht zu verhehlen, daß diese Hypothese Widerspruch finden wird (vgl. p. 171). Es kann ja gewiß nicht bezweifelt werden, daß man zu dieser paradoxen Hypothese seine Zuflucht nehmen muß, wenn man durchaus in der Bjerknesschen Analogie mehr als eine Analogie sehen will. Die Hypothese selber aber — wenn die Ätherspannungen auf ein Ätherteilchen z. B. die Resultante $+317 \text{ g.cm/sec}^2$ ergeben, soll, wenn man ein ponderables Teilchen an die gleiche Stelle bringt, dieses genau die entgegengesetzte Kraft -317 g.cm/sec^2 erfahren — ist doch wohl nicht nur paradox, sondern physikalisch (d. h. durch Nahewirkung, Druck, Zug oder Schubspannung) durchaus unvorstellbar.

Vielleicht hätte Bjerknes die paradoxe Hypothese gar nicht erst aufgestellt, sondern wäre bei der Erkenntnis stehen geblieben, daß es sich um eine äußerliche Analogie handelt, wenn er nicht noch obendrein eine mathematische Überlegung gefunden zu haben glaubte, die zu einem ähnlichen Resultate zu führen scheint. Gegen diese mathematische Überlegung richtet sich der zweite Einwand.

Statt der Bjerknesschen Bezeichnungen mögen auch weiterhin die in Deutschland üblichen angewandt werden. Der Gedankengang von Bjerknes ist der folgende.

Auf alle Fälle muß die Bewegungsgleichung des Weltäthers die Form haben:

$$(1) \quad k \cdot \frac{d\dot{q}_x}{dt} = \mathfrak{Q}_x - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad \text{usw.},$$

wenn k die Trägheit pro Volumeinheit bedeutet, $\dot{q}$ die Geschwindigkeit, t die Zeit, d/dt die substantielle Änderungsgeschwindigkeit gleich $\partial/\partial t + \dot{q} \cdot \text{grad}$, $\mathfrak{Q}$ die äußere Kraft, X_x usw. die inneren Spannungen und x, y, z die Koordinaten im rechtsdrehenden System. Bezeichnet man die Resultierende der inneren Spannungen mit $\mathfrak{R}$, so kann man (1) auch schreiben

$$(2a) \quad k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{R},$$

$$(2b) \quad \mathfrak{R}_x = - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad \text{usw.}$$

Dies ist die Form, auf die sich die Maxwellschen elektrischen Feldgleichungen bringen lassen müssen, wenn sie mechanisch gedeutet werden sollen. Die Glieder $\mathfrak{R}$ und $k \cdot d\dot{q}/dt$ be-

ziehen sich dabei nur auf den Zustand bzw. die Bewegung im Äther. Denkt man sich nachträglich diese beiden Glieder allein vorhanden, so entspräche die Gleichung natürlich nicht mehr den Maxwellschen Feldgleichungen, da die vollständige Bewegungsgleichung noch die äußere Kraft $\mathfrak{Q}$ (pro Volumeinheit) enthalten soll. Die Kraft $\mathfrak{Q}$ ist also diejenige Kraft, die auf ein Volumelement von außen her angreifen muß, damit die Bewegung den Maxwellschen Gleichungen entsprechend verläuft. Infolgedessen muß in bekannter Weise¹⁾ der Äther selbst auf das Volumelement eine Kraft $\mathfrak{F}$ (pro Volumeinheit) ausüben, welche der Kraft $\mathfrak{Q}$ gleich und entgegengesetzt ist, so daß man zunächst für $\mathfrak{Q}$ die Gleichung enthält

$$(3) \quad \mathfrak{Q} = - \mathfrak{F}.$$

Die Kraft $\mathfrak{F}$ ist offenbar dieselbe, die oben bereits als ätheromotorische Kraft bezeichnet wurde; dieser ätheromotorischen Kraft $\mathfrak{F}$ muß also die Kraft $\mathfrak{Q}$ auf alle Fälle entgegengesetzt gleich sein. Nach der landläufigen und physikalisch verständlichen Auffassung würde die ätheromotorische Kraft $\mathfrak{F}$ weiterhin, sobald ponderable Materie an die Stelle des Äthers tritt, mit der ponderomotorischen Kraft $\mathfrak{P}$ identisch sein,

$$(4) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{P},$$

woraus sich für $\mathfrak{Q}$ die Bestimmungsgleichung ergeben würde

$$(5) \quad \mathfrak{Q} = - \mathfrak{P},$$

d. h. die äußere Kraft $\mathfrak{Q}$ müßte entgegengesetzt gleich sein dem bekannten Ausdruck $\mathfrak{P}$, den die Maxwellsche Theorie für die gesamte ponderomotorische Kraft liefert, nämlich

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P} = + \frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{E} \cdot \text{div } \mathfrak{E} \\ - \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2 \cdot \text{grad } \varepsilon - \frac{1}{4\pi} \cdot [\text{curl } \mathfrak{E}, \varepsilon \mathfrak{E}] \\ + \frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{H}^2 \cdot \text{grad } \mu - \frac{1}{4\pi} \cdot [\text{curl } \mathfrak{H}, \mu \mathfrak{H}] \end{array} \right\} \end{array} \right\},$$

wenn man in bekannter Weise die elektrische und die magnetische Feldstärke mit $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$, die Dielektrizitätskonstante mit ε und die magnetische Permeabilität mit μ bezeichnet.

¹⁾ Vgl. H. Witte, Mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen p. 86 ff. Berlin 1906.

Zufolge der Bjerknesschen Hypothese soll aber die ätheromotorische Kraft $\mathfrak{F}$ mit der ponderomotorischen $\mathfrak{P}$ nicht identisch, sondern ihr entgegengesetzt gleich sein,

$$(7) \quad \mathfrak{F} = - \mathfrak{P},$$

so daß die Bestimmungsgleichung für $\mathfrak{Q}$ lautet

$$(8) \quad \mathfrak{Q} = + \mathfrak{P}.$$

Bjerknes muß also in die allgemeine Ätherbewegungsgleichung (2) für die äußere Kraft $\mathfrak{Q}$ den Maxwell'schen Wert (6) von $\mathfrak{P}$ direkt, mit gleichem Vorzeichen, einsetzen. Damit dies geschehen könne, ist es nötig, die beiden Gleichungen heranzuziehen, die bei dieser mathematischen Deduktion die mechanische Deutung der beiden Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ geben sollen. Sie stimmen mit den bekannten Grundlagen der Kelvinschen Theorie des quasirigiden Äthers überein, lauten also in der üblichen Bezeichnung:

$$(9) \quad \mathfrak{E} = - \sqrt{\frac{4 \pi k}{\epsilon}} \cdot \dot{\mathbf{q}},$$

$$(10) \quad \mathfrak{H} = + \sqrt{\frac{4 \pi h}{\mu}} \cdot \mathbf{u} = + \sqrt{\frac{4 \pi h}{\mu}} \cdot \text{curl } \mathbf{q},$$

wobei zwischen den Konstanten h und k die Beziehungen bestehen:

$$(11) \quad h = \frac{c^2 \cdot k}{\mu \cdot \epsilon} = \frac{c^2 \cdot k_0}{\mu}, \quad k = \epsilon \cdot k_0,$$

ferner c die Lichtgeschwindigkeit im freien Äther, k_0 die Dichtigkeit des freien Äthers bezeichnet und schließlich der Vektor $\text{curl } \mathbf{q} = \mathbf{u}$ als „Drehung“ gedeutet wird.¹⁾

Setzt man (9) und (10) in (6) ein, so erhält man gemäß (8) für die gesuchte äußere Kraft $\mathfrak{Q}$ den Wert

$$(12) \quad \mathfrak{Q} = + \dot{\mathbf{q}} \cdot \text{div } h \dot{\mathbf{q}} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 \cdot \text{grad } h \quad - [\text{curl } \dot{\mathbf{q}}, h \dot{\mathbf{q}}] \\ + \frac{1}{2} (h \mathbf{u})^2 \cdot \text{grad } \left(\frac{1}{h} \right) - [\text{curl } h \mathbf{u}, \mathbf{u}] \end{array} \right\}.$$

1) In der älteren Arbeit wird die Drehung mit dem Curl der Verschiebung $\mathbf{q}$, in der neueren mit dem Zeitintegral über die Wirbelgeschwindigkeit $\text{curl } \dot{\mathbf{q}}$ identifiziert; vgl. über diese Frage H. Witte, l. c. p. 130, sowie Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 8. p. 502. 1906.

Diese Bedingung wird der allgemeinen Ätherbewegungsgleichung (2) durch die neue Bjerknessche Hypothese aufgelegt. Hinzu tritt die bei jeder mechanischen Theorie der Elektrodynamik zu erfüllende Forderung, daß die beiden Maxwellschen Feldgleichungen richtig herauskommen, also für Isolatoren (es genügt, diesen Fall zu betrachten) die beiden Gleichungen:

$$(13) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial (\varepsilon \cdot \mathfrak{E})}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H},$$

$$(14) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial (\mu \cdot \mathfrak{H})}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E}.$$

Daraus folgen, wenn man wieder (9) und (10) berücksichtigt, genau wie beim Kelvinschen quasirigiden Äther die Bedingungen:

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) = -\text{curl } (h \cdot u),$$

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \text{curl } \dot{q}.$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen ergibt sich unter einer gewissen Vernachlässigung ($d/dt = \partial/\partial t$) unmittelbar aus (10), stellt also physikalisch keine neue Bedingung dar, sondern nur eine Definition. Die erste dagegen ist — immer ganz wie beim quasirigiden Äther — die Bewegungsgleichung des Äthers, muß also mit der im Anfang zugrunde gelegten Gleichung (2) identisch sein. Im ganzen unterliegt demnach die allgemeine Ätherbewegungsgleichung (2)

$$k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{R},$$

$$\mathfrak{R}_x = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad \text{usw.}$$

zwei Bedingungen:

1. der Bjerknesschen Bedingung (12) für die äußere Kraft $\mathfrak{Q}$

$$\mathfrak{Q} = + \dot{q} \text{ div } k \dot{q} - \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad } k - [\text{curl } \dot{q}, k \dot{q}] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (h u)^2 \cdot \text{grad } \left(\frac{1}{h} \right) - [\text{curl } h u, u] \right\};$$

2. der schon bei Lord Kelvins quasirigidem Äther vorhandenen Bedingung, daß sie sich auf die Form (15) bringen läßt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) = -\text{curl } (h \cdot u).$$

Verfügen kann man zu diesem Zwecke nur noch über die inneren Spannungen X_x usw. Bjerknes schlägt nun das folgende Verfahren ein.

Zunächst setzt er (wenn man von einem nebensächlichen konstanten Normaldruck p_0 sogleich absieht):

$$(17) \quad \begin{cases} X_x = -\frac{1}{2}k\dot{q}^2 - \frac{1}{2}h u^2 + h u_x^2, & X_y = +h \cdot u_x + h \cdot u_x \cdot u_y, & X_z = \dots, \\ Y_x = -h \cdot u_x + h \cdot u_y \cdot u_x, & Y_y = \dots, & Y_z = \dots, \\ Z_x = +h \cdot u_y + h \cdot u_z \cdot u_x, & Z_y = \dots, & Z_z = \dots \end{cases}$$

Führt man diese Werte in die allgemeine Ätherbewegungsgleichung ein, so geht sie über in

$$(18) \quad \begin{cases} k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{D} + \text{grad} \left\{ \frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2} h \cdot u^2 \right\} \\ \quad \quad \quad - u \cdot \text{grad} (h \cdot u) - \text{curl} (h \cdot u). \end{cases}$$

Darauf formt er die linke Seite um. Erstens setzt er

$$(19) \quad k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q}$$

und zweitens, unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung $\partial k / \partial t = -\text{div} (k \cdot \dot{q})$, in (19) wieder

$$(20) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) + \dot{q} \cdot \text{div} (k \cdot \dot{q}),$$

also im ganzen

$$(21) \quad k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) + \dot{q} \cdot \text{div} (k \cdot \dot{q}) + k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q}.$$

Die beiden Glieder $\dot{q} \cdot \text{div} (k \cdot \dot{q})$ und $k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q}$ schafft Bjerknes dann auf die rechte Seite und erhält aus (18)

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) = \mathfrak{D} - \dot{q} \cdot \text{div} (k \cdot \dot{q}) \\ \quad + \left\{ \text{grad} \left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 \right) - k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q} \right\} \\ \quad \quad + \left\{ \text{grad} \left(\frac{1}{2} h \cdot u^2 \right) - u \cdot \text{grad} (h \cdot u) \right\} - \text{curl} (h \cdot u). \end{cases}$$

Schließlich benutzt er noch die Identitäten

$$(23) \quad \text{grad} \left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 \right) - k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q} = +\frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad} k - [\text{curl} \dot{q}, k \dot{q}],$$

$$(24) \quad \text{grad} \left(\frac{1}{2} h \cdot u^2 \right) - u \cdot \text{grad} (h \cdot u) = +\frac{1}{2} (h u)^2 \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{h} \right) - [\text{curl} h u, u],$$

erhält infolgedessen statt (22) die Bewegungsgleichung

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(k \cdot \dot{q}) &= \mathfrak{D} - \dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q}) \\ &+ \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad } k &- [\text{curl } \dot{q}, k \dot{q}] \\ + \frac{1}{2} (h u)^2 \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{h} \right) &- [\text{curl } h u, u] \end{aligned} \right\} - \text{curl}(h \cdot u) \end{aligned} \right.$$

und steht am Ziele. Berücksichtigt man jetzt die Bjerknessche Hypothese: Ätheromotorische Kraft entgegengesetzt gleich der ponderomotorischen Kraft, indem man für $\mathfrak{D}$ die Bedingung (12) einsetzt, so bleibt exakt

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t}(k \cdot \dot{q}) = - \text{curl}(h \cdot u),$$

die der Maxwell'schen Gleichung (13) entsprechende zweite Bedingungsgleichung (15), welche die Bewegungsgleichung (2) erfüllen muß.

Es fragt sich, ob durch diese mathematische Herleitung die paradoxe Hypothese, daß der Äther mit einer der ätheromotorischen Kraft entgegengesetzten Kraft auf die eingebettete Materie wirke, gestützt wird. Das Gegenteil scheint der Fall zu sein.

Die äußere Kraft $\mathfrak{D}$ muß ihrem Sinne nach durch die Kraft $\mathfrak{F}$ aufgehoben werden, die oben als ätheromotorische bezeichnet wurde, d. h. durch eine Resultante von inneren Ätherspannungen. Die Gleichung (25) enthält nun anscheinend als „ätheromotorische Kraft“ den Ausdruck

$$(27) \quad \mathfrak{F}' = - \dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q}) + \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad } k &- [\text{curl } \dot{q}, k \dot{q}] \\ + \frac{1}{2} (h u)^2 \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{h} \right) &- [\text{curl } h u, u] \end{aligned} \right\},$$

denn dieser Ausdruck ist entgegengesetzt gleich dem Bjerknesschen Werte (12) von $\mathfrak{D}$ und gegen ihn wird in der Tat beim Übergange von (25) auf (26) $\mathfrak{D}$ fortgehoben. Richtet man aber den Blick auf die Art, wie die der Form (25) vorhergehende Gestalt (22) der Bewegungsgleichung aus ihrer Vorgängerin (18) entspringt — nämlich durch bloßes Hinüberschaffen der späterhin Beiträge zu $\mathfrak{F}'$ liefernden Glieder $\dot{q} \cdot \text{div } k \dot{q}$ und $k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad } \dot{q}$ von links nach rechts —, so sieht man, daß der Ausdruck $\mathfrak{F}'$ tatsächlich *nicht* eine Resultante der zugrunde gelegten Spannungen (17) ist. Aus den inneren Spannungen (17) entstammen gemäß (18)

und (23), (24) lediglich das vierte und fünfte Glied (d. h. die beiden, die von u abhängen). Das zweite und dritte dagegen rühren nur zum Teil von den Spannungen (17) her (insofern nämlich das Glied $\text{grad } \frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2$ in ihnen aufgegangen ist), im übrigen sind sie durch den Kunstgriff (19) gewonnen, und das ganze erste Glied schließlich hat gar nichts mit den inneren Spannungen (17) zu tun, es ist nichts als die Folge des weiteren Kunstgriffes (20). Die Bjerknessche äußere Kraft $\mathfrak{Q}$ sieht sich also tatsächlich nicht einer gleich großen inneren Ätherresultante $\mathfrak{F}$ gegenüber, die sie doch aufheben soll; es war eine Täuschung, wenn man annahm, der Bjerknessche „gyrostatistische Weltäther“ ergebe tatsächlich die ätheromotorische Kraft

$$(28) \quad -\dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q}) + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad } k \quad - [\text{curl } \dot{q}, k \cdot \dot{q}] \\ + \frac{1}{2} (h u)^2 \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{h} \right) - [\text{curl } h u, u] \end{array} \right\},$$

die von der Bjerknesschen Hypothese gefordert wird, die mathematische Deduktion, die die paradoxe Hypothese stützen soll, ist ebenfalls unhaltbar.

Will man etwa noch den Versuch machen, die Wirkung (28) nachträglich aus Ätherspannungen aufzubauen, so läßt sich jetzt leicht einsehen, daß das bei der Bjerknesschen Hypothese überhaupt unmöglich ist. Man betrachte etwa das Glied $-\dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q})$. Soll dieses, aus inneren Ätherspannungen resultierend, auf der rechten Seite der Ätherbewegungsgleichung (2) bzw. (18) usw. stehen, dann muß erstens ein Spannungszustand existieren, der eben die Resultante $-\mathfrak{G} = -\dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q})$ liefert. Ferner aber enthält nach (21) die linke Seite $k \cdot d\dot{q}/dt$ der Bewegungsgleichung (2) usw. das Glied $+\dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q})$, und dieses muß nach wie vor weggehoben werden, damit links, der Maxwell'schen Gleichung (13) bzw. (15) entsprechend, $\partial(k \dot{q})/\partial t$ frei wird. Das kann aber, da man lediglich über die Spannungen X_x usw. zu verfügen hat, nur durch einen zweiten Spannungszustand bestehen, der die Resultante $+\mathfrak{G} = +\dot{q} \text{div}(k \cdot \dot{q})$ ergibt. Man müßte also einführen: 1. einen inneren Spannungszustand des Äthers mit der Resultante $-\mathfrak{G}$, der einen Teil einer äußeren Kraft $\mathfrak{Q}$ aufhebt, und 2. einen entgegengesetzt gleichen inneren Spannungszustand des Äthers mit der Resultante $+\mathfrak{G}$,

der gemäß (21) einen Teil von $k \cdot d\dot{q}/dt$ aufhebt. Das würde natürlich keinen physikalischen Sinn haben; der Äther kann nicht vermöge innerer Spannungen gleichzeitig die Kraft $-\mathfrak{G}$ und die Kraft $+\mathfrak{G}$ ausüben, er übt dann eben gar keine Kraft aus und ein Spannungszustand existiert überhaupt nicht. Dasselbe gilt für die übrigen Glieder, soweit sie Bjerknes eben nicht selber aus inneren Spannungen hergeleitet hat. Damit fällt die Möglichkeit, die Bjerknessche ätheromotorische Kraft aus inneren Ätherspannungen aufzubauen; der Weltäther ist, wenn er die Maxwell'schen Gleichungen (13), (14) ergeben soll, überhaupt nicht imstande, die von Bjerknes beabsichtigte, der gewöhnlichen Anschauung entgegengesetzte ätheromotorische Kraft (28) zu liefern.

Man hat also in der Tat hier wieder einmal einen der vielen Fälle vor sich, in denen es sich um eine *unvollständige*, wenn auch durch ihre Paradoxie zunächst überraschende Analogie von Bewegungsvorgängen zu den elektromagnetischen Erscheinungen handelt. — — —

Folgendes mag noch erwähnt werden. Wenn man einmal daran geht, den Bjerknesschen Ansatz für die Spannungen X_x usw. zu ändern, dann liegt vielleicht auch ein anderes Spannungssystem nahe, das zum Teil bei einer früheren Untersuchung über Lord Kelvins quasirigiden Äther¹⁾ benutzt worden ist. Aus dem Bjerknesschen kann man es erhalten, indem man einige Vorzeichen ändert und einige Glieder hinzufügt. Man gehe wieder aus von der allgemeinen Ätherbewegungsgleichung (2)

$$k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{D} + \mathfrak{R},$$

$$\mathfrak{R}_x = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad \text{usw.}$$

und setze

$$X_x = +\frac{1}{2}k \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2}h \cdot u^2 - 2k \cdot \dot{q}_x^2 - h u_x^2,$$

$$X_y = +h \cdot u_z - 2k \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{q}_y - h \cdot u_x \cdot u_y,$$

$$X_z = \dots,$$

1) H. Witte, l. c. p. 86.

$$Y_x = -h \cdot u_x - 2k \cdot \dot{q}_y \cdot \dot{q}_x - h \cdot u_y \cdot u_x,$$

$$Y_y = \dots,$$

$$Y_z = \dots,$$

$$Z_x = +h \cdot u_y - 2k \cdot \dot{q}_z \cdot \dot{q}_x - h \cdot u_z \cdot u_x,$$

$$Z_y = \dots,$$

$$Z_z = \dots.$$

Dann geht die allgemeine Gleichung (2) nicht über in (18), sondern in

$$h \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{D} + 2\dot{q} \cdot \text{div}(h \cdot \dot{q}) - \text{grad}\left(\frac{1}{2}k \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2}h \cdot u^2\right) + 2k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q} + u \cdot \text{grad}(h \cdot u) - \text{curl}(h \cdot u),$$

oder unter Einsetzen von (21) und Berücksichtigung von (23) und (24) in

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h \cdot \dot{q}) &= \mathfrak{D} + \dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q}) \\ &- \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\dot{q}^2 \cdot \text{grad} k \\ + \frac{1}{2}(h u)^2 \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{h}\right) \end{array} - [\text{curl} \dot{q}, k \dot{q}] \right\} - \text{curl}(h \cdot u). \end{aligned}$$

Jetzt aber kann man für $\mathfrak{D}$ den wirklichen Maxwell'schen Wert einführen, der also die umgekehrten Vorzeichen wie das Bjerknessche $\mathfrak{D}$ aufweist (vgl. (12)):

$$\mathfrak{D} = -\dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q}) + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\dot{q}^2 \cdot \text{grad} k \\ + \frac{1}{2}(h u)^2 \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{h}\right) \end{array} - [\text{curl} \dot{q}, k \dot{q}] \right\},$$

denn es bleibt alsdann exakt übrig wieder die der Maxwell'schen Gleichung (13) entsprechende erste Bedingungsgleichung (15)

$$\frac{\partial}{\partial t}(h \cdot \dot{q}) = -\text{curl}(h \cdot u).$$

Bis hierhin könnte man diese Interpretation, die die ätheromotorische Kraft *gleich* der Maxwell'schen ponderomotorischen Kraft setzt, auf den ersten Blick wohl für eine aussichtsvolle Variante der Bjerknesschen Theorie ansprechen. Allerdings auch diese nur bis hierhin. Es darf daran erinnert werden, daß weitere grundsätzliche Einwände gegen *alle* Theorien, die auf den Lord Kelvinschen ((9) und (10)) oder verwandten

Grundvoraussetzungen aufgebaut sind, also Einwände, die in gleicher Weise den Bjerknesschen Versuch wie die soeben aufgestellte Variante treffen, bereits vor einigen Jahren an anderer Stelle¹⁾ erörtert worden sind. Es ist, wie weitere Untersuchungen²⁾ seinerzeit ergeben haben, überhaupt unmöglich, die elektrischen Erscheinungen mechanisch zu erklären, solange man an der Hypothese eines kontinuierlichen Weltäthers festhält. Wer heutzutage noch daran denkt, einen mechanischen Erklärungsversuch der Elektrodynamik aufzufinden, muß die Annahme zugrunde legen, daß der gesamte Weltäther überall in diskrete Teilchen, in Ätheratome zerfällt.

1) l. c. p. 90ff.

2) l. c. p. 219, sowie Ann. d. Phys. 26. p. 235—311. 1908.

(Eingegangen 27. Juni 1909.)