CONSTRUCTIONS DU CENTRE DE COURBURE DE LA COURBE, LIEU DES POINTS
DONT LES DISTANCES A DEUX COURBES DONNÉES SONT DANS
UN RAPPORT CONSTANT

PAR A. MANNHEIM.

CAPITAINE D'ARTILLERIE.

LEMME. D'un point quelconque a (fig^a. 1^o.) de la courbe A , on abaisse la normale ab sur la courbe B ; aux points a, b on mène les tangentes al, bl aux courbes A, B ; lorsque a parcourt A , le point l décrit un lieu dont on demande de construire la tangente L .

Soient A' et B' des courbes symétriques à A et à B par rapport à la tangente al ; fessons rouler A' sur A , soit D la courbe enveloppe de B' entraînée dans ce mouvement; D touche B' au point e pied de la normale abaissée du point a sur B' ; ce point est le symétrique de b , par suite la tangente en e à la courbe D passe par l , en outre les tangentes le et lb sont égales. D'après cela, en remplaçant les courbes B et D par leurs cercles osculateurs en b et en e , le point l décrit une droite, axe radical de ces circonférences. Il nous reste à construire cet axe radical qui n'est autre chose que la tangente demandée.

Cet axe passe par le point l et doit être perpendiculaire à la ligne des centres des cercles osculateurs; on connaît le centre de courbure f de B , cherchons celui de D correspondant au point e .

Le centre de courbure de D , correspondant au point e , n'est autre que le centre de courbure de la courbe décrite par g , centre de courbure de B' ; en appliquant la construction de *Savary*, comme l'indique la figure, on trouve le point h .

Nous allons modifier la construction de ce point. D'après la formule de *Savary* l'on a :

$$\left(\frac{1}{ah} + \frac{1}{ga}\right)\cos. oah = \frac{2}{ao},$$

d'un autre côté, en menant des points h et g les parallèles hm et gp à la tangente al , l'on obtient quatre points a, m, p, f qui forment une division harmonique et l'on a :

$$\frac{1}{am} + \frac{1}{af} = \frac{2}{ap};$$

en comparant cette relation avec la précédente, et remarquant que $am=ah, ga=af$, on conclut que le point p est la projection du centre de courbure o sur la droite af .

D'après cela, il suffit d'abaisser du point o la perpendiculaire op sur fa , du

point p , la perpendiculaire pq sur ao , et l'on obtiendra, en joignant le point f au point q , une ligne fq qui passe par le point h .

L'axe radical cherché, qui n'est autre que la tangente demandée, est la perpendiculaire L abaissée du point l sur fq .

Réciproquement connaissant cette tangente, on peut, à l'aide de la construction inverse, déterminer le centre de courbure de l'une des courbes, l'autre centre étant supposé connu.

2^{me}. SOLUTION. Remplaçons la courbe A par une conique ayant pour foyer le point f , pour centre de courbure o et passant en a ; remplaçons en b la courbe B par son cercle osculateur.

Cette conique et ce cercle sont deux courbes homologues ayant f pour centre d'homologie; le point l décrit alors un axe d'homologie (*Prop. proj. des fig. n° 459*). Cet axe étant perpendiculaire à la ligne des foyers de la conique, il faut pour le construire, chercher cette dernière droite.

Pour cela, on abaisse du centre de courbure o la perpendiculaire op sur fa , du point p la perpendiculaire pq sur ao , la ligne fq passe par le second foyer de la conique; la perpendiculaire L abaissée du point l sur fq est la droite cherchée. On retrouve ainsi la première construction.

On arrive à une autre construction de la manière suivante: l'axe d'homologie que nous cherchons étant parallèle à la directrice de la conique, il suffit de chercher cette droite. Le point l' , intersection de la tangente al et de la ligne fl' perpendiculaire à fa , est un point de cette directrice; au point l' on élève à $l'a$ la perpendiculaire $l't$, cette droite rencontre of au point t ; la ligne ta est perpendiculaire à la directrice L' cherchée (*Terquem. N.^{tes} Annales T. XVI page 331*) ; il suffit alors d'abaisser du point l la perpendiculaire L sur ta pour avoir la tangente demandée.

REMARQUES. 1^o. Nous venons de voir qu'il suffisait de chercher L' ; nous avons déjà donné une construction de cette droite dans les Nouvelles Annales à l'article que nous venons de citer.

Voici la question résolue au n° 21 de cet article :

« Soit bfc un triangle rectangle mobile et variable dont le sommet de l'angle droit est fixe en f et dont l'hypoténuse bc est tangente à une circonférence donnée o , le point c est le point de contact mobile: on demande la normale au lieu décrit par le point b . »

On peut trouver un grand nombre de constructions de la tangente au lieu décrit par le point b et par suite de L' , il suffit pour cela de transformer, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, les constructions connues du centre de courbure des coniques, la directrice étant une circonférence décrite de l'un des foyers de cette conique comme centre.

Réciproquement une construction de la tangente au lieu décrit par le point b conduit, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, à une construction du centre de courbure des coniques.

2° Le lemme que nous avons résolu plus haut est un cas particulier de la question suivante :

Etant donnés deux courbes quelconques A, B et un point f arbitraire dans le plan de ces courbes, de ce point, on mène une transversale quelconque qui coupe, A au point a et B au point b; de ces points, on mène aux courbes A et B les tangentes al et bl qui se coupent en l; on demande la tangente au lieu décrit par le point l lorsque la transversale tourne autour du point f.

Pour résoudre cette question, on remplace en a et en b les courbes A et B par des coniques osculatrices, ayant pour foyer commun le point f , et l'on cherche pour celles-ci l'axe d'homologie qui passe par le point l .

Cette droite, qui est la tangente cherchée, passant aussi par le point de rencontre des directrices de ces coniques, est facile à déterminer.

Constructions du centre de courbure de la courbe, lieu des points dont les distances à deux courbes données sont dans un rapport constant.

Soient B, C (fig. 2^a.) les courbes données, A la ligne dont on veut construire le centre de courbure correspondant à un point quelconque a . L'on a $\frac{ab}{ac} = \text{constante}$, et il est facile de voir que d'après cette condition les tangentes al , bl , cl aux trois courbes, A, B, C se coupent au même point l .

Soient o le point cherché, f le centre de courbure de B en b , f' le centre de courbure de C en c ; d'après le lemme précédent, on construit la tangente L au lieu décrit par le point l , considéré comme point de rencontre des tangentes al , bl , de la manière suivante :

Du point o , on abaisse sur af la perpendiculaire op , et du point p sur ao la perpendiculaire pq , la ligne fq est perpendiculaire à la tangente cherchée.

En considérant le point l comme le point de rencontre des tangentes al , cl nous pouvons, d'après la réciproque du lemme, revenir de la connaissance de L à la détermination du centre de courbure f' de C par la construction suivante : du point o , on abaisse sur ac la perpendiculaire op' ; du point p' , on abaisse sur ao la perpendiculaire $p'q'$; en menant la ligne $q'f'$ parallèlement à qf , on a une ligne perpendiculaire à L, qui passe par le centre de courbure f' cherché. Nous avons ainsi une construction, que nous appelons *construction* (1), qui est symétrique par rapport aux points f et f' , et qui permet de déterminer l'un de ces points lorsque l'autre est donné

ainsi que le point o ; il nous reste à transformer cette construction afin de déterminer o lorsque l'on donne f et f' .

Au point f , (fig. 2.), élevons sur af la perpendiculaire fr ; au point r , élevons sur ao la perpendiculaire rs ; la ligne so est parallèle à fq : en effet, l'hexagone $opqfrs$ inscrit dans l'angle oaf a déjà les côtés op, fr parallèles entre eux, ainsi que pq, rs ; donc os est parallèle à fq . On démontre de même, en effectuant une construction analogue pour f' , que os' est parallèle à $f'q'$; mais fq et $f'q'$ sont des lignes parallèles entre elles; donc les points s, o, s' sont en ligne droite.

Nous avons donc, pour déterminer le point o , la construction suivante, que nous appellerons, *construction* (2): aux points f et f' , on élève aux droites af et af' les perpendiculaires $fr, f'r'$; des points r, r' , on élève sur la normale ao , qui est connue puisqu'on sait construire al , les perpendiculaires $rs, r's'$; la ligne ss' coupe la normale ao au point o cherché.

Cette construction symétrique par rapport aux points f et f' peut se transformer de la manière suivante: prolongeons (fig. 2) rf jusqu'à sa rencontre l' avec al ; les triangles $l'fa$ et $r'os'$ sont tels que leurs côtés se coupent en trois points en ligne droite: lf et $r'o$ se coupent en r , af et $s'o$ se coupent en s , la et $r's'$ sont parallèles à la ligne sr ; donc ils ont leurs sommets sur trois droites concourantes, ainsi les lignes lr', fo se coupent en n sur af' . De là une construction, que nous appellerons, *construction* (3), qui lie les trois points f, o, f' , et qui permet de déterminer o ou f' connaissant f et l'un de ces points. Il existe une construction analogue qui permet de déterminer o ou f connaissant f' et l'un de ces points.

Applications. Lorsque les lignes B, C sont des circonférences, et que le rapport $\frac{ab}{ac}$ diffère de l'unité, la ligne A est une ovale de Descartes; lorsque le rapport constant est l'unité, A est une conique à centre; lorsque les lignes B et C se réduisent à un point et à une droite, A est une conique quelconque. Dans tous ces cas il est facile de construire le centre de courbure de A .

En appliquant aux coniques les constructions données plus haut, on ne retrouve pas la construction que nous avons employée dans la 2^{ème} solution de notre lemme, et qui nous a conduit à la première construction de L .

Nous allons y arriver, comme cas particulier d'une nouvelle construction générale. Nous avons vu, (fig. 2) que si du point o on abaisse sur af, af' les perpendiculaires op, op' , et que si des points p, p' on abaisse sur ao les perpendiculaires $pq, p'q'$, les lignes $fq, f'q'$ sont parallèles. On peut opérer inversement: menons des points f, f' des parallèles quelconques qui rencontrent ao en deux points; en ces points, élevons sur ao des perpendiculaires qui coupent af, af' ; enfin de ces points d'intersection, élevons sur af, af' des perpendiculaires qui se coupent en

ω (*); à chaque direction des parallèles issues des point f , f' correspond un point tel que ω ; il est facile de voir que tous ces points sont en ligne droite. Le centre de courbure cherché est donc l'intersection de ao et de cette droite. Pour construire celle-ci, nous allons chercher deux de ses points: si les parallèles menées des points f , f' sont perpendiculaires à ao , on obtient un point v de cette droite en prolongeant jusqu'à leur rencontre les lignes rf , $r'f'$; si les parallèles menées des points f , f' se confondent en une seule droite ff' , on obtient le point u comme l'indique la figure et la ligne uv coupe la normale ao au centre de courbure cherché.

Dans le cas particulier où l'on considère une conique, le point ω est sur la normale ao ; donc c'est le centre de courbure de la conique. Telle est la construction que nous nous étions proposé de retrouver.

Application au problème de la caustique par réfraction. La ligne A , (fig. 2), est telle que pour un point quelconque a , on a $\frac{ab}{ac} = \text{constante}$; mais $ab = al \sin. bla$
 $= al \sin. bar$, $ac = al \sin. cla = al \sin. car$, donc $\frac{\sin. bar}{\sin. car} = \frac{ab}{ac} = \text{const.}$ D'après cela, si fa est la direction d'un rayon lumineux, A la ligne séparatrice des milieux, af enveloppe une caustique par réfraction dont C est la caustique secondaire.

En employant l'une quelconque des constructions précédentes, il est facile de déterminer le point f' où le rayon réfracté af' touche son enveloppe.

Nous allons chercher maintenant la formule qui lie entre elles les longueurs af , af' , ao et les lignes trigonométriques des angles d'incidence et de réfraction. Pour cela nous ferons usage du théorème suivant:

Etant donnés un angle dont le sommet est m et un point quelconque o dans son plan, on a , en observant la règle des signes, quelle que soit la direction d'une droite passant par ce point et coupant les côtés de l'angle aux points c et d .

$$\left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc} \right) \frac{1}{\sin. dom} = \text{constante.}$$

(*Tansf. des prop. métriques des figures.* Page 3).

Employons les lignes de la construction (3): soient g le point où fn coupe al' , i l'angle d'incidence et i' l'angle de réfraction; l'on a dans l'angle rfn coupé par les transversales ro , al' :

$$\left(\frac{1}{ao} - \frac{1}{ar} \right) \frac{1}{\sin. i} = \left(\frac{1}{ag} - \frac{1}{al'} \right) \frac{1}{\sin. l'af \text{ ou } \cos. i'}$$

l'angle $l'nf$ coupé par les mêmes transversales donne :

(*) Ce point n'est pas sur la figure.

$$\left(\frac{1}{ao} - \frac{1}{ar'}\right) \frac{1}{\sin.i'} = \left(\frac{1}{ag} - \frac{1}{al'}\right) \frac{1}{\cos.i'},$$

Divisant membre à membre ces deux égalités et remplaçant ar et ar' par leurs valeurs $\frac{as}{\cos.i}$, $\frac{as'}{\cos.i'}$, on a la relation cherchée.

Autrement. Employons les lignes de la *construction* (2) : Soit h le point où ss' coupe al' , l'on a dans l'angle rso coupé par les transversales ar , al :

$$\left(\frac{1}{ao} - \frac{1}{ar}\right) \frac{1}{\sin.i} = \frac{1}{ah \cos.i},$$

dans l'angle $r's'o$ coupé par les mêmes transversales, on a :

$$\left(\frac{1}{ao} - \frac{1}{ar'}\right) \frac{1}{\sin.i'} = \frac{1}{ah \cos.i'},$$

en divisant membre à membre ces deux égalités, on en déduit la relation cherchée.

Remarque. Les constructions (1), (2), (3) ont été déduites de la première construction de L; on peut y arriver en partant de la deuxième construction de cette droite.

Chatellerault Août 1858.