ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 347.

Ueber den Einfluß der Strahlenbrechung auf Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen.

Ein Nachtrag zu der in Nr. 339–342 abgedruckten Abhandlung.

Von Herrn Professor und Ritter *Hansen*,

Director der Sternwarte in Seeberg.

In der Theorie der Verfinsterungen hat man nie die Einwirkung der Strahlenbrechung entwickelt. Man hat entweder gradezu gesagt, daß diese keine Wirkung auf die Verfinsterungen äußere, oder man hat dieses wenigstens stillschweigend angenommen. Dieses ist aber nicht richtig, denn die Strahlenbrechung ist nicht ohne Einfluß auf die Zeit, Dauer und die Oerter des Anfanges oder Endes einer Verfinsterung oder Sternbedeckung, wenn gleich in den mehrsten Fällen diese Wirkung unbedeutend ist. In den folgenden Zeilen, die ich als einen Nachtrag zu meiner in Nr. 339–342 abgedruckten Abhandlung anzusehen bitte, werde ich das Wesentlichste dieser Einwirkung auseinander setzen.

Denken wir uns zuerst den Anfang oder das Ende einer Verfinsterung oder Sternbedeckung von der Erde aus gesehen. Im Augenblicke der Berührung haben der Stern und der bezügliche Punkt des Mondrandes oder dieser und der bezügliche Punkt des Sonnenrandes gleiche scheinbare Zenithdistanz, und die Strahlenbrechung der beiden sich berührenden Punkte ist dieselbe, weil in unsern Tafeln und Formeln die Strahlenbrechung nur von der scheinbaren Zenithdistanz und keinesweges von der Entfernung des Himmelskörpers abhängt. Hiemit scheint es also, als ob die Strahlenbrechung gar keine Wirkung auf eine Sonnenfinsternis oder Sternbedeckung äußere. Nehmen wir aber unsern Standpunkt im Raume, und betrachten den Schattenkegel. Denken wir zuerst die Atmosphäre der Erde hinweg, so geben die Formeln der genannten Abhandlung genau die Durchschnittspunkte des Schattenkegels und der Erdoberfläche, denken wir uns aber hierauf die Atmosphäre hinzu, so wird dadurch bewirkt, daß die Lichtstrahlen, welche die Oberfläche des Strahlenkegels bilden, bei ihrem Durchgange durch die Atmosphäre gekrümmt, oder mit andern Worten, von der graden Linie abgelenkt werden. Die durch die Durchschnittspunkte des Schattenkegels und der Erdoberfläche gebildete Curve, wird also in der That, wegen des Vorhandenseyns der Atmosphäre, andere Punkte der Erdoberfläche treffen, als die, welche in der genannten Abhandlung, wo die Strahlenbrechung nicht berücksichtigt wurde, bestimmt wurden. Die Strahlen-

brechung ist also nicht ohne Einfluß auf Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen.

Diese Ansicht steht mit der zuerst gegebenen, wo der Standpunkt des Beobachters sich auf der Erde gedacht wurde, im Widerspruch, indem durch diese abgeleitet wurde, daß die Strahlenbrechung keine Wirkung auf diese Erscheinungen äußere. Gehen wir der Sache aber näher auf den Grund, so zeigt sich, daß beide Ansichten mit einander übereinstimmen, und daß der Widerspruch nur scheinbar ist, indem in der That die Strahlenbrechung nicht nur von der scheinbaren Zenithdistanz, sondern auch von der Entfernung des Himmelskörpers abhängt. Sie ist strenge genommen nicht einerlei für den Mondrand und den Stern oder den Sonnenrand, wenn diese auch scheinbar mit einander in Berührung sind. Um dies zu zeigen erinnere ich daran, daß die durch unsere Formeln und Tafeln berechnete Strahlenbrechung der Winkel ist, den die Tangenten der beiden Endpunkte der Curve, welche der Lichtstrahl beschreibt, indem er die Atmosphäre durchläuft, mit einander machen. Dieser Winkel wird bei der Herleitung der Strahlenbrechung aus den allgemeinen Gleichungen der Bewegung in Function des Winkels, welchen die an der Oberfläche der Erde befindliche Tangente der Curve des Lichtstrahls mit der durch diesen Punkt gehenden Verticale macht, also in Function der scheinbaren Zenithdistanz ausgedrückt. Da aber die Verlängerung der Tangente an dem andern Endpunkte der Curve des Lichtstrahls diese Verticale nicht an der Oberfläche der Erde, (im Auge des Beobachters,) sondern in einer gewissen Höhe über derselben trifft, so ist nur in dem Falle, wo die Entfernung des Himmelskörpers unendlich groß ist, die durch die Strahlenbrechung verbesserte scheinbare Zenithdistanz die wahre Zenithdistanz. In allen Fällen, wo die Entfernung des Himmelskörpers endlich ist, ist die wahre Zenithdistanz kleiner, als die durch unsere Strahlenbrechung verbesserte scheinbare Zenithdistanz. Es ist mir nicht bekannt, daß je die Größe dieser von der Entfernung des Himmelskörpers abhängigen Correction der Strahlenbrechung entwickelt worden wäre; es wird in der *Mec. cél.* und in andern diesen Gegenstand behandelnden

Schriften nur gesagt, dafs sie sehr klein und selbst für den Mond unmerklich sey, es ist indess ein Leichtes, sie aus der in der Mec. cél. befindlichen Theorie der Strahlenbrechung zu entwickeln.

Ich entnehme aus diesem Werke (Tom. IV. pag. 244) die Gleichung

$$(1) \dots \dots \dots \frac{c}{a} = n \sqrt{\left(1 + \frac{4K}{n^2}(\rho)\right)} \cdot \sin \Theta$$

wo Θ die scheinbare Zenithdistanz, n die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raume, $n \sqrt{\left(1 + \frac{4K}{n^2}(\rho)\right)}$ die Geschwindigkeit desselben an der Oberfläche der Erde, a der Halbmesser der Erde und c eine Constante ist. Um c zu bestimmen dient die Gleichung

$$(2) \dots \dots \dots r^2 d\nu = c dt$$

wo t die Zeit, r der vom Mittelpunkt der Erde an den in irgend einem Punkte seiner Bahn befindlichen Lichtstrahl gezogene Radius und ν der Winkel ist, den dieser Radius zur Zeit t mit dem Vertical am Orte des Beobachters, oder mit dem durch diesen Ort gelegten Radius der Erde, welche als kugelförmig angesehen wird, macht.

Um die Bedeutung von c zu finden betrachte ich den Lichtstrahl bei seinem Eintritte in die Atmosphäre. In diesem Punkte ist $r = a'$, wenn a' den Halbmesser der Erde vermehrt um die Höhe der Atmosphäre bedeutet, und es durchläuft in dem Zeittheilchen dt der Lichtstrahl den Weg $n dt$. Nennen wir nun φ den Winkel, den der Lichtstrahl in diesem Augenblicke mit dem Radius r oder a' macht, so ist dessen senkrecht auf r zerlegte Bewegung während des Zeittheilchens dt und während dessen Eintritts in die Atmosphäre $= n dt \sin \varphi$, andertheils ist aber dieselbe Bewegung $= r d\nu$. Wir haben daher, wenn wir diese Werthe von r und $r d\nu$ in die Gleichung (2) substituiren

$$c = a' n \sin \varphi$$

und da r senkrecht auf der Oberfläche der Atmosphäre steht, so ist φ der Einfallswinkel des Lichtstrahls an der obern Grenze derselben. Substituiren wir nun diesen Werth von c in die Gleichung (1), so ergibt sich

$$(3) \dots \dots \dots \frac{a'}{a} \sin \varphi = \sqrt{\left(1 + \frac{4K}{n^2}(\rho)\right)} \cdot \sin \Theta$$

Betrachten wir jetzt das Dreieck zwischen dem Mittelpunkt der Erde dem Punkte des Eintritts des Lichtstrahls in die Atmosphäre und dem Punkte, in welchem die verlängerte Tangente am Eintrittspunkte den verlängerten Vertical des Beobachters schneidet. In diesem Dreieck ist die eine Seite a' und die andere $a + x$, wenn x die Höhe über der Erdoberfläche bedeutet, in welcher jene Tangente die verlängerte Verticale des Beobachters

schneidet. Es sind ferner in diesem Dreieck die den obigen Seiten resp. gegenüber liegenden Winkel $180^\circ - (\Theta + \theta)$ und φ , wo θ die zur scheinbaren Zenithdistanz Θ gehörige aus den Tafeln zu entnehmende Strahlenbrechung bezeichnet. Wir haben daher

$$a + x = \frac{\sin \varphi}{\sin(\Theta + \theta)} a'$$

und hieraus, wenn wir den Werth von $a' \sin \varphi$ aus (3) substituiren,

$$1 + \frac{x}{a} = \frac{\sin \Theta}{\sin(\Theta + \theta)} \sqrt{\left(1 + \frac{4K}{n^2}(\rho)\right)}$$

lösen wir diese Gleichung in eine unendliche Reihe auf, und bleiben bei der ersten Potenz der Gröfse $\frac{4K}{n^2}(\rho)$, und bei der zweiten von θ stehen, so ergibt sich

$$\frac{x}{a} = \frac{2K}{n^2}(\rho) - \theta \cotg \Theta + \theta^2 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2 \sin^2 \Theta}$$

oder

$$\frac{x}{a} = \frac{2K}{n^2}(\rho) - k + \frac{1}{2} k^2 (1 + \sec^2 \Theta)$$

wo k die sogenannte Constante der Strahlenbrechung oder $\theta = k \tg \Theta$ ist. Die erste dieser Formeln dient für die dem Horizont am nächsten befindlichen 5 Höhengraden, die zweite für den übrigen Theil des Himmels, und man kann hier unbedenklich k^2 übergehen.

Wenn aber in der Höhe x über der Oberfläche der Erde die Zenithdistanz eines Gestirns, dessen Horizontalparallaxe π ist, z genannt wird, so ist dessen Zenithdistanz an der Oberfläche der Erde sehr nahe =

$$z = \frac{x}{a} \sin \pi \sin z$$

wir haben daher in unserem Falle, wo $z = \Theta + \theta$, und wo wegen der Kleinheit der ganzen Correction im zweiten Gliede unbedenklich Θ für z gesetzt werden darf, die wahre an der Oberfläche der Erde statt findende Zenithdistanz irgend eines Himmelskörpers

$$\Theta + \theta = \left\{ \frac{2K}{n^2}(\rho) - \theta \cotg \Theta + \theta^2 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2 \sin^2 \Theta} \right\} \sin \pi \sin \Theta$$

oder

$$\Theta + \theta = \left\{ \frac{2K}{n^2}(\rho) - k + \frac{1}{2} k^2 (1 + \sec^2 \Theta) \right\} \sin \pi \sin \Theta$$

Das zweite Glied θ dieses Ausdrucks der wahren Zenithdistanz hat keine Wirkung auf Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen, weil es für beide Gestirne einerlei ist, dahingegen sind aber die folgenden Glieder, weil sie für beide Gestirne verschieden sind, nicht ohne Einfluss. Um die Gröfse dieses Einflusses zu ermitteln, werde ich den numerischen Werth dieser Glieder für den Mond, für welchen sie auf jeden

Fall am merklichsten werden müssen, berechnen. Es ist (Mec. cél. Tom. IV. p. 246) für den Barometerstand von 0^m76 und für die Temperatur des schmelzenden Eises

$$\frac{2K}{n^2}(\rho) = 0,000294047$$

und die Horizontalparallaxe des Mondes im Mittel = 57' 3"; hiemit und mit der *Besselschen* Strahlenbrechung findet sich

Wenn die scheinbare Zenithdistanz des Mondes oder $\odot$	= 90°	die wahre Zenithdistanz desselben	= $\odot + \theta - 1'226$
	89		— 0,651
	88		— 0,389
	87		— 0,253
	86		— 0,176
	85		— 0,127
	80		— 0,042
	70		— 0,014
	60		— 0,007
	50		— 0,003
	40		— 0,002
	30		— 0,002
	20		— 0,001
	10		— 0,001
	0		0

Für jedes andere Gestirn findet man hieraus die betreffende Correction, wenn man die obigen Größen mit dem Verhältniß der Horizontalparallaxe dieses Gestirns zur Horizontalparallaxe des Mondes multiplicirt. Für die Sonne muß man also die obigen Zahlen mit $\frac{1}{400}$ multipliciren, woraus sogleich sichtbar ist, daß für diese die Correction völlig unmerklich ist.

Denken wir uns nun durch die Formeln der Anfangs angezogenen Abhandlung die Zeit berechnet, in welcher bei Anfang oder Ende einer Sonnenfinsterniß die Ränder der Sonne und des Mondes, oder bei einer Sternbedeckung der Stern und der Mondrand mit einander in Berührung seyn müßten, und denken wir uns ferner die Gestirne in Einem Vertical über einander stehend, so sind in der That die Ränder der beiden Gestirne nach Maafsgabe der Zenithdistanz um die oben berechneten Größen von einander entfernt. Ist nun zugleich die relative Bewegung derselben grade auf ihre Mittelpunkte gerichtet, so wird der Ein- oder Austritt um so viel früher oder später erfolgen, als sie brauchen, um die oben angegebenen Secunden zu durchlaufen. Die stündliche relative Bewegung der Sonne und des Mondes ist im Mittel = 30' 29" und folglich sind in diesem Falle die Correctionen des Anfangs und Endes einer Sonnenfinsterniß die folgenden:

Bei 90° Zenithdistanz	Correction = 2'42
89	1,28
88	0,77
87	0,50
86	0,34
85	0,25
80	0,08
70	0,03
etc.	etc.

Wenn, während die übrigen Umstände dieselben sind wie vorher, die relative Bewegung nicht vertical ist, so vergrößern sich die vorstehenden Correctionen der Ein- und Austrittszeiten im Verhältnisse der Secante des Winkels, den die relative Bewegung mit dem Verticalkreise macht. Ist z. B. dieser Winkel 60°, so sind die Correctionen doppelt so groß, aber es entspricht diesen Umständen eine Verfinsternung von nur $\frac{3}{12}$ der Sonnenscheibe. Bei größerer Neigung der relativen Bewegung wird die Correction natürlich noch größer, aber es ist zugleich die Verfinsternung noch kleiner, und deshalb an sich von minder großem Werthe. Z. B. damit die Correction bei 85° Zenithdistanz Eine Secunde betrage muß der Winkel der relativen Bewegung mit dem Vertical 75° 30' betragen, und das Maximum der Verfinsternung beträgt in diesem Falle nur $\frac{0,7}{12}$ der Sonnenscheibe; bei 80° Zenithdistanz wäre in diesem Falle die Correction nur 0'3 und folglich bei kleineren Zenithdistanzen noch kleiner.

Wir haben hiemit das eine Extrem, nemlich wenn beide Gestirne in Einem Vertical stehen, betrachtet, nehmen wir nun das andere Extrem, nemlich den Fall, wo sie gleiche Zenithdistanzen haben, vor. Da die obige Einwirkung der Strahlenbrechung, so wie diese selbst, in der Richtung des Verticals sich äußert, so ist von selbst klar, daß in dem jetzigen Falle die Entfernung der Ränder, und also auch die von der Strahlenbrechung erzeugte Correction der Ein- und Austrittszeiten nur eine Größe der dritten Ordnung in Bezug auf die oben angeführten numerischen Größen seyn kann, und daher selbst im Horizonte unmerklich ist. Wir haben also oben das Maximum der Einwirkung der Strahlenbrechung auf Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen betrachtet, und können daher allgemein schließen, daß obgleich in den meisten Fällen (nemlich wenn die Höhe der Gestirne nicht unbeträchtlich ist) diese Einwirkung unbeträchtlich, und zu vernachlässigen ist, doch Fälle vorkommen können, (nemlich wenn die Höhe der Gestirne oder das Maximum der Verfinsternung klein ist) wo sie nicht vernachlässigt werden darf; wir wollen daher zur genauen Berechnung dieser Einwirkung übergehen.

Diese läßt sich sehr einfach dadurch bewerkstelligen, daß man statt des Punktes der Oberfläche der Erde, wo der Beobachter sich befindet, in den Formeln der genannten Abhandlung den Punkt der Vertical des Beobachtungsortes anwendet, in welchem diese von der Tangente der äußeren Extremität der Lichtcurve geschnitten wird. Es folgt nemlich aus dem Vorhergehenden, daß der Lichtstrahl, welcher, wenn die Atmosphäre nicht da wäre, in diesen Punkt gelangen würde, in der That vermöge der brechenden Kraft der Atmosphäre in das Auge des Beobachters gelangt. Wir müssen also die Lage dieses Punktes in Beziehung auf das Erdellipsoid be-