RICERCHE SUI FASCI DI QUADRICHE IN UNO SPAZIO AD n DIMENSIONI.

Memoria di **Luigi Brusotti** (Sondrio).

Adunanza del 10 febbrajo 1907.

Il Prof. SEGRE, dedicando la seconda parte di una sua classica memoria *) allo studio dei fasci di quadriche in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, ne ha dimostrate le principali proprietà proiettive e ne ha stabilita una classificazione in tipi fondata sul fecondo concetto di divisore elementare già introdotto dal WEIERSTRASS **). Il caso dei fasci di quadriche specializzate, esplicitamente escluso dalla precedente ricerca, è oggetto di un altro lavoro dello stesso Prof. SEGRE in relazione con alcuni sviluppi algebrici del KRONECKER ***). A queste pubblicazioni si connette una nota del Prof. BERTINI svolta con metodo geometrico †). Infine il sig. MEDICI in un recente lavoro torna incidentalmente sull'argomento, ed una esposizione sistematica di questo si trova nel recentissimo trattato del Prof. BERTINI ††).

La lettura di una breve Nota del Prof. GUNDELFINGER sulle quadriche di un fascio conjugate in doppio modo †††) mi ha indotto a pensare che la teoria potesse trovare ulteriore sviluppo in un confronto metodico fra la geometria del fascio come forma dello spazio ambiente e la geometria del fascio come ente razionale ∞^1 . In tale indirizzo (già seguito in modo elementare per il piano e lo spazio ordinario dai migliori trattati) e coi metodi del calcolo simbolico si svolge il presente lavoro.

*) SEGRE, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* [Mem. R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, vol. XXXVI (1884), pp. 3-86].

**) WEIERSTRASS, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* [Monatsber. der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1868), pag. 310].

***) SEGRE, *Ricerche sui fasci di coniche quadriche in uno spazio lineare qualunque* [Atti R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIX (1884), pp. 878-897]; KRONECKER, *Bemerkungen* [Monatsber. der k. Akademie der Wiss. zu Berlin (1868), pag. 339]; *Ueber Schaaren von quadratischen Formen* (Monatsber. (1874), pag. 59].

†) BERTINI, *Sui fasci di quadriche in uno spazio ad n dimensioni* [Rend. R. Accademia dei Lincei, serie IV, vol. II (1886), pp. 208-211].

††) MEDICI, *Sulle omografie e correlazioni non singolari in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* [Giorn. di Mat., XLIV (1906), pp. 189-239], Cfr. § 9, n° 51; BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazii* (Pisa, Enrico Spoerri, 1907), Cfr. Cap. 7.

†††) Arkiv der Math. und Phys. (Leipzig), Bd. III (1902), pp. 75-76.

Il § 1 contiene alcuni sviluppi preliminari (in parte sostanzialmente noti), tra i quali ricordo il significato geometrico dato al n° 3 per l'annullarsi dell'invariante $(a' a'' \dots a^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2$ di due quadriche $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ dello spazio S_n ad n dimensioni. Nel § 2, introdotti il fascio $[f]$ e il discriminante α_λ^{n+1} della sua quadrica f_λ di parametro $\lambda_1: \lambda_2$, è assegnato il significato della forma polare $\alpha_\mu \alpha_\nu \dots \alpha_\rho$ e ne sono dedotte alcune notevoli conseguenze (n° 6 e 9); inoltre (n° 10) vengono definiti e studiati i *combinanti binari elementari* di $[f]$: α_λ^{n+1} , β_λ^n , $\dots$, θ_λ^k , $\dots$, τ_λ^2 , ω_λ , dei quali il primo è il discriminante, mentre quello generico θ_λ^k contiene le coordinate iperplanari di spazio S_{k-1} e col suo annullarsi dà la condizione perchè S_{k-1} tocchi f_λ . Il § 3 tratta del sistema lineare $(\Phi \beta)^n = 0$ di involuppi di seconda classe e specialmente della riduzione prodotta sulla sua dimensione n dalla presenza in $[f]$ di quadriche più volte specializzate (n° 11 e 12), come pure di alcuni sistemi ad esso subordinati (n° 13 e 14), tra i quali noto una schiera che dico *associata* al fascio. Il § 4 estende alcuni dei risultati del precedente al sistema di complessi quadratici $(\Pi \theta)^k = 0$. Al § 5 le principali questioni svolte nel § 3 vengono riprese nell'ipotesi che esista (almeno) una piramide di $n + 1$ vertici polare rispetto a tutte le quadriche di $[f]$. Infine il § 6 è dedicato ai fasci pei quali il gruppo dei cono è mutato in sè da un'omografia binaria ciclica d'indice $n + 1$.

In una prossima pubblicazione mi occuperò del caso $n = 3$, in particolare.

§ 1. Preliminari.

1. In uno spazio S_n lineare ad n dimensioni siano $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ le coordinate projective omogenee di un punto e sia:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n+1} x_{n+1})^2 = a_x^2 = a_x'^2 = a_x''^2 = \dots = 0$$

l'equazione simbolica di una quadrica f . Condizione necessaria e sufficiente perchè f abbia un punto doppio [sia *specializzata* *)] è la coesistenza delle $n + 1$ equazioni:

$$(1) \quad a_y a_x = 0, \quad a_{y'} a_x = 0, \quad \dots, \quad a_{y^{(n+1)}} a_x = 0,$$

dove le $y_i^{(h)}$ ($h = 1, 2, \dots, n + 1$) sono le coordinate di $n + 1$ punti linearmente indipendenti. Eliminando, alle (1) sostituisco:

$$(2) \quad (a' a'' \dots a^{(n+1)}) a_y' a_y'' \dots a_y^{(n+1)} = 0,$$

che, colla permutazione dei simboli, prende la forma

$$(3) \quad (a' a'' \dots a^{(n+1)})^2 (y' y'' \dots y^{(n+1)}) = 0.$$

Il secondo fattore, per l'indipendenza degli $n + 1$ punti, è $\neq 0$, onde la (3) è equivalente a:

$$(4) \quad (a' a'' \dots a^{(n+1)})^2 = 0.$$

Cioè: *L'annullarsi di $(a' a'' \dots a^{(n+1)})^2$ (discriminante) è condizione necessaria e sufficiente perchè f sia specializzata.*

*) Denominazione di SEGRE, *Studio sulle quadriche*, etc., Parte I; § 1; n° 15 e seg.

Un S_p (di S_n) sia individuato da $p+1$ punti di coordinate $y_i^{(h)}$ ($h=1, 2, \dots, p+1$) o come intersezione di $n-p$ iperpiani di coordinate $u_i^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, n-p$). È sempre possibile assegnare $n-p$ punti, linearmente indipendenti insieme coi $p+1$ già presi, di coordinate $\chi_i^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, n-p$) in modo che il punto di coordinate $\chi_i^{(k)}$ giaccia su tutti gli iperpiani scelti escluso quello di coordinate $u_i^{(k)}$. Si ha così:

$$(5) \quad \begin{cases} u_{y^{(h)}}^{(k)} = 0 \\ u_{\chi^{(l)}}^{(k)} = 0 \\ u_{\chi^{(k)}}^{(k)} \neq 0 \end{cases} \quad (k \neq l).$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè S_p tocchi f è la coesistenza delle:

$a_y, a_x = 0, \quad a_y, a_x = 0, \dots, a_{y^{(p+1)}} a_x = 0; \quad u'_x = 0, \quad u''_x = 0, \dots, u_x^{(n-p)} = 0,$
alle quali, eliminando, sostituisco:

$$(a' a'' \dots a^{(p+1)} u' u'' \dots u^{(n-p)}) a'_y, a''_y, \dots a_y^{(p+1)} = 0$$

od anche [cfr. le (5)]:

$$(6) \quad (a' a'' \dots a^{(p+1)} u' u'' \dots u^{(n-p)}) a'_y, a''_y, \dots a_y^{(p+1)} u'_\chi, u''_\chi, \dots u_{\chi^{(n-p)}}^{(n-p)} = 0.$$

In (6) posso permutare in tutti i modi possibili i simboli equivalenti $a' a'' \dots a^{(p+1)}$ e sommare; ma posso anche più in generale operare in tale maniera su tutte le lettere a, u , essendo nulli, per le (5), i termini provenienti da permutazioni che producano scambio di due lettere u o di una lettera a con una lettera u . Alla (6) sostituisco quindi:

$$(a' a'' \dots a^{(p+1)} u' u'' \dots u^{(n-p)})^2 (y' y'' \dots y^{(p+1)} \chi' \chi'' \dots \chi^{(n-p)}) = 0$$

e, per l'indipendenza dei punti considerati, più semplicemente:

$$(7) \quad (a' a'' \dots a^{(p+1)} u' u'' \dots u^{(n-p)})^2 = 0.$$

Segue:

L'annullarsi di $(a' a'' \dots a^{(p+1)} u' u'' \dots u^{(n-p)})^2$ è condizione necessaria e sufficiente perchè l' S_p intersezione degli iperpiani di coordinate $u_i^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, n-p$) tocchi f . Il suo annullarsi identico (rispetto alle u) è condizione necessaria e sufficiente perchè f contenga un S_{n-p} di punti doppi (sia $n-p+1$ volte specializzata).

La (7) si può considerare come un'equazione nelle coordinate iperplanari di un S_p e quindi, quando non sia identica, rappresenta il complesso (quadratico) degli S_p tangenti ad f .

2. Date due quadriche f e g , rispettivamente di equazioni:

$$\begin{aligned} a_x^2 &= a_x'^2 = a_x''^2 = \dots = 0 \\ b_x^2 &= b_x'^2 = b_x''^2 = \dots = 0 \end{aligned}$$

si consideri il loro invariante simultaneo:

$$[k, n-k+1] = (a' a'' \dots a^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2$$

per $k=0, 1, 2, \dots, n, n+1$.

Per $k=0$ ($k=n+1$) esso (cfr. n° 1) coincide col discriminante di g (di f).

Per $k = 1$ ($k = n$), come ha dimostrato ROSANES *), l'annullarsi di tale invariante è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una piramide di $n + 1$ vertici, inscritta in f (in g) e polare rispetto a g (ad f); o anche per l'esistenza di una piramide di $n + 1$ vertici circoscritta a g (ad f) e polare rispetto ad f (a g). Lo stesso autore ha notato [l. c.] che, se esiste una di tali piramidi ne esistono $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Il Prof. SEGRE, prendendo occasione dal lavoro citato, ha dimostrato che l'annullarsi di $[k, n - k + 1]$ è condizione necessaria per l'esistenza di due piramidi di $n + 1$ vertici polari reciproche rispetto a g e di cui gli S_{k-1} corrispondenti siano coniugati rispetto ad f ; ha osservato che la condizione è pure sufficiente quando sia

$$n(n+1) \geq \binom{n+1}{k} - 1$$

ed ha posto il problema, tuttora insoluto, della sufficienza di tale condizione in generale **).

Nel numero seguente, abbandonando la via tracciata dai lavori qui ricordati, stabilisco un significato dell'annullarsi di $[k, n - k + 1]$, che si fonda sopra un altro concetto.

3. È noto che gli S_{k-1} secanti un dato S_{n-k} formano un complesso lineare (speciale); il complesso quadratico che si ottiene contando due volte tale complesso lineare sarà detto per brevità *complesso quadratico degenero avente per sostegno il dato S_{n-k}* . Ciò posto :

L'annullarsi di $[k, n - k + 1]$ è condizione necessaria e sufficiente perchè il complesso degli S_{k-1} tangenti ad f giaccia nel sistema lineare determinato dai complessi quadratici degeneri aventi per sostegni gli S_{n-k} tangenti a g .

α) La condizione è necessaria. Se infatti il complesso :

$$(a' a'' \dots a^{(k)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0$$

giace in tale sistema lineare, si ha identicamente

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a' a'' \dots a^{(k)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 \\ = \lambda (v' v'' \dots v^{(k)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 \\ + \mu (w' w'' \dots w^{(k)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 + \dots, \end{array} \right.$$

*) Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen [Math. Ann., vol. XXIII (1884), pp. 412-415]. Ometto la citazione dei numerosi e noti lavori che si riferiscono ai casi $n = 2$, $n = 3$.

**) SEGRE, Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques; estratto di lettera a ROSANES [Math. Ann., vol. XXIV (1884), pp. 152-156]. Dal teorema di SEGRE si deduce come corollario che in S_3 l'annullarsi di $[2, 2]$ è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un tetraedro polare rispetto ad una delle quadriche e cogli spigoli tangenti all'altra. Per questa proposizione vedi: LÜROTH, Ueber Polartetraeder und die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung [Zeitschrift f. Math. und Phys., Leipzig, vol. XIII (1868), pag. 404]; VOSS, Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades [Math. Ann., vol. X (1876), pp. 143-188]; VOGT, Sur les tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dont les arêtes sont tangentes à une autre quadrique [Ann. de l'Éc. norm., III^e série, t. XII (1895), pp. 363-389].

dove l' S_{n-k} intersezione degli iperpiani di coordinate $v_i^{(h)}$ ($h = 1, 2, \dots, k$), l' S_{n-k} intersezione di quelli di coordinate $w_i^{(h)}$ ($h = 1, 2, \dots, k$), ecc. sono tangenti a g , onde si ha:

$$\begin{aligned}(v' v'' \dots v^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 &= 0 \\ (w' w'' \dots w^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 &= 0 \\ \dots \dots \dots &\dots\end{aligned}$$

Segue che se in (8) alle serie di variabili contragredienti $u', u'', \dots u^{(n-k+1)}$ si sostituiscono le serie di simboli $b', b'', \dots b^{(n-k+1)}$ il secondo membro si annulla, ed è quindi, come si voleva:

$$(a' a'' \dots a^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 = 0.$$

β) La condizione è *sufficiente*. Sia infatti:

$$(a' a'' \dots a^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 = 0$$

e siano:

$$(9) \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \dots$$

relazioni lineari nei coefficienti dell'equazione generale di un complesso quadratico di spazi S_{k-1} , le quali bastino ed occorran per determinare il sistema lineare sopra indicato. Se nelle (9) pongo i coefficienti dell'equazione del complesso degenerare:

$$(10) \quad (v' v'' \dots v^{(k)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0,$$

esse divengono relazioni quadratiche nelle coordinate dell' S_{n-k} sostegno, relazioni necessariamente soddisfatte da quelle di *ogni* S_{n-k} tangente a g , per la definizione geometrica del sistema lineare. Ma gli S_{n-k} tangenti a g soddisfano alla sola condizione di giacere nel complesso quadratico $(u' u'' \dots u^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 = 0$ (anzi non sono sottoposti ad alcuna se g è almeno $k+1$ volte specializzata), onde si ha che, per la sostituzione indicata, $\Phi_m = 0$ si muta in:

$$(11) \quad \rho_m (v' v'' \dots v^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 + \varphi_m [v' v'' \dots v^{(k)}] = 0,$$

dove ρ_m è una costante e $\varphi_m [v' v'' \dots v^{(k)}]$ come funzione delle coordinate di S_{n-k} si annulla in forza delle relazioni identiche esistenti fra esse, mentre come funzione delle $v_i^{(h)}$ è *identicamente zero* ed è solo stata scritta per mantenere alla (11) il suo aspetto formale. Pongo ora nelle (9) i coefficienti dell'equazione del complesso:

$$(12) \quad (a' a'' \dots a^{(k)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0.$$

Per questo, poichè (12) si deduce da (10) sostituendo alle variabili $v^{(h)}$ i simboli $a^{(h)}$, basta porre in (11) invece delle $v^{(h)}$ le $a^{(h)}$, onde $\Phi_m = 0$ si trasforma in:

$$(13) \quad \rho_m (a' a'' \dots a^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 + \varphi_m [a' a'' \dots a^{(k)}] = 0.$$

Il primo termine di (13) è nullo per l'ipotesi, ed il secondo è nullo perchè ottenuto sostituendo i simboli alle variabili nell'espressione $\varphi_m [v' v'' \dots v^{(k)}]$ identicamente nulla. Si deduce quindi, come si voleva, che i coefficienti di (12) soddisfano alle (9)*).

*) Dal teorema ora dimostrato pare si possa dedurre che l'invariante $[k, n-k+1]$ trova specialmente il suo posto nella geometria degli S_{k-1} (e dei loro duali S_{n-k}) in S_n , osservazione questa che per l'invariante $[2, 2]$ di due quadriche in S_3 è già contenuta nel citato lavoro di Voss (v. pag. 170).

4. Nel seguito, dovendo considerare due quadriche f, g , per le quali si annulla l'invariante $[k, n - k + 1]$, dirò che f è k -armonica rispetto a g (e che g è $n - k + 1$ -armonica rispetto ad f). Se in particolare si annulla $[1, n]$, dirò che f e g sono *conjugate*, considerate rispettivamente come *luogo* e come *inviluppo*.

Ciò posto, stabilisco qui due semplici osservazioni in modo diretto, per quanto siano strettamente legate al teorema del n° 3; e cioè:

α) Una quadrica $n - k + 2$ volte specializzata è k -armonica rispetto ad ogni altra quadrica; e reciprocamente. Se infatti f è $n - k + 2$ volte specializzata, è identicamente:

$$(a' a'' \dots a^{(k)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0,$$

onde anche, qualunque sia b_x^2 :

$$(a' a'' \dots a^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 = 0.$$

Reciprocamente, qualunque sia b_x^2 , sussista la

$$(14) \quad (a' a'' \dots a^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 = 0$$

che si deduce dalla

$$(15) \quad (u' u'' \dots u^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 = 0$$

sostituendo le $a^{(h)}$ alle $u^{(h)}$. Se come $b_x^2 = 0$ si prende una quadrica k volte specializzata il cui S_{k-1} doppio è intersezione degli iperpiani di coordinate $v_i^{(h)}$ ($h=1, 2, \dots, n-k+1$) e si ricorda che gli S_{n-k} tangenti ad una quadrica k volte specializzata sono quelli e solo quelli che tagliano l' S_{k-1} doppio, nel caso particolare (15) si può scrivere nel seguente modo:

$$(u' u'' \dots u^{(k)} v' v'' \dots v^{(n-k+1)})^2 = 0$$

e quindi (14) nel seguente:

$$(a' a'' \dots a^{(k)} v' v'' \dots v^{(n-k+1)})^2 = 0,$$

il che, per l'arbitrarietà delle $v_i^{(h)}$, dimostra quanto si voleva.

γ) Una quadrica $n - k + 1$ volte specializzata è k -armonica rispetto alle quadriche tangenti l' S_{n-k} doppio e solo ad esse.

Per un'osservazione precedente l'equazione del complesso degli S_{k-1} tangenti alla quadrica $a_x^2 = 0$, $n - k + 1$ volte specializzata, può prendere le due forme:

$$(a' a'' \dots a^{(k)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0$$

$$(v' v'' \dots v^{(k)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0$$

quando si supponga l' S_{n-k} doppio intersezione degli iperpiani di coordinate $v_i^{(h)}$ ($h=1, 2, \dots, k$).

Qualche lettore potrà anche trovare una certa analogia fra il presente teorema e quello ben noto di ROSANES sulle forme binarie conjugate [v. *Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen*; Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. LXXV (1873), pp. 172-176], la cui estensione può dare una semplice interpretazione dell'annullarsi dell'invariante bilineare di una ipersuperficie (di ordine m) e di un inviluppo (di classe m) in S_n , come per S_3 ha stabilito REYE in un suo classico lavoro [v. *Ueber algebraische Flächen, die zu einander apolar sind*; Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. LXXIX (1875), pp. 159-175; e specialmente a pag. 165].

Segue che la condizione :

$$(a' a'' \dots a^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 = 0$$

può pure scriversi :

$$(v' v'' \dots v^{(k)} b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2 = 0,$$

il che dimostra il teorema.

5. Date k quadriche $c_x^2 = 0, d_x^2 = 0, \dots, s_x^2 = 0$, resta in generale determinato il complesso quadratico di spazii S_{k-1} di equazione :

$$(cd \dots s u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0.$$

Poichè più innanzi si incontreranno complessi di questo tipo, non è inopportuno osservare come il teorema del n° 3 sia in proposito suscettibile di una generalizzazione. Infatti nella dimostrazione di quel teorema non si fa uso dell'equivalenza dei simboli $a' a'' \dots a^{(k)}$, onde essa rimane valida anche quando a questi si sostituiscano quelli non equivalenti $c, d, \dots s$. Si giunge così al risultato :

L'annullarsi di $(cd \dots s b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2$ è condizione necessaria e sufficiente perchè il complesso $(cd \dots s u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0$ giaccia nel sistema lineare determinato dai complessi quadratici degeneri aventi per sostegni gli S_{n-k} tangenti a $b_x^2 = 0$.

Quando si annulli $(cd \dots s b' b'' \dots b^{(n-k+1)})^2$, dirò che il complesso $(cd \dots s u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0$ e la quadrica $b_x^2 = 0$ sono armonici.

Ciò posto, le osservazioni $\alpha), \beta)$ del n° 4 si estendono come segue :

$\alpha')$ Se una quadrica è $n - k + 2$ volte specializzata, è armonica ad ogni complesso di tipo $(u' u'' \dots u^{(k)} cd \dots r)^2 = 0$ e reciprocamente.

$\beta')$ Una quadrica $n - k + 1$ volte specializzata è armonica ai complessi di tipo $(u' u'' \dots u^{(k)} cd \dots r)^2 = 0$ contenenti l' S_{n-k} doppio e solo ad essi.

Chiudo questi preliminari osservando che nel seguito verrà pure considerato l'invariante :

$$(cd \dots t)^2$$

di $n + 1$ quadriche $c_x^2 = 0, d_x^2 = 0, \dots, t_x^2 = 0$, il quale sarà detto il loro *invariante $n + 1$ -lineare*.

§ 2. Il fascio di quadriche ed i suoi combinanti binari.

6. Due quadriche distinte :

$$b_x^2 = 0, c_x^2 = 0$$

determinano un fascio $[f]$, la cui quadrica generica f_λ è di equazione

$$(I) \quad \lambda_1 b_x^2 + \lambda_2 c_x^2 = 0.$$

La (I) sarà simbolicamente rappresentata con :

$$(a_{\lambda_1} x_1 + a_{\lambda_2} x_2 + \dots + a_{\lambda_{n+1}} x_{n+1})^2 = a_{\lambda x}^2 = a_{\lambda x}^{\prime 2} = a_{\lambda x}^{\prime \prime 2} = \dots = 0.$$

Ogni formazione invariantiva di $a_{\lambda x}^2$, contenente eventualmente anche coordinate di spazii, è in generale una forma binaria in (λ) e da questo punto di vista sarà detta

quadriche sia coniugato a quello degli $n + 1$ con. Tali gruppi di quadriche formano dunque nel fascio una involuzione g_{n+1}'' .

Se si pone:

$$\delta_{\lambda}^{n+1} = (\mu \lambda)(\nu \lambda) \dots (\rho \lambda),$$

è pure:

$$(\alpha \delta)^{n+1} = \alpha_{\mu} \alpha_{\nu} \dots \alpha_{\rho}$$

onde il precedente teorema fornisce il significato dell'annullarsi della spinta $n + 1$ esima di α_{λ}^{n+1} su di una binaria δ_{λ}^{n+1} .

In particolare, quando si escluda il caso $\alpha_{\lambda}^{n+1} \equiv 0$, si ha:

L'annullarsi di $(\alpha \delta)^{n+1}$ è condizione necessaria e sufficiente perchè il gruppo dei con sia ad invariante $n + 1$ lineare nullo.

Quindi: L'invariante $n + 1$ lineare dei con di un fascio, per n pari, è sempre nullo.

Come caso particolare della (2) si deduce:

$$(3) \quad \alpha_{\mu}^k \alpha_{\lambda}^{n-k+1} = (a'_{\mu} a''_{\mu} \dots a_{\mu}^{(k)} a'_{\lambda} a''_{\lambda} \dots a_{\lambda}^{(n-k+1)})^2;$$

onde: ogni quadrica f_{μ} , in generale, è k -armonica ad $n - k + 1$ quadriche di $[f]$, che nel campo binario del fascio costituiscono il gruppo k -esimo polare di f_{μ} rispetto a quello dei con. Per $k = 1$: ogni quadrica f_{μ} , in generale, è coniugata come luogo ad n quadriche di $[f]$, costituenti il primo gruppo polare di f_{μ} rispetto al gruppo dei con. Per $k = n$: ogni quadrica f_{μ} , in generale, è coniugata come involuppo ad una sola quadrica di $[f]$, quella costituente il gruppo n -esimo polare di f_{μ} rispetto al gruppo dei con.

Il caso $\alpha_{\lambda}^{n+1} \equiv 0$ conduce però al seguente enunciato: In un fascio di quadriche tutte specializzate ogni quadrica è k -armonica alle rimanenti.

Se ne deduce, per l'Oss. β) del n° 4, che in tal fascio lo spazio doppio di una delle quadriche tocca le rimanenti, ed in particolare il vertice di un cono ordinario giace nella quartica base (quindi ne è punto doppio *).

Così il caso $\alpha_{\lambda}^{n+1} \not\equiv 0$, $\alpha_{\mu}^k \alpha_{\lambda}^{n-k+1} \equiv 0$ [ident. rispetto (λ)] conduce al teorema: Condizione necessaria e sufficiente perchè una quadrica di un fascio $[f]$ sia k -armonica a tutte le rimanenti di $[f]$ è che essa conti $n - k + 2$ volte nel gruppo dei con. Tenuta presente l'Oss. α) di 4, si ha pure: Una quadrica $n - k + 2$ volte specializzata di $[f]$ conta almeno $n - k + 2$ volte nel gruppo dei con (**). Tenuta presente invece la già citata β) di 4, si ha: Se una quadrica $n - k + 1$ volte specializzata conta $n - k + 2$ volte nel gruppo dei con, l' S_{n-k} doppio di essa tocca ogni quadrica del fascio; e reciprocamente. In particolare: Se un cono ordinario conta due volte nel gruppo dei con, il suo vertice giace sulla quartica base (ne è un punto doppio); e reciprocamente.

Se il discriminante della forma binaria α_{λ}^{n+1} è nullo, o la quadrica corrispondente alla radice doppia è un cono ordinario ed allora, per ciò che precede, la quartica base

*) Per l'ultima affermazione cfr.: SEGRE, Ricerche sui fasci di con quadrici, etc. (cit.), n° 5, n° 10; BERTINI, Sui fasci di quadriche, etc. (cit.), n° 4.

**) Il che è pure conseguenza delle considerazioni svolte in: SEGRE, Studio sulle quadriche, etc. (cit.), Parte 2ª, § 3; n° 63.

possiede un punto doppio nel vertice; o tale quadrica è più volte specializzata ed allora la quartica base possiede i punti doppi risultanti dall'intersezione dello spazio doppio con una quadrica generica di $[f]$. Reciprocamente se la quartica base possiede un punto doppio, si verifica una delle precedenti condizioni geometriche e quindi il discriminante di α_λ^{n+1} è nullo. Dunque: *Condizione necessaria e sufficiente perchè la quartica base di $[f]$ possieda un punto doppio è che si annulli il discriminante di α_λ^{n+1} **.

8. Nel presente numero svolgo alcune considerazioni, le quali servono in molti casi a stabilire il significato di forme del campo binario nella geometria di S_n . Siano due forme $\varphi_\lambda^h, \psi_\lambda^h (h \leq n)$, ciascuna delle quali rappresenta col suo annullarsi un gruppo di h quadriche di $[f]$. Uno qualunque degli $\infty^{b(n-h)}$ spazii S_{h-1} tangenti a tutte le quadriche del gruppo $\varphi_\lambda^h = 0$ (per $h = n$ ne esistono 2^n) seca $[f]$ in un fascio $[f']$, pel quale si può assumere come discriminante φ_λ^h , quando si convenga di attribuire il parametro di ogni quadrica f_λ anche alla quadrica sezione f'_λ . Se ne deduce: *Se è $(\varphi\psi)^h = 0$ (cioè i gruppi $\varphi_\lambda^h = 0, \psi_\lambda^h = 0$ sono coniugati) ogni S_{h-1} tangente a tutte le quadriche di $\varphi_\lambda^h = 0$ [risp. di $\psi_\lambda^h = 0$] seca le quadriche di $\psi_\lambda^h = 0$ [risp. di $\varphi_\lambda^h = 0$] in h quadriche ad invariante h -lineare nullo. Reciprocamente: Se uno degli S_{h-1} tangenti a tutte le quadriche di $\varphi_\lambda^h = 0$ [risp. di $\psi_\lambda^h = 0$] seca le quadriche $\psi_\lambda^h = 0$ [risp. $\varphi_\lambda^h = 0$], in h quadriche ad invariante h -lineare nullo, i gruppi $\varphi_\lambda^h = 0, \psi_\lambda^h = 0$ sono coniugati. Onde si ricava pure: Dati due gruppi $\varphi_\lambda^h = 0, \psi_\lambda^h = 0$, se un S_{h-1} tangente a tutte le quadriche di $\varphi_\lambda^h = 0$ seca quelle di $\psi_\lambda^h = 0$ in h quadriche ad invariante h -lineare nullo, ogni altro S_{h-1} tangente a tutte le quadriche di $\varphi_\lambda^h = 0$ gode di questa proprietà, ed inoltre ogni S_{h-1} tangente a tutte quelle di $\psi_\lambda^h = 0$ seca le quadriche di $\varphi_\lambda^h = 0$ in h quadriche ad invariante h -lineare nullo.*

In particolare, come è ben noto: *Se due coppie di quadriche di $[f]$ si dividono armonicamente, ogni retta tangente alle quadriche dell'una seca quelle dell'altra in due coppie di punti che si separano armonicamente.* Ecc. ecc.

Se il gruppo $\varphi_\lambda^h = 0$ varia a descrivere un'involuzione $g_b^r (r < h)$ e si mantiene la condizione $(\varphi\psi)^h = 0$, il gruppo $\psi_\lambda^h = 0$ varia a descrivere l'involuzione coniugata g_b^{h-r-1} . Se un S_{h-1} tocca le quadriche di un gruppo della g_b^r , esso seca ogni gruppo della g_b^{h-r-1} in h quadriche ad invariante h -lineare nullo e reciprocamente. Di qui nasce una semplice generazione (per mezzo della g_b^1) della varietà degli S_{h-1} secanti tutti i gruppi di una g_b^{h-r-1} in gruppi ad invariante h -lineare nullo ed in particolare ($r = h-1$) del complesso degli S_{h-1} secanti un gruppo di h quadriche in un gruppo ad invariante h lineare nullo. Su tale complesso tornerò più innanzi (vedi n° 15); qui mi limito ad osservare che per $h = 2$ si ottiene il complesso delle rette secanti due quadriche in coppie di punti separantisi armonicamente come costituito dai sistemi di tangenti comuni alle coppie di quadriche del fascio appartenenti all'involuzione ordinaria i cui ele-

*) Da quest'ultima osservazione si escluda il caso $n = 1$; per esso il fascio si riduce ad un ordinaria involuzione e l'annullarsi del discriminante di α_λ^2 dà la condizione perchè l'involuzione sia parabolica (degenere).

menti doppi sono le quadriche date. Per $n = 3$ si ha così una nota generazione del complesso di BATTAGLINI.

Come caso particolare di quanto si è svolto in principio del presente numero si ha: Se è $\varphi_\mu^k \varphi_\nu^{h-k} = 0$, ogni S_{h-1} tangente alle h quadriche $\varphi_\lambda^h = 0$ seca f_μ ed f_ν in due quadriche di cui la prima è k -armonica alla seconda. Reciprocamente: Se un S_{h-1} tangente alle h quadriche $\varphi_\lambda^h = 0$ seca f_μ ed f_ν in due quadriche di cui la prima è k -armonica alla seconda è $\varphi_\mu^k \varphi_\nu^{h-k} = 0$. Segue che, se uno degli S_{h-1} tangenti alle quadriche $\varphi_\lambda^h = 0$ gode di tale proprietà, ne godono tutti gli altri.

Il significato ora stabilito per le forme polari permette di fissare anche quello di una qualunque spinta $(\varphi\psi)^m \varphi_\lambda^{h-m} \psi_\lambda^{l-m}$ di due forme $\varphi_\lambda^h, \psi_\lambda^l$ ($h \leq n, l \leq n$). Ed inverso si fissi una f_μ di $[f]$; esistono m quadriche di $[f]$ secate da ogni S_{h-1} tangente alle $\varphi_\lambda^h = 0$ in quadriche m -armoniche alla sezione di f_μ ed esse sono fornite dalla $\varphi_\mu^{h-m} \varphi_\lambda^m = 0$; ne esistono m secate da ogni S_{l-1} tangente alle $\psi_\lambda^l = 0$ in quadriche m -armoniche alla sezione di f_μ ed esse sono fornite dalla $\psi_\mu^{l-m} \psi_\lambda^m = 0$. Condizione necessaria e sufficiente perchè ogni S_{m-1} tangente alle prime m quadriche [risp. alle seconde] tagli le seconde [risp. le prime] in m quadriche ad invariante m -lineare nullo è appunto l'annullarsi di $(\varphi\psi)^m \varphi_\mu^{h-m} \psi_\mu^{l-m}$. Collo stesso metodo e più in generale si può anche stabilire il significato di ogni formazione di tipo $(\varphi\psi)^m \varphi_\mu^{h-m} \psi_\nu^{l-m}$. In particolare si può invece supporre che φ coincida con ψ e si ha così il significato delle spinte di una φ_λ^h ($h \leq n$) su sè stessa.

Per quanto si è trovato al n° 7, il procedimento può essere anche applicato alle spinte di α_λ^{n+1} su una φ_λ^h e su sè stessa. Così per es.: ogni quadrica f_μ ne determina in generale $2s$ che le sono $2s$ -armoniche; condizione necessaria e sufficiente perchè ogni S_{2s-1} tangente alle $2s$ quadriche le sechi in un gruppo di coni ad invariante $2s$ -lineare nullo è appunto l'annullarsi di $(\alpha\alpha')^{2s} \alpha_\mu^{n-2s+1} \alpha_\mu'^{n-2s+1}$. L'annullarsi dell'*Hessiano* in particolare dà la condizione perchè le due quadriche biarmoniche alla data coincidano.

Questa proprietà dell'*Hessiano* può essere completata come segue.

Se f_μ appartiene al gruppo *Hessiano* la forma $\alpha_\mu^{n-1} \alpha_\lambda^2$ in (λ) ha una radice doppia (ν) ed f_ν appartiene al gruppo *Steineriano*.

Si ha così non solo $\alpha_\mu^{n-1} \alpha_\nu^2 = 0$, ma $\alpha_\mu^{n-1} \alpha_\nu \alpha_\lambda \equiv 0$ [id. in (λ)], quindi in particolare $\alpha_\mu^n \alpha_\nu = 0$. Reciprocamente, dalle $\alpha_\mu^{n-1} \alpha_\nu^2 = 0$, $\alpha_\mu^n \alpha_\nu = 0$ si risale all'ipotesi. Onde si ha: Se di due quadriche distinte f_ν, f_μ la prima è insieme coniugata come luogo e biarmonica alla seconda, la prima appartiene al gruppo *Steineriano* del gruppo dei coni, mentre la seconda le corrisponde nel gruppo *Hessiano*; e reciprocamente. Non esistono nel fascio altre quadriche biarmoniche ad f_μ .

9. Come conseguenza di quanto si è svolto in 8 si può dedurre anche la seguente osservazione. Si ponga:

$$\varphi_\lambda^{n-k+1} = \alpha_\mu^k \alpha_\lambda^{n-k+1},$$

onde si ha:

$$\varphi_\mu^l \varphi_\rho^{n-k-l+1} = \alpha_\mu^{k+l} \alpha_\rho^{n-k-l+1}.$$

Colla precedente interpretazione: Se f_μ è $k + l$ -armonica ad f_ρ , ogni S_{n-k} tan-

$2m$, annesso invariantivamente ad f_λ o ad $[f]$ secondo che si tratti di covariante o di invariante binario; l'annullarsi identico di un covariante rappresenta in generale una varietà di spazii S_{k-1} annessa invariantivamente al fascio.

Se nella formazione invariantiva oltre alle α_λ^{n+1} , θ_λ^k si introduce anche una binaria φ_λ^b , l'invariantività della varietà rappresentata è relativa al gruppo di quadriche $\varphi_\lambda^b = 0$.

Le formazioni in cui oltre ad α_λ^{n+1} entri più di un combinante elementare condurrebbero alla considerazione di connessi e di corrispondenze.

Non è però vero reciprocamente che ogni varietà legata invariantivamente al fascio o ad un gruppo di quadriche del fascio sia sempre suscettibile di una rappresentazione del tipo ora considerato. Basti osservare che una forma invariantiva contenente i coefficienti di ω_λ rappresenta col suo annullarsi il luogo spezzantesi nelle quadriche del fascio appartenenti al gruppo rappresentato dall'annullarsi della stessa formazione in cui al simbolo ω si sia sostituita la variabile binaria corrente. Ora è ben nota l'esistenza di luoghi legati invariantivamente al fascio e non spezzantisi in quadriche di esso. È per altro evidente che i combinanti elementari e le loro formazioni invariantive occupano un posto notevole nella geometria del fascio di quadriche.

Dal teorema col quale si chiude il n° 7 e dal significato dei combinanti elementari si deducono gli enunciati:

Il discriminante di β_λ^ , considerata come forma binaria, rappresenta col suo annullarsi l'involuppo degli iperpiani tangenti alla quartica base.*

Il discriminante di θ_λ^k ($2 < k < n$), considerata come forma binaria, rappresenta col suo annullarsi il complesso degli S_{k-1} tangenti alla quartica base (cioè secanti la quartica base in una varietà dotata di punto doppio).

Il discriminante di τ_λ^2 , considerata come forma binaria, rappresenta col suo annullarsi il complesso delle rette secanti la quartica base.

Dallo stesso significato dei combinanti elementari si deduce che l'identico annullarsi, rispetto a (λ) , di θ_λ^k ($k > 2$) caratterizza gli S_{k-1} secanti il fascio in un fascio di quadriche tutte specializzate, cioè gli S_{k-1} tangenti a tutte le quadriche del fascio, e che l'identico annullarsi, rispetto a (λ) , di τ_λ^2 caratterizza le rette tangenti alla quartica base. Così l'identico annullarsi, rispetto a (λ) , di ω_λ caratterizza i punti della quartica base. Segue che ogni varietà rappresentata dall'annullarsi di una forma invariantiva di θ_λ^k contiene gli S_{k-1} tangenti a tutte le quadriche del fascio, che ogni varietà, in particolare, rappresentata dall'annullarsi di una forma invariantiva di τ_λ^2 contiene quella delle tangenti alla quartica base. Il risultato analogo per ω_λ è già compreso in una precedente osservazione.

Altra considerazione d'indole generale è la seguente: Se φ_λ^r è una forma binaria, il risultante di φ_λ^r e di θ_λ^k (di β_λ^* , di ω_λ) col suo annullarsi fornisce l'equazione complessiva delle quadriche del gruppo $\varphi_\lambda^r = 0$ considerate come complesso degli S_{k-1} tangenti (come involuppo di iperpiani, come luogo di punti).

Così: L'identico annullarsi rispetto alle variabili contragredienti del risultante di α_λ^{n+1} e del combinante θ_λ^k , senza la proprietà analoga per il combinante elementare suc-

cessivo, è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di (almeno) una quadrica di $[f]$ $n - k + 2$ volte specializzata, senza quella di quadriche specializzate più di $n - k + 2$ volte *). Ecc. ecc.

§ 3. Gli involuppi di seconda classe $(\Phi \beta)^n = 0$.

II. Da quanto si è veduto al n° 7 (od anche al n° 8) risulta ora in modo semplice: Gli iperpiani secanti n quadriche $f_\mu, f_\nu, \dots f_\rho$ di $[f]$ in n quadriche ad invariante n -lineare nullo costituiscono l'involuppo di 2ª classe di equazione:

$$(1) \quad \beta_\mu \beta_\nu \dots \beta_\rho = 0.$$

La (1) per il teorema del n° 6 si può scrivere anche così:

$$(2) \quad (a_\mu a_\nu \dots a_\rho u)^2 = 0.$$

La stessa (1), qualora si ponga:

$$(3) \quad \Phi_\lambda^n = (\mu \lambda)(\nu \lambda) \dots (\rho \lambda),$$

prende l'aspetto:

$$(4) \quad (\Phi \beta)^n = 0.$$

Se Φ_λ^n si considera come forma parametrica, risulta che l'involuppo (4) descrive un sistema lineare. Escluso il caso in cui ogni quadrica di $[f]$ sia almeno due volte specializzata, pel quale (4) è sempre indeterminato, quando per Φ_λ^n si prenda una forma generica, l'involuppo (4) è ben determinato, poichè è tale quando per Φ_λ^n si prenda la potenza n -esima di una forma lineare generica. Risulta dunque che (quando non si tenga conto degli involuppi eventualmente indeterminati) il sistema (4) è al più ∞^n .

Esso è effettivamente ∞^n quando il fascio non sia dotato di quadriche specializzate due o più volte. Infatti in tal caso n iperpiani generici determinano come rispettivi combinanti β_λ^n altrettante forme generiche, le quali individuano la forma Φ_λ^n ad esse coniugata e quindi l'involuppo $(\Phi \beta)^n = 0$. Se invece $[f]$ contiene r quadriche specializzate più di una volta, corrispondenti ai fattori lineari $q'_\lambda, q''_\lambda, \dots q_\lambda^{(r)}$ e se nel fascio sezione di $[f]$ con un S_{n-1} generico le loro sezioni contano rispettivamente $s_1, s_2, \dots s_r$ volte nel gruppo delle quadriche specializzate, il combinante β_λ^n di un iperpiano generico contiene come fattore:

$$\Psi = \Psi_\lambda^{\sum s_i} = q_\lambda^{s_1} q_\lambda^{s_2} \dots q_\lambda^{(r)s_r}.$$

Segue che β_λ^n , quando non sia indeterminato, varia in un sistema lineare $n - \sum s_i$ volte infinito. Assunti $n - \sum s_i$ iperpiani generici, questi determinano come rispettivi combinanti β_λ^n altrettante forme generiche del sistema, quindi il sistema $\infty^{\sum s_i}$ delle forme Φ_λ^n ad esse coniugate. Ma ciascuna di tali $\infty^{\sum s_i}$ forme Φ_λ^n conduce sempre ad un medesimo involuppo (4); onde il sistema (4), esclusi gli involuppi indeterminati, è $\infty^{n - \sum s_i}$.

*) Per quest'ultimo teorema si supponga $\alpha_\lambda^{n+1} \neq 0$.

L'indeterminazione nasce quando Φ_λ^n è coniugata a tutte le forme ϱ_λ^n , ossia quando Ψ è apolare rispetto a Φ_λ^n .

Le precedenti considerazioni possono essere chiarite anche osservando che, nell'ipotesi più generale, ogni forma Φ_λ^n si può ridurre al tipo *):

$$\Phi_\lambda^n = \sum_{i=1}^r \delta_\lambda^{(i)s_i-1} q_\lambda^{(i)n-s_i+1} + \sum_{j=1}^m d^{(j)} \xi_\lambda^{(j)n},$$

dove le $\delta_\lambda^{(i)s_i-1}$ sono forme parametriche da prendersi in tutti i modi possibili, le $d^{(j)}$ costanti arbitrarie, le $\xi_\lambda^{(j)}$ fattori lineari distinti fissati comunque purchè diversi dai fattori $q_\lambda^{(i)}$, infine è $m = n - \sum_{i=1}^r s_i + 1$. Se ne deduce, tenute presenti le

$$(\beta q^{(i)})^{n-s_i+1} \varrho_\lambda^{s_i-1} \equiv 0 \quad [\text{ident. risp. a } (\lambda)]$$

sussistenti in base alle ipotesi fatte, anche:

$$(\Phi \beta)^n = \sum_{j=1}^m d^{(j)} (\xi^{(j)} \beta)^n$$

in armonia con quanto precede.

Concludendo:

Il sistema $(\Phi \beta)^n = 0$ è completamente indeterminato quando, e solo quando, tutte le quadriche di $[f]$ sono almeno due volte specializzate. In ogni altro caso, se le $r \geq 0$ quadriche di $[f]$ specializzate più di una volta sono secate da un S_{n-1} generico in quadriche da contarsi $s_1, s_2, \dots, s_r$ volte nel gruppo dei coni del fascio sezione, il sistema $(\Phi \beta)^n = 0$ è $\infty^{n-\sum s_i}$, salvo l'indeterminazione dell'involuppo per le forme Φ_λ^n a cui è apolare il gruppo delle quadriche più volte specializzate contate rispettivamente $s_1, s_2, \dots, s_r$ volte.

Non credo inopportuno porre in luce come dall'ultima parte del precedente enunciato risulti in S_n l'esistenza di gruppi di n quadriche secate da ogni iperpiano in n quadriche ad invariante n -lineare nullo, anzi, colle notazioni usate, l'esistenza di $\infty^{\sum s_i-1}$ gruppi di tal natura in $[f]$ (se $r > 0$).

Lo stesso enunciato può assumere una forma più espressiva nel caso di un fascio di quadriche non tutte specializzate. Introdotti, secondo WEIERSTRASS, gli esponenti dei divisori elementari, si supponga il fascio caratterizzato dal simbolo di SEGRE **):

$$[(e_1, e'_1, \dots, e_1^{(h_1-1)})(e_2, e'_2, \dots, e_2^{(h_2-1)}) \dots (e_t, e'_t, \dots, e_t^{(h_t-1)})].$$

Da note formole ***) si deduce immediatamente:

$$\sum_{i=1}^r s_i = n + 1 - \sum_{j=1}^t e_j,$$

onde anche:

$$n - \sum_{i=1}^r s_i = \sum_{j=1}^t e_j - 1.$$

*) Il primo sommatorio fornisce una forma generica per cui sia apolare Ψ .

**) SEGRE, *Studio sulle quadriche*, etc. (cit.), Parte 2^a, § 3, n° 63.

***) WEIERSTRASS, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (cit.), n° 1, form. (4).

Cfr. SEGRE, loc. cit.

Si ha così: *Per un fascio di quadriche non tutte specializzate, la somma dei primi esponenti dei singoli gruppi di divisori elementari fornisce il massimo numero di involuppi ben determinati e linearmente indipendenti che è possibile assumere in $(\Phi \beta)^n = 0$.*

12. Se si osserva che ogni Φ_λ^n si può esprimere come combinazione lineare di potenze n -esime di forme lineari, risulta: *Il sistema $(\Phi \beta)^n = 0$ è il sistema lineare al quale « appartiene » quello algebrico delle quadriche di $[f]$ pensate come involuppo, escluse quelle indeterminate come tali.* Questa considerazione, notevole per sè stessa, può essere applicata per es. alla determinazione di tutti i tipi di *fascio-schiera*. Si noti perciò anzitutto che un fascio di conici non è in alcun caso fascio-schiera, come si può stabilire direttamente in modo semplice. Segue che, tenuto presente l'enunciato col quale si chiude il n° 11, i fasci-schiera sono quelli di quadriche non tutte specializzate soddisfacenti alla $\sum_{j=1}^t e_j = 2$.

Questa conduce od a: $t = 1, e_1 = 2$ oppure a: $t = 2, e_1 = e_2 = 1$; onde si ha: *Ogni fascio-schiera si riduce ad uno dei tipi:*

$$\left[\overbrace{(22 \dots 2)}^p \overbrace{(11 \dots 1)}^{n+1-2p} \right] \quad (0 < 2p \leq n+1);$$

$$\left[\overbrace{(11 \dots 1)}^p \overbrace{(11 \dots 1)}^{n+1-p} \right] \quad (0 < p < n+1).$$

Alcuni dei precedenti sviluppi acquistano maggiore evidenza quando si rappresentino gli involuppi di 2^a classe di S_n coi punti di uno spazio R ad $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni. Se

$[f]$ è nelle condizioni generali del n° 11, esistono $n - \sum_{i=1}^r s_i$ quadriche variabili di esso che, come involuppo, soddisfano alla condizione lineare di toccare un S_{n-1} generico di S_n *); e poichè ogni condizione lineare a cui soddisfi un involuppo di seconda classe è combinazione lineare di condizioni del tipo ora detto, risulta che più in generale esistono $n - \sum_{i=1}^r s_i$ quadriche variabili di $[f]$ che soddisfanno, come involuppo, ad una generica condizione lineare. Segue che, nella rappresentazione di cui sopra, *le quadriche di $[f]$, considerate come involuppo, quando si escludano quelle indeterminate come tali, sono rappresentate da punti di una curva razionale di ordine $n - \sum_{i=1}^r s_i$. Essa è curva normale dello spazio R' ad $n - \sum_{i=1}^r s_i$ dimensioni i cui punti rappresentano gli involuppi $(\Phi \beta)^n = 0$ non indeterminati.*

La rappresentazione accennata è semplicemente realizzabile nel caso di un fascio di quadriche non tutte specializzate, quando si costruiscano i poli di un S_{n-1} generico rispetto alle quadriche di $[f]$, escluse quelle più volte specializzate ed in generale rispetto agli involuppi $(\Phi \beta)^n = 0$, esclusi quelli indeterminati. Si ha così il seguente teorema,

*) Se il fascio non è di quadriche tutte specializzate ne esistono $\sum_{j=1}^t e_j - 1$. [SEGRE, *Studio sulle quadriche*, etc. (cit.), Parte 2^a, § 3, n° 75] in accordo col risultato in fine del n° 11.

che per un fascio privo di quadriche più volte specializzate coincide con uno del Prof. SEGRE *):

Se $[f]$ non è di quadriche tutte specializzate, i poli di un S_{n-1} generico rispetto alle quadriche di $[f]$ non più volte specializzate giacciono sopra una curva razionale d'ordine

$$n - \sum_{i=1}^r s_i = \sum_{j=1}^t e_j - 1 \text{ appartenente ad uno spazio ad } n - \sum_{i=1}^r s_i \text{ dimensioni.}$$

Nel caso di un fascio di quadriche tutte specializzate (una volta) il teorema del n° 11 sulla dimensione del sistema $(\Phi\beta)^n = 0$ può ricevere una semplice conferma. In questo caso **) il luogo dei vertici è una curva Γ_l razionale di ordine $l \geq 0$ appartenente ad un S_l ed il sistema $(\Phi\beta)^n = 0$, come risulta da una precedente osservazione ***), è quello degli involuipi conjugati a tutte le quadriche passanti per Γ_l . Ora, poichè il passaggio per Γ_l impone ad una quadrica $2l + 1$ condizioni lineari, risulta che $(\Phi\beta)^n = 0$ è $\infty^{2l} \dagger$). Ma allo stesso risultato si perviene col metodo del n° 11, quando si noti $\dagger\dagger$) che il fascio generale di quadriche una volta specializzate i cui vertici sono punti di una Γ_l possiede $n - 2l$ quadriche due volte specializzate, ciascuna delle quali è secata da un S_{n-1} generico in una quadrica una volta specializzata.

13. Dal n° 11 risulta che ad un gruppo $\Phi_\lambda^n = 0$ di n quadriche, non appartenente alla $g_n^{\sum s_i - 1}$ dei gruppi pei quali è apolare Ψ , corrisponde un involuppo ben determinato $(\Phi\beta)^n = 0$.

Ad un involuppo $(\Phi\beta)^n = 0$ corrispondono invece, insieme al gruppo $\Phi_\lambda^n = 0$, tutti i gruppi della $g_n^{\sum s_i}$ individuata dalla $g_n^{\sum s_i - 1}$ singolare e dallo stesso gruppo $\Phi_\lambda^n = 0$. Segue:

Ai gruppi di una g_n^d non avente colla $g_n^{\sum s_i - 1}$ singolare alcun gruppo in comune corrispondono gli involuipi $(\Phi\beta)^n = 0$ di un sistema lineare ∞^d .

Ai gruppi di una g_n^d avente in comune colla $g_n^{\sum s_i - 1}$ singolare una g_n^p corrispondono gli involuipi $(\Phi\beta)^n = 0$ di un sistema lineare ∞^{d-p-1} .

Quindi:

Ai gruppi di una g_n^d generica per $d \leq n - \sum s_i$ corrispondono gli involuipi di un sistema lineare ∞^d , per $d \geq n - \sum s_i$ gli involuipi dell'intero sistema $\infty^{n-\sum s_i}$ (il caso $d = n - \sum s_i$ essendo così compreso nei due enunciati).

Se infine $[f]$ non contiene quadriche specializzate più di una volta ($\sum s_i = 0$), ai gruppi di ogni g_n^d corrispondono gli involuipi di un sistema ∞^d .

Considero in particolare la g_n^{n-2} dei gruppi apolari al gruppo degli $n + 1$ coni

*) Studio sulle quadriche, etc. (cit.), Parte 2ª, § 1, n° 55.

**) v. SEGRE, Ricerche sui fasci di coni quadrici, etc. (cit.), n° 7.

***) Al n° 4, §) per $k = n$.

†) Si può aggiungere che gli involuipi $(\Phi\beta)^n = 0$ hanno per nuclei le quadriche di S_l , congiunte come involuppo a quelle pure di S_l passanti per Γ_l .

††) v. SEGRE, Ricerche sui fasci di coni quadrici, etc. (cit.), n° 16.

($\alpha_\lambda^{n+1} = 0$), supposto $[f]$ composto di quadriche non tutte specializzate *). Dico che tale g_n^{n-2} contiene come subordinata la $g_n^{\sum s_i - 1}$ singolare. Per questo osservo dapprima che posto, come al n° 11: $\Psi = q_\lambda^{s_1} q_\lambda^{s_2} \dots q_\lambda^{(r)s_r}$, la α_λ^{n+1} contiene come fattore $\Psi^* = q_\lambda^{s_1+1} q_\lambda^{s_2+1} \dots q_\lambda^{(r)s_r+1}$.

Ed invero se f'_μ , sezione di f_μ con un S_{n-1} generico, è da contarsi s volte nel gruppo dei coni del fascio sezione, si ha:

$$\beta_\mu^{n-s+1} \beta_\lambda^{s-1} \equiv 0 \quad [\text{id. rispetto a } (\lambda)],$$

ossia, qualunque siano le u , tenuto presente il teorema del n° 6:

$$(a'_\mu a''_\mu \dots a_\mu^{(n-s+1)} a'_\lambda a''_\lambda \dots a_\lambda^{(s-1)} u)^2 \equiv 0.$$

Sostituendo alle variabili u i simboli $a_\lambda^{(s)}$, si deduce:

$$(a'_\mu a''_\mu \dots a_\mu^{(n-s+1)} a'_\lambda a''_\lambda \dots a_\lambda^{(s-1)} a_\lambda^{(s)})^2 \equiv 0,$$

ossia:

$$\alpha_\mu^{n-s+1} \alpha_\lambda^s \equiv 0,$$

la quale dimostra che f_μ è da contarsi almeno $s + 1$ volte fra i coni di $[f]$.

Essendo così provato che α_λ^{n+1} contiene come fattore Ψ^* , se ne deduce che $(\alpha \Phi)^n \alpha_\lambda$ possiede il fattore simbolico $(\Psi \Phi)^{\sum s_i}$. Quindi, se Ψ è apolare a Φ_λ^n [$(\Psi \Phi)^{\sum s_i} \Phi_\lambda^{n-\sum s_i} \equiv 0$], è pure Φ_λ^n apolare ad α_λ^{n+1} [$(\alpha \Phi)^n \alpha_\lambda \equiv 0$], come appunto si voleva dimostrare.

Dal criterio generale precedentemente esposto si ricava così:

Alla g_n^{n-2} dei gruppi apolari a quello degli $n + 1$ con i corrisponde un sistema lineare $\infty^{n-\sum s_i-2}$ di involuppi $(\Phi \beta)^n = 0$.

Per stabilire il significato di questo sistema si osservi che, posto, come altrove, $\Phi_\lambda^n = (\mu \lambda)(\nu \lambda) \dots (\rho \lambda)$, la

$$(5) \quad (\alpha \Phi)^n \alpha_\lambda = 0,$$

per il teorema già citato del n° 6, si può scrivere:

$$(6) \quad (a_\mu a_\nu \dots a_\rho a_\lambda)^2 = 0,$$

cioè si deduce dall'equazione:

$$(7) \quad (a_\mu a_\nu \dots a_\rho u)^2 = 0$$

di $(\Phi \beta)^n = 0$, sostituendo alle variabili u i simboli a_λ . Segue che, indicando con $h_x^2 \equiv h_x'^2 \equiv \dots = 0$ l'equazione locale di $(\Phi \beta)^n = 0$, la (7) si identifica con:

$$(h' h'' \dots h^{(n)} u)^2 = 0$$

e quindi la (6), ossia la (5), con:

$$(h' h'' \dots h^{(n)} a_\lambda)^2 = 0.$$

Si giunge così intanto ad un notevole risultato che può essere enunciato in uno dei seguenti modi:

1) *L'involuppo $(\Phi \beta)^n = 0$ è coniugato ad una, ed in generale ad una sola, quadrica di $[f]$, il cui parametro annulla la spinta $(\alpha \Phi)^n \alpha_\lambda$.*

*) La g_n^{n-2} degenera in una g_n^{n-1} quando, e solo quando, α_λ^{n+1} è una potenza di forma lineare. In questo caso alcune delle cose che seguono debbono subire qualche modificazione.

2) Se il gruppo $\Phi_\lambda^n = 0$ è, nel campo binario, coniugato al gruppo delle n quadriche di $[f]$ coniugate come inviluppo ad f_λ , e solo in tal caso, l'inviluppo $(\Phi\beta)^n = 0$ è coniugato ad f_λ .

3) Se $n + 1$ quadriche di $[f]$ sono ad invariante $(n + 1)$ -lineare nullo, l'inviluppo degli S_{n-1} secanti n di queste in n quadriche ad invariante n -lineare nullo è coniugato alla rimanente; e reciprocamente.

Ma il caso in cui (5) sussista identicamente conduce al significato del sistema $\infty^{n-\sum i-2}$ in questione. Risulta infatti:

Condizione necessaria e sufficiente, perchè l'inviluppo $(\Phi\beta)^n = 0$ sia coniugato a tutte le quadriche del fascio $[f]$, è che sia Φ_λ^n apolare ad α_λ^{n+1} . Gli inviluppi del sistema sono dunque tutti e solo quelli coniugati ad ogni quadrica del fascio [e appartenenti al sistema $(\Phi\beta)^n = 0$] *).

Nel campo binario del fascio, alla g_n^{n-2} dei gruppi apolari a quello dei coni è coniugata la g'_n dei gruppi $\alpha_\sigma \alpha'_\lambda = 0$ polari del gruppo stesso **). Alla g'_n corrisponde in generale una schiera di inviluppi

$$(8) \quad \alpha_\sigma (\alpha\beta)^n = 0,$$

che dirò schiera associata al fascio $[f]$ ***), riferita proiettivamente a questo, corrispondendosi l'inviluppo (8) e la quadrica f_σ . L'inviluppo (8) può essere definito come quello degli S_{n-1} secanti in n quadriche ad invariante n -lineare nullo le n quadriche di $[f]$ coniugate come inviluppo ad f_σ ****).

Per n dispari si ha:

$$(\alpha\alpha')^n \alpha_\sigma \alpha'_\lambda = \frac{1}{2} (\alpha\alpha')^n (\alpha_\sigma \alpha'_\lambda - \alpha_\lambda \alpha'_\sigma) = \frac{1}{2} (\alpha\alpha')^{n+1} (\sigma\lambda)$$

onde, ricordando l'enunciato 1) del presente n°:

Per n dispari in generale ciascuna quadrica del fascio è coniugata all'inviluppo corrispondente della schiera associata e a nessun altro di questa; se però il gruppo dei coni è ad invariante $(n + 1)$ -lineare nullo (cfr. n° 7), ogni quadrica di $[f]$ è coniugata a tutti gli inviluppi (8).

Per n pari, posto:

$$(\alpha\alpha')^n \alpha_\lambda \alpha'_\lambda = \Delta_\lambda^2,$$

*) Nel caso già citato in nota in cui la g_n^{n-2} degenera in una g_n^{n-1} , il sistema degenera in uno $\infty^{n-\sum i-1}$. Ciò si spiega anche notando che l'unica quadrica specializzata è come luogo coniugata a tutte le altre di $[f]$ (v. n° 7), quindi a tutti gli inviluppi $(\Phi\beta)^n = 0$.

**) Nel caso della precedente nota la g'_n si riduce ad un gruppo, salvo l'indeterminazione per f_σ coincidente coll'unica quadrica specializzata.

***) La scelta della denominazione mi è suggerita dal fatto che la schiera associata ad un fascio di coniche generico ha per quadrilatero base il quadrilatero associato al quadrangolo base del fascio, nel senso di KOHN [Ueber das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünfflach und sein associirtes Fünfeck; Sitzungsber. d. Wien. Akad., Bd. XCIII (1886), pp. 314-352], come avrò occasione di dimostrare in altro lavoro.

****) L'inviluppo (8) è pure quello degli S_{n-1} tangenti ad n quadriche di $[f]$ formanti con f_σ un gruppo ad invariante $(n + 1)$ -lineare nullo.

si ha:

$$(\alpha\alpha')^n \alpha_\sigma \alpha'_\lambda = \frac{1}{2}(\alpha\alpha')^n (\alpha_\sigma \alpha'_\lambda + \alpha_\lambda \alpha'_\sigma) = \Delta_\sigma \Delta_\lambda,$$

ossia:

Per n pari in $[f]$ è in generale determinata un'involuzione ordinaria $\Delta_\sigma \Delta_\lambda = 0$, in modo che, di due quadriche di uno stesso gruppo, ciascuna è coniugata all'involuppo corrispondente all'altra nella schiera associata, e solo a tale involuppo della schiera stessa.

Gli elementi doppi dell'involuzione sono le due quadriche di $[f]$, ciascuna delle quali è coniugata come luogo ad n quadriche del fascio stesso segate da ogni S_{n-1} tangente comune in n coni ad invariante n -lineare nullo. Se però è $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$ (cioè se ogni quadrica di $[f]$ gode della proprietà ora detta) ogni quadrica di $[f]$ è coniugata a tutti gli involuppi (8).

Sulla schiera associata tornerò in seguito [v. n° 20].

14. Fra gli involuppi $(\Phi\beta)^n = 0$ meritano particolare menzione quelli del tipo:

$$(9) \quad \beta_\mu^{n-k} \beta_\nu^k = 0.$$

L'involuppo (9), come risulta in modo semplice, è quello degli S_{n-1} secanti f_ν in una quadrica h -armonica alla sezione di f_μ .

Tenuta fissa f_μ , quando f_ν descrive il fascio, l'involuppo (9) descrive un sistema ∞^1 razionale e riferito proiettivamente al fascio stesso. Esistono h involuppi del sistema contenenti un S_{n-1} generico. Il sistema stesso appartiene a quello lineare, ed in generale ∞^h , rappresentato dall'equazione:

$$(10) \quad \beta_\mu^{n-h} (W\beta)^h = 0,$$

dove W_λ^h è una forma parametrica. Il significato di (10) scende immediatamente da quello generale dell'involuppo $(\Phi\beta)^n = 0$.

La varietà di iperpiani base del sistema (10), quindi comune agli involuppi (9), è rappresentata da:

$$(11) \quad \beta_\mu^{n-h} \beta_\lambda^h \equiv 0 \quad [\text{id. risp. a } (\lambda)],$$

cioè è costituita dagli iperpiani secanti $[f]$ in un fascio nel quale la sezione di f_μ conta $h+1$ volte nel gruppo dei coni.

Il significato più espressivo del sistema (10) e della varietà (11) risulta però dalle considerazioni seguenti. Date $h+1$ quadriche di $[f]$, e cioè:

$$f_\xi, f_\eta, \dots f_\rho,$$

esse, considerate come involuppi, determinano il sistema, in generale ∞^h , rappresentato da:

$$(12) \quad d_1 \beta_\xi^n + d_2 \beta_\eta^n + \dots + d_{h+1} \beta_\rho^n = 0,$$

ove le d_i sono parametri. Il sistema (12) ha per base la varietà:

$$(13) \quad \beta_\xi^n = 0, \quad \beta_\eta^n = 0, \quad \dots \quad \beta_\rho^n = 0.$$

Se si suppone che $f_\xi, f_\eta, \dots f_\rho$ vengano successivamente a coincidere con f_μ , le $h+1$ radici assegnate dalla (13) a β_λ^n si fondono nella radice $(h+1)$ -pla (μ) ; onde la varietà (13) si riduce a (11) e quindi il sistema (12) a (10). Concludendo:

Il sistema (10) è la posizione limite del sistema lineare di involuppi individuato da

$h + 1$ quadriche di $[f]$ considerate come tali, quando queste vengono successivamente a confondersi con f_μ *).

La (11) è la posizione limite della varietà degli iperpiani tangenti comuni ad $h + 1$ quadriche di $[f]$, quando queste vengono successivamente a confondersi con f_μ .

Se la (11) si dice varietà caratteristica d'indice h relativa ad f_μ , si può osservare che la varietà caratteristica d'indice $h + 1$ relativa ad f_μ è la posizione limite della varietà degli S_{n-1} giacenti nella varietà caratteristica d'indice h e tangenti ad f_ρ , quando f_ρ tende a confondersi con f_μ . Inoltre l'involuppo (9) si può ritenere individuato dal contenere la varietà caratteristica d'indice h relativa ad f_μ e quella d'indice $n - h$ relativa ad f_ν .

Per $h = 1$ il sistema (12) si riduce alla schiera:

$$d_1 \varphi_\xi^n + d_2 \varphi_\eta^n = 0,$$

polare reciproca di $[f]$ rispetto a ciascuna delle quadriche rispetto alle quali sono polari reciproche f_ξ ed f_η **). Quando f_ξ ed f_η vengono successivamente a confondersi con f_μ , anche una delle quadriche rispetto a cui f_ξ ed f_η sono polari reciproche viene a coincidere con f_μ , onde si giunge al notevole risultato:

La schiera $\varphi_\mu^{n-1} \beta_\lambda = 0$ è polare-reciproca di $[f]$ rispetto ad f_μ .

L'involuppo $\varphi_\mu^{n-1} \beta_\lambda = 0$ non è però in generale polare-reciproco di f_λ , come avrò occasione di dimostrare (v. n° 21).

Dall'enunciato precedente si deduce: La varietà caratteristica d'indice 1 relativa ad f_μ è costituita dagli S_{n-1} tangenti ad f_μ nei punti della quartica base di $[f]$; il che si poteva prevedere anche geometricamente.

§ 4. I complessi quadratici $(\Pi\theta)^k = 0$.

15. Alcuni degli sviluppi del § precedente sono suscettibili di estensione quando al combinante elementare φ_λ^n si sostituisca il combinante elementare generico θ_λ^k (n° 10). Ed invero dal n° 7 (o dal n° 8) risulta intanto: Gli S_{k-1} secanti k quadriche $f_\mu, f_\nu, \dots, f_\rho$ di $[f]$ in k quadriche ad invariante k -lineare nullo costituiscono il complesso quadratico di equazione:

$$(1) \quad \theta_\mu \theta_\nu \dots \theta_\rho = 0.$$

La (1), per il teorema del n° 6, si può scrivere anche sotto la forma:

$$(2) \quad (a_\mu a_\nu \dots a_\rho u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 = 0.$$

D'altra parte, posto:

$$(3) \quad \Pi_\lambda^k = (\mu\lambda)(\nu\lambda) \dots (\rho\lambda),$$

*) Se, come al n° 12, si rappresentano gli involuppi coi punti di uno spazio, quindi le quadriche di $[f]$, come involuppo, coi punti di una curva, il sistema (10) è in generale rappresentato dall' S_h osculatore alla curva nel punto corrispondente ad f_μ .

**) Due quadriche di S_n in generale sono polari reciproche rispetto a 2^n quadriche. Cfr. DEL PEZZO, *Sulle quadriche ad $n - 1$ dimensioni polari reciproche di sè stesse rispetto ad un'altra* [Rend. Acc. delle Scienze Fis. e mat., Napoli, vol. XXIV, (1885), pag. 186], § III.

la stessa (1) assume l'aspetto:

$$(4) \quad (\Pi \theta)^k = 0.$$

Con procedimento analogo a quello del n° 11, si trova che, considerando Π_λ^k come forma parametrica, il complesso (4) descrive un sistema lineare, il quale è ∞^k se $[f]$ non possiede quadriche specializzate più di $n - k + 1$ volte. Più in generale:

Il sistema $(\Pi \theta)^k = 0$ di complessi quadratici è completamente indeterminato quando, e solo quando, tutte le quadriche di $[f]$ sono almeno $n - k + 2$ volte specializzate. In ogni altro caso, se le $r \geq 0$ quadriche di $[f]$ specializzate più di $n - k + 1$ volte sono secate da un S_{k-1} generico in quadriche da contarsi $t_1, t_2, \dots, t_r$ volte nel gruppo dei coni del fascio sezione, il sistema $(\Pi \theta)^k = 0$ è $\infty^{k-\sum t_i}$, salvo l'indeterminazione del complesso per le forme Π_λ^k a cui è apolare il gruppo delle quadriche specializzate più di $n - k + 1$ volte, contate rispettivamente $t_1, t_2, \dots, t_r$ volte.

Se ne deduce in $[f]$ l'esistenza di $\infty^{\sum t_i - 1}$ gruppi di k quadriche secate da ogni S_{k-1} in k quadriche ad invariante k -lineare nullo.

Se poi si tiene presente che Π_λ^k si può esprimere come combinazione lineare di potenze k -esime di forme lineari, si può enunciare il teorema: Il sistema $(\Pi \theta)^k = 0$ di complessi quadratici è il sistema lineare al quale « appartiene » quello algebrico delle quadriche di $[f]$ considerate come complesso degli S_{k-1} tangenti, escluse le quadriche indeterminate come tali. Se dunque i complessi quadratici di spazi S_{k-1} si rappresentano coi punti di uno spazio R , le quadriche di $[f]$, nel senso precedente, sono rappresentate da punti di una curva d'ordine $k - \sum t_i$ (razionale) appartenente ad uno spazio R' a $k - \sum t_i$ dimensioni.

16. Suppongo che alle r quadriche di $[f]$ specializzate più di $n - k + 1$ volte corrispondano i fattori lineari $q'_\lambda, q''_\lambda, \dots, q_\lambda^{(r)}$ ed introduco la forma:

$$\Omega = \Omega_\lambda^{\sum t_i} = q_\lambda^{t_1} q_\lambda^{t_2} \dots q_\lambda^{(r)t_r}$$

analogo alla forma Ψ del n° 11. Si ha che ad un gruppo $\Pi_\lambda^k = 0$, non appartenente alla $g_k^{\sum t_i - 1}$ dei gruppi pei quali è apolare Ω , corrisponde un complesso ben determinato $(\Pi \theta)^k = 0$; ad un complesso $(\Pi \theta)^k = 0$, invece, insieme al gruppo $\Pi_\lambda^k = 0$ corrispondono tutti i gruppi della $g_k^{\sum t_i}$ individuata dalla $g_k^{\sum t_i - 1}$ singolare e dal gruppo stesso.

Si deduce che ai gruppi di una g_k^d corrispondono i complessi di un sistema lineare ∞^d o di un sistema ∞^{d-p-1} , secondo che g_k^d non ha in comune colla $g_k^{\sum t_i - 1}$ singolare alcun gruppo oppure ha in comune con essa i gruppi di una g_k^p . Etc. etc.

La relazione:

$$(\alpha \Pi)^k \alpha_\lambda^{n-k+1} \equiv 0$$

equivale ad $n - k + 2$ equazioni lineari nei coefficienti di Π_λ^k , onde risulta: Se è $2k \geq n + 2$ e se la forma α_λ^{n+1} è generale nel suo ordine, esistono ∞^{2k-n-2} forme Π_λ^k apolari ad α_λ^{n+1} .

I gruppi corrispondenti formano una g_k^{2k-n-2} alla quale è subordinata la $g_k^{\sum t_i - 1}$ singolare. Per questo osservo che, se la sezione di f_μ con un S_{k-1} generico è da contarsi t volte nel gruppo dei coni del fascio sezione, si ha:

$$\theta_\mu^{k-t+1} \theta_\lambda^{t-1} \equiv 0 \quad [\text{id. risp. a } (\lambda)]$$

ossia (vedi n° 6):

$$(a'_\mu a''_\mu \dots a_\mu^{(k-t+1)} a'_\lambda a''_\lambda \dots a_\lambda^{(t-1)} u' u'' \dots u^{(n-k+1)})^2 \equiv 0,$$

qualunque siano le $u'_j, u''_j, \dots, u_j^{(n-k+1)}$. È quindi lecito sostituire alle serie di variabili contragredienti altrettante serie di simboli a_λ e scrivere:

$$(a'_\mu a''_\mu \dots a_\mu^{(k-t+1)} a'_\lambda a''_\lambda \dots a_\lambda^{(n-k+t)}) \equiv 0$$

ossia (vedi n° 6):

$$\alpha_\mu^{k-t+1} \alpha_\lambda^{n-k+t} \equiv 0,$$

onde segue che f_μ è da contarsi almeno $n - k + t + 1$ volte nel gruppo dei coni di $[f]$. Si deduce così che α_λ^{n+1} contiene come fattore:

$$\Omega^* = q_\lambda^{n-k+t_1+1} q_\lambda^{n-k+t_2+1} \dots q_\lambda^{n-k+t_r+1},$$

e che perciò la spinta $(\alpha \Pi)^k \alpha_\lambda^{n-k+1}$ possiede il fattore simbolico $(\Omega \Pi)^{\Sigma t_i}$; il che dimostra, come si voleva, che, se è Ω apolare a Π_λ^k [cioè $(\Omega \Pi)^{\Sigma t_i} \Pi_\lambda^{k-\Sigma t_i} \equiv 0$], è pure Π_λ^k apolare ad α_λ^{n+1} [cioè $(\alpha \Pi)^k \alpha_\lambda^{n-k+1} \equiv 0$].

Applicando il criterio generale sopra esposto si può concludere:

Se è $2k \geq n + 2 + \Sigma t_i$, alla g_k^{2k-n-2} dei gruppi apolari a quello dei coni corrisponde un sistema lineare $2k - n - 2 - \Sigma t_i$ volte infinito. Si intende che il risultato vale solo in generale intendendosi esclusi i casi in cui la dimensione della serie in questione superi $2k - n - 2$.

Per stabilire un significato geometrico del sistema di complessi ora considerato si ricordi (n° 6) che, ponendo, come sopra, $\Pi_\lambda^k = (\mu \lambda)(\nu \lambda) \dots (\rho \lambda)$, la

$$(5) \quad (\alpha \Pi)^k \alpha_\lambda^{n-k+1} = 0$$

si scrive pure:

$$(6) \quad (a_\mu a_\nu \dots a_\rho a'_\lambda a''_\lambda \dots a_\lambda^{(n-k+1)})^2 = 0.$$

Dal confronto delle (5) e (6), tenuta presente una definizione data al n° 5 si deduce: Il complesso $(\Pi \theta)^k = 0$ è in generale armonico ad $n - k + 1$ quadriche di $[f]$ i cui parametri sono forniti dall'equazione $(\alpha \Pi)^k \alpha_\lambda^{n-k+1} = 0$. I complessi $(\Pi \theta)^k = 0$ corrispondenti alle forme Π_λ^k apolari ad α_λ^{n+1} , ed essi soli, sono armonici a tutte le quadriche di $[f]$.

In generale, e sempre nell'ipotesi $2k \geq n + 2$, alla g_k^{2k-n-2} dei gruppi apolari ad α_λ^{n+1} nel campo binario è coniugata la g_k^{n-k+1} dei gruppi polari ad α_λ^{n+1} in senso esteso, cioè dei gruppi:

$$(7) \quad (\alpha V)^{n-k+1} \alpha_\lambda^k = 0,$$

essendo V_λ^{n-k+1} una forma parametrica. Il complesso:

$$(8) \quad (\alpha V)^{n-k+1} (\alpha \theta)^k = 0$$

corrispondente al gruppo (7) può essere definito come complesso degli S_{k-1} tangenti a k quadriche costituenti insieme a quelle fornite da $V_\lambda^{n-k+1} = 0$ un gruppo ad invariante $(n+1)$ -lineare nullo. In generale il sistema (8) di complessi è ∞^{n-k+1} e si può ritenere un'estensione della schiera associata (cfr. n° 13).

Caso particolare di (8) è il complesso:

$$\alpha_\sigma^{n-k+1} (\alpha \theta)^k = 0$$

degli S_{k-1} secanti in k quadriche ad invariante k -lineare nullo le k quadriche di $[f]$ k -armoniche ad f_γ .

17. Il presente n° contiene l'estensione di alcuni fra i risultati del n° 14. Il complesso:

$$(9) \quad \theta_\mu^{k-b} \theta_\nu^b = 0$$

degli S_{k-1} secanti f_ν in una quadrica h -armonica alla sezione di f_μ , al variare di f_ν , descrive un sistema ∞^1 razionale.

Esistono h complessi del sistema contenenti un S_{k-1} generico ed il sistema stesso appartiene a quello lineare, e in generale ∞^h , rappresentato da

$$(10) \quad \theta_\mu^{k-b} (W\theta)^b = 0.$$

La base di (10) è la:

$$(11) \quad \theta_\mu^{k-b} \theta_\lambda^b \equiv 0 \quad [\text{id. risp. a } (\lambda)]$$

degli S_{k-1} secanti $[f]$ in un fascio nel quale la sezione di f_μ conta $h+1$ volte nel gruppo dei coni.

Il sistema (10) è la posizione limite del sistema lineare di complessi quadratici individuato da $h+1$ quadriche di $[f]$ pensate come complesso dei loro S_{k-1} tangenti, quando le $h+1$ quadriche vengono successivamente a coincidere con f_μ . La varietà (11) è la posizione limite di quella degli S_{k-1} tangenti ad $h+1$ quadriche di $[f]$ quando queste vengono a coincidere successivamente con f_μ . Etc. etc.

§ 5. I fasci dotati di piramide polare.

18. Nel presente § viene considerato il caso in cui esiste almeno una piramide di $n+1$ vertici polare (autoconjugata) rispetto a tutte le quadriche di $[f]$, ossia il caso in cui gli esponenti dei divisori elementari di WEIERSTRASS sono tutti uguali all'unità, se il fascio non è di quadriche specializzate od il caso in cui sono tali gli esponenti dei divisori elementari relativi al fascio sezione con un S_{n-k} generico. se la quadrica corrente di $[f]$ è k volte specializzata. Assunta la piramide polare come fondamentale, l'equazione della quadrica f_λ di $[f]$ prende l'aspetto:

$$(1) \quad e'_\lambda x_1^2 + e''_\lambda x_2^2 + \dots + e_\lambda^{(n+1)} x_{n+1}^2 = 0,$$

ove le $e_\lambda^{(i)}$ sono forme lineari. Se di queste nessuna è identicamente nulla, la quadrica corrente di $[f]$ non è specializzata, e ad un fattore lineare nel quale coincidano $r \geq 1$ delle $e_\lambda^{(i)}$ (a meno di coefficienti numerici), corrisponde una quadrica r volte specializzata. Se invece k delle $e_\lambda^{(i)}$ sono identicamente nulle, la quadrica corrente di $[f]$ è k -volte specializzata, e ad un fattore lineare nel quale coincidano $r \geq 1$ delle rimanenti corrisponde una quadrica $r+k$ volte specializzata. In ogni caso risulta facilmente:

$$(2) \quad x_\lambda^{n+1} = e'_\lambda e''_\lambda \dots e_\lambda^{(n+1)}.$$

Se inoltre si pone:

$$(3) \quad E_\lambda^{(i)n} = e'_\lambda e''_\lambda \dots e_\lambda^{(i-1)} e_\lambda^{(i+1)} \dots e_\lambda^{(n+1)},$$

si deduce che l'equazione tangenziale della quadrica (1) è:

$$(4) \quad E_{\lambda}'' u_1^2 + E_{\lambda}'' u_2^2 + \dots + E_{\lambda}^{(n+1)''} u_{n+1}^2 = 0,$$

indeterminata per ogni f_{λ} , quando, e solo quando, almeno due delle $e_{\lambda}^{(i)}$ siano identicamente nulle, in accordo con quanto precede.

Poichè (4) coincide con $\beta_{\lambda}'' = 0$, si ha che più in generale l'involuppo $(\Phi \beta)'' = 0$ del § 3 è rappresentato da:

$$(5) \quad (\Phi E')'' u_1^2 + (\Phi E'')'' u_2^2 + \dots + (\Phi E^{(n+1)})'' u_{n+1}^2 = 0$$

e su di questa equazione si possono facilmente ritrovare per il caso presente i risultati stabiliti, per $[f]$ qualunque, al n° 11 sulla dimensione del sistema $(\Phi \beta)'' = 0$.

Ogni piramide polare rispetto a tutte le quadriche di $[f]$ è pure polare rispetto ad ogni involuppo (5), come si deduce immediatamente dal teorema dato in principio del n° 12. Ma, tenuto conto caso per caso della dimensione del sistema (5), risulta che reciprocamente ogni involuppo dotato di tale proprietà appartiene al sistema. Limitando l'osservazione al caso di un fascio generale, cioè $[111 \dots 1]$, si ha: *Per un fascio generale di quadriche, ogni quadrica rispetto alla quale è polare la piramide dei vertici dei coni è involuppo degli iperpiani secanti n quadriche ben determinate del fascio in n quadriche ad invariante n -lineare nullo.* La forma Φ_{λ}'' corrispondente alla quadrica di equazione tangenziale:

$$p_1 u_1^2 + p_2 u_2^2 + \dots + p_{n+1} u_{n+1}^2 = 0$$

è individuata come coniugata alle n forme che si ottengono dai minori della matrice

$$\begin{vmatrix} E_{\lambda}'' E_{\lambda}'' & \dots & E_{\lambda}^{(n+1)''} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_{n+1} \end{vmatrix}$$

tenendo fissa una colonna assegnata, per es. la prima; e può essere posta sotto l'aspetto:

$$(6) \quad \Phi_{\lambda}'' = \frac{p_1}{(E' e')''} e_{\lambda}'' + \frac{p_2}{(E'' e'')''} e_{\lambda}'' + \dots + \frac{p_{n+1}}{(E^{(n+1)} e^{(n+1)})''} e_{\lambda}^{(n+1)''}.$$

19. D'ora innanzi suppongo $\alpha_{\lambda}^{n+1} \neq 0$. Risulta allora semplicemente che gli involuppi $(\Phi \beta)'' = 0$ specializzati corrispondono alle forme Φ_{λ}'' coniugate ad una almeno delle $E_{\lambda}^{(i)''}$. Più precisamente, se il fascio è $[111 \dots 1]$, ad una Φ_{λ}'' coniugata ad esempio ad E_{λ}'' , $E_{\lambda}'' \dots E_{\lambda}^{(j)''}$ corrisponde un involuppo j volte specializzato ed avente per nucleo una quadrica dell' S_{n-j} :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad x_j = 0.$$

Dato un gruppo $M_{\lambda}^{n+1} = 0$, si considerino i suoi gruppi primi polari $M_{\sigma} M_{\lambda}'' = 0$, costituenti in generale una g'_n nel campo binario del fascio. Alla g'_n corrisponde in generale (n° 13) la schiera:

$$(7) \quad M_{\sigma} (M \beta)'' = 0$$

riferita proiettivamente ad $[f]$, corrispondendosi (7) ed f_{σ} . La (7) per il numero precedente si può scrivere:

$$(8) \quad M_{\sigma} (M E')'' u_1^2 + M_{\sigma} (M E'')'' u_2^2 + \dots + M_{\sigma} (M E^{(n+1)})'' u_{n+1}^2 = 0.$$

ad 1 oppure a -1 , in modo che sia:

$$(17) \quad \sqrt{\rho_1} : \eta_2 \sqrt{\rho_2} : \dots : \eta_r \sqrt{\rho_r} = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \dots : \frac{1}{h_r}.$$

Se ne deduce che, nel caso presente, fra gli involuppi (11) i 2^{n-r+1} forniti dalle

$$(18) \quad \sqrt{\rho_1} u_1^2 + \eta_2 \sqrt{\rho_2} u_2^2 + \dots + \eta_r \sqrt{\rho_r} u_r^2 \pm \sqrt{\rho_{r+1}} u_{r+1}^2 \pm \dots \pm \sqrt{\rho_{n+1}} u_{n+1}^2 = 0,$$

ed essi soli, appartengono al sistema $(\Phi \beta)^n = 0$. L'estensione del risultato a ciascuno dei tipi considerati nel presente n° è ora assai semplice e conduce all'enunciato:

Se $[f]$ possiede 1 quadriche specializzate distinte ed è $(\alpha M)^{n+1} = 0$, la schiera $M_\sigma(M \beta)^n = 0$ è polare-reciproca di $[f]$ rispetto a 2^{l-1} quadriche-involuppo del sistema $(\Phi \beta)^n = 0$, corrispondendosi nella polarità la quadrica f_σ e l'involuppo $M_\sigma(M \beta)^n = 0$.

È però specialmente degno di nota che, inversamente, la schiera polare-reciproca di $[f]$ rispetto ad una quadrica-involuppo del sistema $(\Phi \beta)^n = 0$ è sempre costituita dagli involuppi $(\Phi \beta)^n = 0$ corrispondenti ai gruppi primi polari di un gruppo $M_\lambda^{n+1} = 0$ coniugato a quello dei coni.

Si consideri infatti la schiera polare di $[f]$ rispetto alla quadrica-involuppo:

$$(19) \quad \pi_1 u_1^2 + \pi_2 u_2^2 + \dots + \pi_{n+1} u_{n+1}^2 = 0$$

del sistema $(\Phi \beta)^n = 0$. La schiera stessa è rappresentata da:

$$(20) \quad \pi_1^2 e'_\lambda u_1^2 + \pi_2^2 e''_\lambda u_2^2 + \dots + \pi_{n+1}^2 e_\lambda^{(n+1)} u_{n+1}^2 = 0.$$

Se $[f]$ è di tipo $[111 \dots 1]$, le π_i sono arbitrarie ed una M_λ^{n+1} coniugata ad α_λ^{n+1} , del resto qualunque, è fornita da:

$$(21) \quad M_\lambda^{n+1} \equiv \delta_1 e_\lambda^{n+1} + \delta_2 e_\lambda^{n+1} + \dots + \delta_{n+1} e_\lambda^{(n+1)n+1},$$

ove le δ_i sono pure arbitrarie. Ne segue:

$$(22) \quad M_\sigma(M E^{(i)})^n = \delta_i (e^{(i)} E^{(i)})^n e_\sigma^{(i)},$$

onde perchè (20) coincida con (8) basta porre in (21):

$$\delta_i = \frac{\pi_i^2}{(e^{(i)} E^{(i)})^n}.$$

Se $[f]$ è invece del tipo $[(11 \dots 1) 11 \dots 1]$ e si rinnovano le ipotesi fatte sopra per questo caso, in virtù delle (15) si ha:

$$(23) \quad \pi_1 : \pi_2 : \dots : \pi_r = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \dots : \frac{1}{h_r}$$

ed ogni forma M_λ^{n+1} coniugata ad α_λ^{n+1} è del tipo:

$$(24) \quad M_\lambda^{n+1} = \delta_\lambda^{r-1} e_\lambda^{n-r+2} + \delta_{r+1} e_\lambda^{(r+1)n+1} + \delta_{r+2} e_\lambda^{(r+2)n+1} + \dots + \delta_{n+1} e_\lambda^{(n+1)n+1},$$

ove δ_λ^{r-1} è una forma parametrica, le $\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_{n+1}$ sono costanti arbitrarie, e_λ differisce per un fattore costante da ciascuna delle $e'_\lambda, e''_\lambda, \dots, e_\lambda^{(r)}$. Se si tiene presente che e_λ è fattore $(r-1)$ -plo oppure r -plo per $E_\lambda^{(i)n}$ secondo che è $i \leq r$ oppure $i > r$, si ha:

$$\begin{aligned} (E^{(i)} e)^{n-r+2} E_\lambda^{(i)r-2} &\equiv 0, & \text{per } i \leq r, \\ (E^{(i)} e)^{n-r+1} E_\lambda^{(i)r-1} &\equiv 0, & \text{per } i > r; \end{aligned}$$

onde facilmente segue:

$$(25) \quad \begin{cases} M_{\sigma}(ME^{(i)})^n = \frac{n-r+2}{n+1} e_{\sigma}(\delta E^{(i)})^{r-1} (eE^{(i)})^{n-r+1}, & \text{per } i \leq r, \\ M_{\sigma}(ME^{(i)})^n = \delta_i e_{\sigma}^{(i)} (e^{(i)} E^{(i)})^n, & \text{per } i > r. \end{cases}$$

Perchè (20) coincida con (8) deve essere:

$$(26) \quad \begin{cases} M_{\sigma}(ME')^n : \dots : M_{\sigma}(ME^{(r)})^n : M_{\sigma}(ME^{(r+1)})^n : \dots : M_{\sigma}(ME^{(n+1)})^n \\ = \pi_1^2 e'_{\sigma} : \dots : \pi_r^2 e_{\sigma}^{(r)} : \pi_{r+1}^2 e_{\sigma}^{(r+1)} : \dots : \pi_{n+1}^2 e_{\sigma}^{(n+1)}. \end{cases}$$

Ora dalle (12), (13), (23) si deduce:

$$M_{\sigma}(ME')^n : \dots : M_{\sigma}(ME^{(r)})^n = \pi_1^2 e'_{\sigma} : \dots : \pi_r^2 e_{\sigma}^{(r)},$$

onde, posto per semplicità ad es. $e_{\lambda} = k_1 e'_{\lambda}$, se in (24) si fa:

$$\delta_i = k_i \frac{n-r+2}{n+1} \frac{\pi_i^2 (\delta E')^{r-1} (eE')^{n-r+1}}{\pi_i^2 (e^{(i)} E^{(i)})^n} \quad (i=r+1, r+2, \dots, n+1)$$

la (26) è soddisfatta. In questo caso però la determinazione di M_{λ}^{n+1} si può fare in ∞^{r-1} modi, rimanendo arbitraria la scelta di δ_{λ}^{r-1} ; il che è in accordo coll'osservazione in principio del n° 13.

La dimostrazione del teorema per un fascio qualunque di quadriche non specializzate e dotato di piramide polare è una generalizzazione della precedente e viene omessa per brevità.

20. Le considerazioni ora svolte possono condurre ad ulteriori proprietà per la *schiera associata* introdotta al n° 13.

Premetto un'osservazione. Se sulla schiera associata ad $[f]$ si opera in modo correlativo a quello seguito per ottenere da $[f]$ la schiera stessa, si viene a costruire un fascio che dirò *associato alla schiera*. Se avviene che il fascio associato alla schiera associata coincide col fascio dato, dirò brevemente che sussiste il *teorema di reciprocità*.

Ora si può dimostrare che per n pari sussiste il *teorema di reciprocità*. Ed inverso in tal caso è $(\alpha\alpha')^{n+1} = 0$, onde (n° 19) il fascio $[f]$ e la schiera associata sono polari reciproci rispetto a 2^n quadriche. Ne segue immediatamente che appunto il fascio associato alla schiera associata ad $[f]$ è lo stesso $[f]$; anzi ciò avviene in modo che una quadrica e un involuppo corrispondenti nella proiettività tra $[f]$ e la schiera associata posta al n° 13, sono pure corrispondenti in quella che correlativamente si può porre fra la schiera ed $[f]$ considerato come fascio associato a questa.

Il risultato può essere anche stabilito direttamente e completato come segue. Dalla

$$\begin{pmatrix} E_{\lambda}^{(i)n} & e_{\lambda}^{(i)} & E_{\lambda}^{(i)n} \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

di GORDAN *) si ha:

*) Se F_1, F_2, F_3 sono tre forme binarie risp. d'ordine n_1, n_2, n_3 , con $\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$, dove è $p_r \geq 0$ e, per $p_1 \neq 0$, si ha $p_2 + p_3 = n_1$, mentre, per $p_1 = 0$ si ha $p_2 + p_3 \leq n_1$, viene richiamata la se-

$$(E_\lambda^{(i)n} e_\lambda^{(i)}, E_\lambda^{(i)n}) + \frac{n}{n+1} [(E_\lambda^{(i)n}, e_\lambda^{(i)})^1, E_\lambda^{(i)n}]^{n-1} = (E^{(i)} \bar{E}^{(i)})^n e_\lambda^{(i)}$$

ove si è posto $\bar{E}_\lambda^{(i)n} = E_\lambda^{(i)n}$; e dalla:

$$\begin{pmatrix} E_\lambda^{(i)n}, e_\lambda^{(i)}, E_\lambda^{(i)n} \\ 0 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha:

$$[(E_\lambda^{(i)n}, e_\lambda^{(i)})^1, E_\lambda^{(i)n}]^{n-1} = [(E_\lambda^{(i)n}, E_\lambda^{(i)n})^{n-1}, e_\lambda^{(i)}]^1 + \frac{1}{2} (E^{(i)} \bar{E}^{(i)})^n e_\lambda^{(i)};$$

onde si deduce:

$$(27) \quad \alpha_\lambda (\alpha E^{(i)})^n = - \frac{n}{n+1} [(E_\lambda^{(i)n}, E_\lambda^{(i)n})^{n-1}, e_\lambda^{(i)}]^1 + \frac{n+2}{2(n+1)} (E^{(i)} \bar{E}^{(i)})^n e_\lambda^{(i)}$$

qualunque sia n . Ma, riprendendo l'ipotesi di n pari, si ha più semplicemente:

$$(28) \quad \alpha_\lambda (\alpha E^{(i)})^n = \frac{n+2}{2(n+1)} (E^{(i)} \bar{E}^{(i)})^n e_\lambda^{(i)}$$

e l'equazione della schiera associata al fascio

$$(29) \quad \sum_{i=1}^{n+1} e_\lambda^{(i)} x_i^2 = 0$$

prende la forma:

$$(30) \quad \sum_{i=1}^{n+1} (E^{(i)} \bar{E}^{(i)})^n e_\lambda^{(i)} u_i^2 = 0.$$

Se pongo per brevità:

$$(31) \quad \varepsilon_\lambda^{(i)} = \alpha_\lambda (\alpha E^{(i)})^n$$

ed

$$(32) \quad E_\lambda^{(i)n} = \bar{E}_\lambda^{(i)n} = \varepsilon'_\lambda \varepsilon''_\lambda \dots \varepsilon_\lambda^{(i-1)} \varepsilon_\lambda^{(i+1)} \dots \varepsilon_\lambda^{(n+1)},$$

il fascio associato alla schiera (30) è rappresentato da:

$$(33) \quad \sum_{i=1}^{n+1} (E^{(i)} \bar{E}^{(i)})^n \varepsilon_\lambda^{(i)} x_i^2 = 0.$$

Ma dalle (28), (31), (32) si deduce:

$$(E^{(i)} \bar{E}^{(i)})^n \varepsilon_\lambda^{(i)} = \left(\frac{n+2}{2(n+1)} \right)^{2n+1} [(E' \bar{E}')^n (E'' \bar{E}'')^n \dots (E^{(n+1)} \bar{E}^{(n+1)})^n]^2 e_\lambda^{(i)},$$

onde (33) in generale coincide con (29), cioè sussiste il teorema di reciprocità. L'unico caso di eccezione è dato dall'annullarsi di uno degli invarianti $(E^{(i)} \bar{E}^{(i)})^n$, che conduce

guente formula:

$$\begin{aligned} & \sum_{\circ k} \frac{\binom{n_2 - p_1 - p_3}{k} \binom{p_2}{k}}{\binom{n_1 + n_2 - 2p_3 - k + 1}{k}} [(F_1, F_2)^{p_3+k}, F_3]^{p_1+p_2-k} \\ &= (-1)^{p_1} \sum_{\circ k} \frac{\binom{n_3 - p_1 - p_2}{k} \binom{p_3}{k}}{\binom{n_1 + n_3 - 2p_2 - k + 1}{k}} [(F_1, F_3)^{p_2+k}, F_2]^{p_1+p_3-k}. \end{aligned}$$

Per questa v. GORDAN, *Ueber das Formensystem binärer Formen* (Leipzig, 1875); pag. 11, form. (III).

all'indeterminazione di (33), risultato prevedibile per lo specializzarsi dell'involuppo corrente (30) della schiera associata.

La (28), tenute presenti le (10) e (11), permette di scrivere le equazioni delle 2ⁿ quadriche sopra ricordate, riunendole nella:

$$\sqrt{(E' \bar{E}')^n} u_1^2 \pm \sqrt{(E'' \bar{E}'')^n} u_2^2 \pm \dots \pm \sqrt{(E^{(n+1)} \bar{E}^{(n+1)})^n} u_{n+1}^2 = 0,$$

ove i doppi segni sono da prendersi in tutti i modi.

Per n dispari in generale non sussiste il teorema di reciprocità, come si può verificare ad es. per $n = 3$ *). Se però il gruppo dei coni è ad invariante $(n+1)$ -lineare nullo, cioè (vedi n° 7) se si ha: $(\alpha \alpha')^{n+1} = 0$, sono ancora applicabili le considerazioni del n° 19, quindi $[f]$ e la schiera associata sono polari-reciproci rispetto a 2ⁿ quadriche. In questo caso sussiste dunque il teorema di reciprocità, e precisamente in modo che una quadrica di $[f]$ e l'involuppo della schiera associata corrispondenti nella proiettività del n° 13 si corrispondono pure in quella posta correlativamente fra la schiera ed $[f]$, pensato come fascio associato. Un altro caso in cui, anche per n dispari, sussiste il teorema di reciprocità si incontrerà fra breve (vedi n° 23).

21. Al n° 14 si è osservato che la schiera:

$$(34) \quad d_1 \beta_\xi^n + d_2 \beta_\eta^n = 0$$

è polare-reciproca di $[f]$ rispetto a ciascuna delle 2ⁿ quadriche rispetto a cui sono polari-reciproche f_ξ ed f_η . Il risultato può essere completato e messo in relazione col n° 19.

Perciò, posto:

$$(35) \quad M_\lambda^{n+1} = \alpha_\eta^{n+1} (\xi \lambda)^{n+1} - \alpha_\xi^{n+1} (\eta \lambda)^{n+1},$$

osservo che si ha:

$$(36) \quad M_\sigma M_\lambda^n = \alpha_\eta^{n+1} (\xi \sigma) (\xi \lambda)^n - \alpha_\xi^{n+1} (\eta \sigma) (\eta \lambda)^n,$$

onde segue:

$$(37) \quad M_\sigma (M \beta)^n = -\alpha_\eta^{n+1} (\xi \sigma) \beta_\xi^n + \alpha_\xi^{n+1} (\eta \sigma) \beta_\eta^n,$$

e (34) coincide con $M_\sigma (M \beta)^n = 0$, quando vi si ponga:

$$d_1 = -\alpha_\eta^{n+1} (\xi \sigma),$$

$$d_2 = \alpha_\xi^{n+1} (\eta \sigma).$$

Viene così stabilito quale involuppo di (34) corrisponda ad f_σ nella polarità di cui sopra, che, essendo $(\alpha M)^{n+1} = 0$, coincide con quella definita dalle considerazioni del n° 19.

Tenuta presente la (36), l'equazione della schiera (34) si può pure scrivere così:

$$\sum_{i=1}^{n+1} [\alpha_\eta^{n+1} (\xi \sigma) E_\xi^{(i)n} - \alpha_\xi^{n+1} (\eta \sigma) E_\eta^{(i)n}] u_i^2 = 0,$$

ossia:

$$\sum_{i=1}^{n+1} E_\xi^{(i)n} E_\eta^{(i)n} [(\xi \sigma) e_\eta^{(i)} - (\eta \sigma) e_\xi^{(i)}] u_i^2 = 0,$$

*) Di questo caso mi occuperò in una prossima occasione.

ed infine, soppresso il fattore $(\xi \eta)$:

$$(38) \quad \sum_i^{n+1} E_{\xi}^{(i)n} E_{\eta}^{(i)n} e_{\sigma}^{(i)} u_i^2 = 0.$$

Ne segue che f_{ξ} ed f_{η} sono polari reciproche precisamente rispetto a ciascuna delle 2^n quadriche-inviluppo:

$$(39) \quad \sqrt{E_{\xi}'' E_{\eta}''} u_1^2 \pm \sqrt{E_{\xi}''' E_{\eta}'''} u_2^2 \pm \dots \pm \sqrt{E_{\xi}^{(n+1)n} E_{\eta}^{(n+1)n}} u_{n+1}^2 = 0,$$

come del resto si può facilmente verificare.

Pure al n° 14 si è osservato che se f_{ξ} ed f_{η} vengono a coincidere nella stessa f_{μ} di $[f]$ la (34) si riduce alla:

$$(40) \quad \beta_{\lambda} \beta_{\mu}^{n-1} = 0.$$

Per stabilire quale inviluppo (40) corrisponda ad f_{σ} nella polarità rispetto ad f_{μ} , osservo che la (35) si può porre sotto la forma:

$$(41) \quad M_{\lambda}^{n+1} = (\xi \eta) \alpha_{\lambda} \sum_{p=0}^n \alpha_{\xi}^p \alpha_{\eta}^{n-p} (\xi \lambda)^{n-p} (\eta \lambda)^p.$$

Soppresso il fattore $(\xi \eta)$, indi supposto che $f_{\xi} f_{\eta}$ coincidano con f_{μ} , M_{λ}^{n+1} si riduce a:

$$(42) \quad N_{\lambda}^{n+1} = \alpha_{\lambda} \alpha_{\mu}^n (\mu \lambda)^n,$$

onde l'inviluppo $N_{\sigma} (N \beta)^n = 0$ corrispondente ad f_{σ} è quello di equazione:

$$(43) \quad \alpha_{\sigma} \alpha_{\mu}^n \beta_{\mu}^n - n (\mu \sigma) \alpha_{\mu}^n (\alpha \beta) \beta_{\mu}^{n-1} = 0.$$

Si può ora domandare quando (43) coincida coll'inviluppo $\beta_{\sigma} \beta_{\mu}^{n-1} = 0$.

Risulta facilmente che ciò avviene quando, e solo quando, sia

$$(\mu \sigma) \alpha_{\sigma} \alpha_{\mu}^n = 0,$$

cioè quando f_{σ} coincide con f_{μ} , oppure colla quadrica di $[f]$ coniugata come luogo ad f_{μ} . È così risolta una questione posta al già citato n° 14.

Se ne deduce inoltre l'interessante proposizione che segue:

Se di due quadriche distinte la prima è coniugata come luogo rispetto alla seconda, l'inviluppo degli iperpiani secanti la prima in una quadrica coniugata come luogo alla sezione della seconda è polare della prima quadrica rispetto alla seconda; e reciprocamente.

§ 6. I fasci ciclici.

22. Suppongo:

$$j_{\lambda}^{3(n-3)} = (\alpha' \alpha'')^2 (\alpha'' \alpha)^2 (\alpha \alpha')^2 \alpha_{\lambda}^{n-3} \alpha_{\lambda}'^{n-3} \alpha_{\lambda}''^{n-3} \equiv 0,$$

escludendo però il caso in cui α_{λ}^{n-1} sia potenza di una forma lineare. Con una scelta opportuna degli elementi di riferimento nel campo binario è allora lecito porre *):

$$\alpha_{\lambda}^{n+1} = \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1},$$

*) Cfr. MAISANO, *La sestica binaria* [Mem. Acc. Lincei, serie III, vol. XIX], Cap. I, Teor. VI. Ivi è citato il precedente lavoro dello stesso autore: *Sopra due classi di forme binarie* [Atti Acc. Lincei, 1883].

anzi, fissando convenientemente il punto unità in S_n (e prendendo, come nel § precedente, come fondamentale la piramide polare rispetto a tutte le quadriche di $[f]$), si può scrivere:

$$(1) \quad e_{\lambda}^{(i)} = \lambda_1 - \eta^i \lambda_2,$$

dove con η indico una radice $(n+1)$ -esima primitiva dell'unità.

Il gruppo dei coni è quindi trasformato in sè dall'omografia binaria

$$(2) \quad \lambda_1 \lambda'_2 - \eta \lambda_2 \lambda'_1 = 0$$

ciclica d'indice $n+1$ e da ciascuna delle analoghe in corrispondenza alle rimanenti radici $(n+1)$ -esime primitive dell'unità.

Perciò dico *fascio ciclico* il fascio in questione.

Posto:

$$(3) \quad \Delta = \Delta_{\lambda}^2 = \lambda_1 \lambda_2,$$

risulta facilmente (per $p > 0$):

$$(4) \quad (\alpha \alpha')^{2p} \alpha_{\lambda}^{n-2p+1} \alpha'_{\lambda}{}^{n-2p+1} = -2 \Delta^{n-2p+1}.$$

Le due quadriche del gruppo $\Delta_{\lambda}^2 = 0$ hanno dunque un posto notevole nella geometria del fascio e verranno dette le sue *quadriche principali*. Esse costituiscono gli elementi uniti di (2) e, come si deduce dalle (1), sono rispettivamente di equazione:

$$(5) \quad \begin{cases} r_x^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 0, \\ s_x^2 \equiv \eta x_1^2 + \eta^2 x_2^2 + \dots + \eta^n x_n^2 + x_{n+1}^2 = 0. \end{cases}$$

Dalla (2) del n° 7 e dalla (3) del presente n° segue:

$$(r' r'' \dots r^{(k)} s' s'' \dots s^{(n-k+1)})^2 = \alpha_1^k \alpha_2^{n-k+1},$$

onde per $0 < k < n+1$:

$$(r' r'' \dots r^{(k)} s' s'' \dots s^{(n-k+1)})^2 = 0.$$

Cioè: *Per le due quadriche principali di un fascio ciclico si annullano gli n invarianti $[1, n]; [2, n-1]; \dots; [n-1, 2]; [n, 1]$.*

Reciprocamente, se per due quadriche distinte di S_n si annullano gli invarianti $[1, n]; [2, n-1]; \dots; [n-1, 2]; [n, 1]$, senza che si annulli alcuno dei discriminanti $[0, n+1]; [n+1, 0]$, le due quadriche sono quadriche principali di un fascio ciclico *). Ciò si dimostra facilmente assumendo le due quadriche come fondamentali nella determinazione parametrica del campo binario.

Considero l'involuzione I che ha per elementi doppi le quadriche principali, e cioè:

$$(6) \quad \lambda_1 \lambda'_2 + \lambda_2 \lambda'_1 = 0.$$

Se una quadrica f_{λ} è k -armonica alla sua coniugata in I si ha:

$$\alpha_{\lambda}^k \alpha_{\lambda'}^{n-k+1} \equiv \lambda_1^{n+1} - (-1)^{n-k+1} \lambda_2^{n+1} = 0;$$

*) Se si annulla anche il discriminante di una delle due quadriche, questa è l'unica quadrica specializzata del fascio; se si annullano entrambi i discriminanti il fascio è uno generico di quadriche tutte specializzate.

onde per $n - k + 1$ pari le quadriche soddisfacenti alla detta proprietà costituiscono il gruppo dei coni, mentre per $n - k + 1$ dispari esse costituiscono il gruppo:

$$(7) \quad \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} = 0,$$

pure mutato in sè dall'omografia (2).

D'ora innanzi indico con Γ_i il cono di $[f]$ corrispondente ad $e_\lambda^{(i)}$. Osservo inoltre che, se χ è radice $(n + 1)$ -esima di -1 ed a un tempo radice $2(n + 1)$ -esima primitiva di 1 , le quadriche del gruppo (7) corrispondono ai fattori lineari

$$h_\lambda^{(i)} = \lambda_1 - \chi^{2i-1} \lambda_2 \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1),$$

ed indico con K_i la quadrica corrispondente ad $h_\lambda^{(i)}$.

A complemento dei precedenti risultati, si ha così:

Se n è dispari:

1) *La I trasforma in sè il gruppo dei coni, essendo in essa coniugati*

$$\Gamma_i \text{ e } \Gamma_{i+\frac{n+1}{2}} \quad \left(i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}\right);$$

per i due coni $\Gamma_i, \Gamma_{i+\frac{n+1}{2}}$ si annulla ciascuno degli $\frac{n+3}{2}$ invarianti

$$[2p, n - 2p + 1] \quad \left(p = 0, 1, \dots, \frac{n+1}{2}\right).$$

2) *La I trasforma in sè il gruppo (7), essendo in essa coniugate*

$$K_i \text{ e } K_{i+\frac{n+1}{2}} \quad \left(i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}\right);$$

per le due quadriche $K_i, K_{i+\frac{n+1}{2}}$ si annulla ciascuno degli $\frac{n+1}{2}$ invarianti

$$[2p + 1, n - 2p] \quad \left(p = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}\right).$$

Se n è pari e si pone, come è lecito, $\chi = -1$, la I trasforma il gruppo dei coni nel gruppo (7), essendo in essa coniugati Γ_i e K_l , dove è $l = \frac{i+1}{2}$ oppure $l = \frac{n+i+2}{2}$, secondo che i è dispari o pari. Per Γ_i e K_l si annulla ciascuno degli $\frac{n+2}{2}$ invarianti

$$[2p + 1, n - 2p] \quad \left(p = 0, 1, \dots, \frac{n}{2}\right).$$

L'enunciato 1) è in un certo senso generalizzato come segue.

Le quadriche di $[f]$ k -armoniche a Γ_i vengono fornite dalla

$$(8) \quad \eta^{(n-k+1)i} \lambda_1^k - \lambda_2^k = 0,$$

ossia dalla

$$\lambda_1^k - (\eta^i \lambda_2)^k = 0,$$

ed infine dalle

$$(9) \quad \lambda_1 - \psi^t \eta^i \lambda_2 = 0 \quad (t = 0, 1, \dots, k - 1),$$

dove ψ è una radice k -esima primitiva dell'unità. Il gruppo (8), come si deduce dalle (9), è dunque costituito dalle quadriche trasformate di Γ_i nelle successive potenze dell'omografia

$$(10) \quad \lambda'_1 \lambda_2 - \psi \lambda'_2 \lambda_1 = 0$$

ciclica d'indice k . Il caso però che presenta maggior interesse è quello in cui k è divisore di $n + 1$ e precisamente è:

$$n + 1 = kq.$$

È allora lecito porre:

$$\psi = \eta^q$$

e le (9) divengono:

$$(11) \quad \lambda_i - \eta^{q^{i+1}} \lambda_2 = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, k-1).$$

Segue: Se k è divisore di $n + 1$ ed è $n + 1 = kq$, i coni di $[f]$ si distribuiscono in q gruppi di k coni ciascuno, appartenendo ad uno stesso gruppo due coni K_i, K_l pei quali sia $i \equiv l \pmod{q}$. Per due coni di uno stesso gruppo si annulla ciascuno dei $(q+1)$ invarianti $[kp, k(q-p)]$ ($p = 0, 1, \dots, q$).

23. Termino con un breve cenno sulla schiera associata ($n^\circ 13, 20$) per il caso del fascio ciclico. Se si osserva che il primo gruppo polare di una delle quadriche principali rispetto al gruppo dei coni è costituito dall'altra contata n volte, risulta facilmente che la schiera associata ad $[f]$ è quella individuata dalle due quadriche principali considerate come inviluppo.

Se ne deduce che $[f]$ e la schiera sono polari reciproci rispetto a ciascuna delle 2^n quadriche rispetto alle quali sono polari reciproche le due quadriche principali. Quindi:

1) Sussiste il teorema di reciprocità (qualunque sia n).

2) La schiera associata ad un fascio ciclico è ciclica ed ha per inviluppi principali le quadriche principali del fascio, pensate come inviluppo.

Per il caso di n pari, che si ridurrebbe ad una particolarizzazione di risultati precedenti, mi limito ad osservare che l'involuzione di cui si tratta nell'enunciato in fine del $n^\circ 13$, coincide con I .

Per n dispari, posto come altrove

$$\varepsilon_\lambda^{(i)} = \alpha_\lambda (\alpha E^{(i)})^n,$$

osservo che si ha

$$\varepsilon_\lambda^{(i)} = E_2^{(i)n} \lambda_1 + E_1^{(i)n} \lambda_2,$$

ed, essendo

$$E_1^{(i)n} = 1, \quad E_2^{(i)n} = \eta^{-i},$$

anche

$$\varepsilon_\lambda^{(i)} = \eta^{-i} \lambda_1 + \lambda_2.$$

Se suppongo

$$l - i \equiv \frac{n + 1}{2}, \pmod{n + 1} \quad (0 < l \leq n + 1),$$

onde

$$\eta^{l-i} = -1,$$

segue

$$\varepsilon_\lambda^{(i)} = -\eta^{-l} (\lambda_1 - \eta^l \lambda_2),$$

ossia

$$\varepsilon_\lambda^{(i)} = -\eta^{-l} e_\lambda^{(l)}.$$

Dunque: Se Γ_i, Γ_l sono due coni coniugati in I , nell'ap rogettività posta al $n^\circ 13$ fra $[f]$ e la schiera associata, a Γ_i (risp. a Γ_l) corrisponde l'inviluppo specializzato avente

per nucleo una quadrica giacente nella faccia della piramide fondamentale opposta al vertice di Γ_1 (risp. di Γ_i).

La proiettività del n° 13 risulta dunque dal prodotto dell'involuzione I in $[f]$, per la proiettività, tra $[f]$ e la schiera, subordinata alle polarità che scambiano l'una nell'altra le quadriche principali.

Osservo infine che le ultime considerazioni si possono mettere in rapporto con quelle del n° 21, assumendo come gruppo $M_{\lambda}^{n+1} = 0$ il gruppo (7) del n° 22.

Sondrio, 21 gennaio 1907.

LUIGI BRUSOTTI.