Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ sopra un piano.

(del dott. A. ARMENANTE, prof. a Chieti.)

La bella Memoria del professor CLEBSCH (*) mi ha servito di norma in questo lavoro, nel quale trovo, per le superficie gobbe, oltre i risultati comuni a tutte le superficie algebriche rappresentabili punto per punto su di un piano, ancora alcuni altri caratteristici per le superficie gobbe. Tra questi sono da notare: la esistenza di una curva piana che ha intimo rapporto colla superficie ed è in generale punteggiata proiettivamente alla curva doppia della superficie; e la riduzione della rappresentazione ad un tipo normale, nel quale le immagini delle generatrici sono rette di un fascio, e quelle delle sezioni piano sono curve del minimo ordine possibile tra quelle soddisfacenti alle condizioni della rappresentazione.

Le superficie gobbe del 3.^o e 4.^o ordine, non potendo racchiudersi nelle considerazioni generali, sono state trattate a parte effettuandone la rappresentazione geometricamente. E come quelle del 3.^o ordine sono caso particolare delle superficie con una direttrice rettilinea della massima molteplicità (**), così ne abbiamo intrapresa la rappresentazione nel caso generale. Prima di passare oltre, facciamo notare che il prof. CREMONA nella sua Memoria: *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe su di un piano e determinazione delle loro curve assintotiche* (***) ha dimostrato che le superficie gobbe rappresentabili (punto per punto) su di un piano sono esclusivamente le superficie del genere $p=0$.

(*) *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* ecc. (Mathematische Annalen, I Band. S. 253.)

(**) CAYLEY, *A second Memoir on skew surfaces otherwise scrolls*.

(***) Tomo 1.^o di questi Annali.

§ 1. Rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ su di un piano.

Si possono, come è noto (*), assumere per equazioni di una superficie gobba irriducibile S_n di ordine n e genere $p=0$, le

$$\left. \begin{aligned} f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 &= 0 \\ \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 + \phi_4 x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

nelle quali f e ϕ sono polinomi interi di un parametro λ degli ordini m, μ , tali che

$$m + \mu = n \quad m = < n,$$

e tali che per alcun valore di λ non risulti

$$\frac{f_1}{\phi_1} = \frac{f_2}{\phi_2} = \frac{f_3}{\phi_3} = \frac{f_4}{\phi_4}.$$

Tagliamo ora la generatrice (1) di S_n con un piano passante per una retta fissa, la equazione del quale

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) = k(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4)$$

dipende dal parametro variabile k . Per tal modo otteniamo le coordinate di un punto della (1), ossia di un punto di S_n , espresse coi parametri λ e k mediante le

$$\rho x_s = \theta_s(\lambda) + k \omega_s(\lambda), \quad s=1, 2, 3, 4, \quad (2)$$

dinotando con θ_s ed ω_s i complementi algebrici di β_s ed α_s nel determinante

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{vmatrix}$$

Se nelle (2) poniamo

$$\lambda = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad k = \frac{\xi_3}{\xi_2}$$

(*) SCHWARTZ, *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (G. Crelle-Borchardt, t. 66).

esse prendono la forma omogenea

$$\rho x_s = \pi_s(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_s(\xi_1, \xi_2), \quad (3)$$

alla quale dunque possiamo sempre ridurre le equazioni di una superficie gobba S_n di genere $p=0$. Reciprocamente ogni sistema (3) rappresenta una superficie di tale natura; giacchè eliminando dalle (3) ρ e ξ_3 , si hanno le equazioni di una retta, i coefficienti delle quali sono funzioni razionali del parametro $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$.

Se consideriamo ξ_1, ξ_2, ξ_3 come coordinate di un punto mobile in un dato piano P , le (3) ci dicono che in generale ad ogni punto di P corrisponde un punto solo di S_n . Viceversa, osservando che per ogni sistema (x) appartenente ad un punto di S_n vi ha un solo sistema (ξ) che verifichi ad un tempo le quattro equazioni (3), possiamo anche dire che ad un punto di S_n corrisponde in generale un punto solo del piano P . Dunque S_n è punteggiata proiettivamente ad un piano P .

La immagine su P di una generatrice di S_n è una retta del fascio α ($\xi_1 = \xi_2 = 0$); giacchè il rapporto $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ resta costante per tutti i punti corrispondenti ad una generatrice.

Assumiamo ora che le curve di P

$$\pi_s(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_s(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad s=1, 2, 3, 4,$$

siano di ordine $\nu + \tau + l$, passino per σ punti fissi $h_1, h_2, \dots, h_\sigma$, e nel punto α abbiano τ tangenti comuni $l_1, l_2, \dots, l_\tau$.

Ciò posto, alla sezione fatta in S_n dal piano

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 = 0$$

corrisponde su P una curva Γ , la equazione della quale

$$\Gamma \equiv \sum_{s=1}^{s=4} \gamma_s (\pi_s + \xi_3 \omega_s) = 0$$

mostra che è di ordine $\nu + \tau + l$, ha in α un punto multiplo secondo $\nu + \tau$ con le τ tangenti l , e passa per i σ punti h .

I numeri ν, τ, σ, n sono legati dalla relazione

$$n = 2\nu + \tau - \sigma + 1,$$

la quale dinota il numero delle intersezioni variabili delle immagini di due sezioni piane.

Le curve Γ evidentemente formano un sistema lineare triplicemente infinito, epperò sono soggette a

$$\frac{(\nu + \tau + 1)(\nu + \tau + 1 + 3)}{2} - 3$$

condizioni comuni, cioè verificano oltre le

$$\frac{(\nu + \tau + 1)(\nu + \tau)}{2} + (\tau + \sigma)$$

condizioni relative al punto a , alle τ tangenti l ed ai σ punti h , ancora altre $n-2$ condizioni.

Poichè nelle (4) restano arbitrari tre coefficienti, possiamo disporre in modo che la Γ abbia un punto doppio in un punto dato ξ del piano, con che resta individuato un unico sistema di valori γ , differente da un punto ad un altro di una stessa retta del fascio a ; e siccome tale condizione implica che il piano della sezione sia tangente ad S_n nel punto x corrispondente di ξ , risulta il teorema noto:

« I piani tangenti ad S_n lungo una generatrice sono in generale tra loro differenti. »

Se poi facciamo che il punto ξ non sia fissato, possiamo sottoporre le Γ ad avere 1, 2, 3 punti doppi, o un punto triplo, restando indeterminati rispettivamente 2, 1, 0, 0 coefficienti γ . Dunque i teoremi noti:

« Vi ha una doppia infinità di piani tangenti ad S_n ed una semplice infinità di piani bitangenti. »

« Vi è un numero finito di piani tritangenti e di punti tripli. »

§ 2. Curve e punti di S_n che corrispondono ai punti fondamentali

$a, h_1, \dots, h_\sigma$, ed alle rette $l_1, l_2, \dots, l_\tau, ah_1, ah_2, \dots, ah_\sigma$ di P .

Punto a . Per vedere quali punti di S_n rappresenti a , consideriamo il punto di una retta ap infinitamente vicino ad a . Se $\xi_1 = k\xi_2$ è la equazione di questa retta, le (3) ci danno, facendo tendere ξ_2 a zero, per le coordinate del punto cercato le

$$\rho x_i = \omega_i(k, 1), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Facendo variare k otterremo una serie infinita di punti formanti su S_n una

curva del genere $p=0$; questi punti hanno tutti su P per immagine il punto a . L'ordine di questa curva è il numero di punti di essa posti in un piano

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4 = 0,$$

ossia il numero dei valori variabili di k che soddisfanno la

$$\sum_1^4 \delta_i \omega_i(k, 1) = 0.$$

Ora questa equazione è dell'ordine $\nu + \tau$, ed ammette come radici i τ parametri delle rette l che sono indipendenti da δ , perciò ν è il numero delle radici k che dipendono da δ : ossia ν è l'ordine della curva (4).

« Il punto a è dunque la immagine di una curva di S_n del genere $p=0$ e dell'ordine ν . »

Punti h . Rappresentando con ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 le coordinate di uno dei punti h , per es. h' , e quelle del punto β' infinitamente vicino a h' con $\xi'_1, \xi'_2 + \eta\lambda, \xi'_3 + \eta\mu$, si cava dalle (3) che a β' corrisponde su S_n il punto

$$\rho x_i = \lambda \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi'_2} \right) + \mu \omega'_i.$$

Facendo variare λ e μ otterremo dunque tutti i punti di S_n che corrispondono a h' , i quali si trovano evidentemente sulla retta

$$\begin{vmatrix} x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 \\ \omega'_1 & , & \omega'_2 & , & \omega'_3 & , & \omega'_4 \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi'_2} & , & \frac{\partial \pi_2}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi'_2} & , & \frac{\partial \pi_3}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi'_2} & , & \frac{\partial \pi_4}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_4}{\partial \xi'_2} \end{vmatrix} = 0.$$

« Ogni punto h è dunque la immagine di una generatrice di S_n . »

Rette l . Se ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 sono le coordinate di un punto della retta l' , ad esso corrisponderà su S_n il punto

$$\rho x_i = \pi_i(\xi'_1, \xi'_2),$$

poichè per ogni punto di l si ha $\omega_i(\xi'_1, \xi'_2) = 0$. Se facciamo variare il punto di l , il rapporto $\frac{\xi'_1}{\xi'_2}$ resta costante, epperò anche il punto corrispondente su S_n non muta: ossia tutti i punti di l ammettono un unico corrispondente su S_n .

« Dunque ciascuna retta l è la immagine di un punto di S_n . »

Rette ah . Dinotando con ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 le coordinate del punto h' , la equazione della retta ah' è $\xi_1 = \frac{\xi'_1}{\xi'_2} \xi_2$; onde ad uno qualunque dei punti di questa retta corrisponde su S_n il punto

$$\rho x_i = \left(\frac{\xi_2}{\xi'_2} \right)^{(\nu+\tau+1)} \cdot \pi_i(\xi'_1, \xi'_2) + \xi_3 \left(\frac{\xi_2}{\xi'_2} \right)^{\nu+\tau} \omega_i(\xi'_1, \xi'_2)$$

ossia

$$\rho x_i = \left(\frac{\xi_2}{\xi'_2} \right)^{(\nu+\tau)} \omega_i(\xi'_1, \xi'_2) \frac{\xi_3 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_3}{\xi'_2},$$

a causa di

$$\pi_i(\xi'_1, \xi'_2) + \xi'_3 \omega_i(\xi'_1, \xi'_2) = 0.$$

Ora qualunque sieno i valori di ξ_2, ξ_3 , queste coordinate sono sempre proporzionali a quelle del punto

$$\rho x_i = \omega_i(\xi'_1, \xi'_2);$$

dunque qualunque sia il punto della retta ah' , ad esso corrisponderà sempre lo stesso punto di S_n , posto evidentemente sulla generatrice rappresentata in h' . Da ciò segue che:

« Ciascuna delle rette ah è la immagine di un punto di quella generatrice di S_n che è rappresentata nel relativo punto fondamentale h .

È manifesto che la superficie non ha altri punti o linee, diverse dalle già esaminate, che siano rappresentabili in linee o punti di P .

§ 3. Curva doppia di S_n .

La curva doppia H di una superficie gobba è il luogo geometrico dei punti di intersezione delle generatrici, che si segano; quindi ogni suo punto m appartenendo a 2, o più generatrici se H fosse multipla in luogo di doppia, avrà su P per immagine il sistema di 2, o più, punti: ossia la immagine di H non corrisponderà punto per punto ad H . Viceversa una curva di P che non corrisponde punto per punto ad una curva di S_n è la immagine di una curva H multipla per S_n . Infatti, se $\mu, \mu', \dots$ sono più punti di P che corrispondano ad uno stesso punto m di S_n , le rette $a\mu, a\mu', \dots$ saranno

immagini di generatrici che passano per m . Dunque m è multiplo per S_n , ossia appartiene alla curva multipla della superficie.

In ciò che segue introdurremo, oltre la curva immagine di H , ancora un'altra curva ϕ , punteggiata proiettivamente ad H , quando questa curva non è che doppia per S_n : curva che può avere una certa importanza nella teoria delle superficie gobbe di genere $p=0$.

§ 4. Curva ϕ punteggiata proiettivamente ad H .

Se ξ, ξ' dinotano i 2 punti di P , che corrispondono ad un stesso punto m di H , le coordinate x di m sono date da

$$\rho x = \pi_i(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_i(\xi_1, \xi_2) = \lambda \{ \pi_i(\xi'_1, \xi'_2) + \xi'_3 \omega_i(\xi'_1, \xi'_2) \}, \quad (A)$$

colle relazioni

$$\pi_i(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_i(\xi_1, \xi_2) = \lambda \{ \pi_i(\xi'_1, \xi'_2) + \xi'_3 \omega_i(\xi'_1, \xi'_2) \}, \quad i=1, 2, 3, 4,$$

dalle quali eliminando ξ_3 , λ , e $\lambda \xi'_3$ si ha la

$$R = \begin{vmatrix} \pi_1 & \omega_1 & \pi'_1 & \omega'_1 \\ \pi_2 & \omega_2 & \pi'_2 & \omega'_2 \\ \pi_3 & \omega_3 & \pi'_3 & \omega'_3 \\ \pi_4 & \omega_4 & \pi'_4 & \omega'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Evidentemente R è divisibile per $(\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2)^2$, e per i fattori $(\xi_1 - k \xi_2)$, $(\xi'_1 - k \xi'_2)$ che si riferiscono alle τ rette l ed alle σ rette ah : onde sopprimendo tali fattori, il quoziente R' sarà una funzione simmetrica di $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ e $\frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, e la $R'=0$ è la equazione che lega i parametri delle immagini di due generatrici che si tagliano.

La $R'=0$, essendo dell'ordine

$$(\nu + \tau + 1) + (\nu + \tau) - (2 + \tau + \sigma) = n - 2$$

rispetto a ciascuno dei parametri $\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, ci porge il teorema noto:

« Ciascuna generatrice di S_n è incontrata da altre $n-2$. »

Se nella $R'=0$ facciamo $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, abbiamo i parametri delle immagini

delle generatrici singolari, cioè di quelle lungo le quali il piano tangente è costante.

« Dunque in generale vi sono su S_n $2(n-2)$ generatrici singolari. »

Dati i 2 punti ξ e ξ' , che corrispondono ad uno stesso punto m di H , le coordinate di m , a causa delle (A), sono date da

$$\rho x_s = \begin{vmatrix} \alpha, & \omega_s \pi_1 - \omega_1 \pi_s, & \pi'_1 \omega'_1 \\ \beta, & \omega_s \pi_2 - \omega_2 \pi_s, & \pi'_2 \omega'_2 \\ \gamma, & \omega_s \pi_3 - \omega_3 \pi_s, & \pi'_3 \omega'_3 \\ \delta, & \omega_s \pi_4 - \omega_4 \pi_s, & \pi'_4 \omega'_4 \end{vmatrix},$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti affatto arbitrarie.

Il determinante precedente è divisibile per $\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1$ e per i $\sigma + \tau$ fattori $(\xi_1 - k \xi_2), (\xi'_1 - k \xi'_2)$, relativi ai parametri k delle $\sigma + \tau$ rette l ed ah . Tolti questi fattori dal determinante, resterà per x_s una espressione intera, razionale e simmetrica di $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ e $\frac{\xi'_1}{\xi'_2}$ dell'ordine $(\nu + \tau) + (\nu + \tau + 1) - (\tau + \sigma + 1) = n - 1$ rispetto a ciascuno dei rapporti $\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$.

Poniamo ora tanto nella R' , quanto nella espressione di x_s ,

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi'_1}{\xi'_2} = \frac{z_2}{z_3}, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} \cdot \frac{\xi'_1}{\xi'_2} = \frac{z_4}{z_3};$$

allora la $R' = 0$ si muta in una equazione

$$\phi(z_1, z_2, z_3) = 0 \quad (1)$$

omogenea dell'ordine $n - 2$ nelle z , mentre le x sono date dalle espressioni

$$\rho x_s = \psi_s(z_1, z_2, z_3) \quad (2)$$

omogenee dell'ordine $n - 1$ nelle z .

Segue da ciò che la curva doppia di S_n è data dalle (1) e (2), supposte coesistere.

Immaginando le z come coordinate di un punto mobile in un piano, la $\phi = 0$ rappresenta una curva di ordine $n - 2$, e le (2) ci indicano che ad ogni punto z di ϕ corrisponde un punto solo della curva doppia H . Supposto ora che H sia curva soltanto doppia per S_n , per ogni punto m di H non passano che due generatrici, ossia ad ogni punto m di H corrisponde

un unico sistema $\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, epperò un unico punto di ϕ . Quindi risulta che ϕ corrisponde punto per punto ad H .

Possiamo però enunciare il teorema:

« Se una superficie gobba di ordine n e genere $p=0$ ha una curva doppia H , questa è punteggiata proiettivamente ad una certa curva piana ϕ di ordine $n-2$. »

Segue quindi che il genere della curva doppia H è al più

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

Esaminiamo più d'avvicino la curva ϕ .

Date le immagini di due generatrici che si seghino in m su H , le coordinate del punto μ di ϕ , il quale corrisponde ad m , sono date da

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\xi_1}{\xi_2} \cdot \frac{\xi'_1}{\xi'_2}, \quad \frac{z_2}{z_3} = \frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi'_1}{\xi'_2};$$

viceversa, dato μ , i parametri delle generatrici che passano per m , sono le radici della quadratica

$$z_3 \xi^2 - z_2 \xi + z_1 = 0. \quad (3)$$

Donde segue che data l'immagine di una generatrice, ossia dato un valore di ξ , i parametri delle immagini delle generatrici che segano la data si ottengono combinando (1) e (3).

Quindi agli $n-2$ punti di H posti su di una generatrice corrispondono gli $n-2$ punti di ϕ posti su di una retta del sistema (3).

Tutte le rette (3) involuppano la conica

$$C_2 \equiv z_2^2 - 4z_1 z_3 = 0;$$

dunque i punti di H i quali si trovano su 2 generatrici passanti per un punto m di H , hanno su ϕ , come corrispondenti, i punti posti sulle 2 tangenti che da μ immagine di m su ϕ si possono condurre a C_2 .

Facilmente si vede che se S_n ha un punto m -plo vengono ad essere determinati $\frac{m(m-1)}{2}$ valori di $\frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, $\frac{\xi_1}{\xi_2} \cdot \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, ossia $\frac{m(m-1)}{2}$ punti di ϕ ; ed osservando che $m-1$ di tali punti sono sempre su di una tangente alle C_2 , vediamo che il sistema degli $\frac{m(m-1)}{2}$ punti forma il sistema dei vertici di un poligono di m lati circoscritto a C_2 ed inscritto in ϕ .

La stessa cosa avviene se m generatrici di S_n si trovano in uno stesso piano. Reciprocamente, se vi ha un poligono di m lati circoscritto a C_2 , il quale abbia i vertici su ϕ , a questi punti corrispondono sulla curva H , o m punti, le congiungenti dei quali sono generatrici della superficie, od un punto multiplo di S_n . Donde il teorema:

« Il numero dei punti m -pli e dei piani m volte tangenti di una superficie gobba di genere $p=0$ è eguale al numero dei poligoni di m lati inscritti in ϕ e circoscritti a C_2 . »

Da questo teorema segue che, quando vi è una infinità di tali poligoni, la superficie possiede o una curva m -pla, o una sviluppabile m volte tangente.

Supponiamo ora che H abbia un punto doppio m , che sia soltanto doppio per S_n . In tale caso le 2 generatrici passanti per m tagliano H , ciascuna in altri $n-4$ punti, ossia m è legato per mezzo di 2 generatrici ad altri $2(n-4)$ punti di H ; quindi ancora la immagine μ di m deve essere legata a $2(n-4)$ punti di ϕ , per mezzo delle tangenti condotte da μ a C_2 , ossia queste tangenti devono segare ϕ in altre $2(n-4)$ punti oltre μ . Dunque μ deve contare come 2 intersezioni sopra 2 direzioni diverse, cioè μ deve essere doppio per ϕ .

Evidentemente poi ai punti comuni a C_2 e ϕ corrispondono su H i punti cuspidali per S_n .

Se la curva H si spezza in parti, che non sieno generatrici doppie, ancora ϕ si spezzerà. Infatti la ϕ o la $R'=0$ stabilisce il legame tra 2 generatrici che si segano: ora questo legame muta passando dai punti di una curva parziale a quelli dell'altra, potendosi gli uni esprimere indipendentemente dagli altri; perciò ancora la $R'=0$ deve stabilire in modo distinto questo legame, ossia R' si deve spezzare in fattori distinti. Ma quando R' si spezza, lo stesso avviene per ϕ ; dunque ha luogo il teorema enunciato.

Il teorema reciproco è evidente.

Quando H è curva multipla per S_n , ϕ non è punteggiata proiettivamente ad H ; ma sussistono in grande parte i risultati trovati. Se poi H si spezza in una curva H_1 multipla, ed una curva H_2 doppia per S_n , la sola parte di ϕ che corrisponde ad H_2 è punteggiata proiettivamente a questa curva.

Possiamo infine osservare che H si trova ancora sopra una superficie K rappresentabile punto per punto sopra un piano.

Infatti H , avendo per equazioni

$$\begin{aligned}\phi(z_1, z_2, z_3) &= 0 \\ \rho x_s &= \psi_s(z_1, z_2, z_3), \quad s=1, 2, 3, 4,\end{aligned}$$

si trova sulla superficie

$$\rho x_s = \psi_s(z_1, z_2, z_3)$$

la quale è rappresentabile sul piano z di ϕ . L'ordine di K non supera $\frac{n(n-1)}{2}$; ed H , se è solamente doppia per S_n , si trova su K come curva semplice, mentre se è multipla per S_n è tale ancora per K .

§ 5. Immagine di H sul piano P .

Sia $S(x^n)=0$ la equazione della superficie S_n , ed $S(yx^{n-1})=0$ l'equazione della prima polare S'_y di un punto y rispetto ad S_n .

Seguendo S'_y la S_n in una curva variabile col polo y , e nella curva doppia H , la immagine della completa intersezione si scinde in una curva variabile ed una curva fissa immagine di H su P . Ora questa completa intersezione si ottiene sostituendo nella

$$S(yx^{n-1}) = y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3 + y_4 S_4 = 0$$

per x i valori

$$\rho x_i = \pi_i(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_i(\xi_1, \xi_2), \quad i=1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

perciò bisogna cercare quale è il risultato di tale sostituzione.

Se osserviamo che $S=0$ si annulla identicamente per i valori (1), si ha

$$S_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + S_2 \frac{\partial x_2}{\partial \xi_i} + S_3 \frac{\partial x_3}{\partial \xi_i} + S_4 \frac{\partial x_4}{\partial \xi_i} = 0, \quad i=1, 2, 3,$$

donde

$$\frac{S_1}{I_1} = \frac{S_2}{I_2} = \frac{S_3}{I_3} = \frac{S_4}{I_4},$$

chiamando I_k la Jacobiana delle x , come funzioni delle ξ , nella formazione della quale non entri x_k .

Le equazioni precedenti ci danno le altre

$$S_i = I_i \Theta, \quad i=1, 2, 3, 4,$$

Θ essendo una funzione intera delle ξ . Da queste ultime si ricava che la completa intersezione di S_n con S'_y ha per immagine su P la curva

$$\{y_1 I_1 + y_2 I_2 + y_3 I_3 + y_4 I_4\} \Theta = 0.$$

Ciascuna delle I (come Jacobiana di tre curve di ordine $\nu + \tau + 1$, che hanno un punto multiplo in a secondo $\nu + \tau$, con τ tangenti l comuni in questo punto e passano per i σ punti fissi h) si spezza nelle $\sigma + \tau$ rette l , ah ed in una curva I' di ordine $3\nu + 2\tau - \sigma$, la quale ha in a un punto multiplo secondo $3\nu + 2\tau - \sigma - 1$, passa per i σ punti h e tocca le τ rette l . Di modo che, chiamate $h=0$, $l=0$ le equazioni delle $\sigma + \tau$ rette, la completa immagine della intersezione di S_n ed S'_y sarà

$$l \cdot h \cdot \{y_1 I'_1 + y_2 I'_2 + y_3 I'_3 + y_4 I'_4\} \Theta = 0 \quad (2)$$

e la curva

$$\sum_1^4 y_i I'_i = 0$$

rappresenterà la immagine della intersezione variabile di S_n colla prima polare S'_y del punto y . E poichè essa immagine è una curva di ordine $3\nu + 2\tau - \sigma$, che ha in a un punto della massima molteplicità, tocca le τ rette l , e passa per i σ punti h , le sue intersezioni variabili con la immagine di una sezione piana sono in numero di

$$(3\nu + 2\tau - \sigma)(\nu + \tau + 1) - (\nu + \tau)(3\nu + 2\tau - \sigma - 1) - (\sigma + \tau) = 2(n - 1);$$

dunque l'ordine della curva d'intersezione variabile di S_n con S'_y è $2(n - 1)$, mentre il genere è $p = 0$.

Se si osserva poi che $h=0$ $l=0$ corrispondono (§ 2) a punti di S_n , risulta che $\Theta = 0$ sarà la immagine della curva H , parte restante della intersezione di S_n e S'_y , e che l'ordine di H , come si sa, è

$$\frac{1}{2}\{n(n-1) - 2(n-1)\} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Passiamo ora alla curva $\Theta = 0$.

Poichè le x_i sono lineari nelle ξ_3 , il risultato della sostituzione in S'_y conterrà ξ_3 al grado $n-1$; ma i fattori $l=0$, $h=0$ sono indipendenti da ξ_3 ed il fattore $\sum y_i I_i$ è lineare in ξ_3 , dunque Θ contiene ξ_3 al grado $n-2$. D'altra parte $\Theta=0$ è una curva dell'ordine

$$(n-4)(\nu + \tau + 1) + 3,$$

perciò a è punto multiplo di Θ secondo

$$(n-4)(\nu + \tau) + 1.$$

Se si noti che ciascuno dei punti h è semplice per le x_i , e però multi-

plo secondo $n-1$ nella curva completa intersezione di S_n ed S'_y , si ricava subito che ciascuno dei punti h è multiplo secondo $n-3$ per la curva $\Theta=0$.

Vediamo come si comporta una delle τ rette l rispetto a Θ .

Se nella α_i mettiamo in evidenza il fattore l , si ha

$$\rho x_i = \pi_i + \xi_3 l \cdot \omega'_i$$

ossia ξ_3 ed l si trovano allo stesso grado, ossia l in (2) si trova al grado $n-1$; ma questo risultato è divisibile per l senza esserlo per ξ_3 , ed il fattore $\sum y_i I_i$ contiene ξ_3 ed l linearmente; dunque Θ conterrà l in ciascuno termine ad un grado minore di una unità di quello al quale contiene ξ_3 ; ossia ciascuna delle rette l taglia Θ ancora in un solo punto oltre a , epperò contiene $n-3$ intersezioni, riunite in a , dippiù di quelle appartenenti ad una retta condotta arbitrariamente per a .

Riassumendo dunque risulta che la immagine di H su P è una curva Θ di ordine $(n-4)(\nu+\tau+1)+3$, per la quale a è un punto multiplo secondo $(n-4)(\nu+\tau)+1$; i σ punti h sono multipli secondo $n-3$; e le τ rette l , sono tangenti in a , ciascuna delle quali ha concentrate in questo punto

$$(n-4)(\nu+\tau+1)+2$$

intersezioni.

§ 6. Rappresentazione di ordine minimo della superficie S_n , e genere della curva Θ .

Ci proponiamo ora di trasformare il piano rappresentativo P in un altro P' , tale che alle rette del fascio a di P corrispondano, su P' rette di un fascio a' , ed alle curve Γ , immagini su P delle sezioni piane di S_n , corrispondano curve Γ' del minimo ordine possibile. A tale scopo faremo uso dei risultati stabiliti dal prof. CREMONA nella sua Nota: *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (*).

Prendiamo in P una rete di curve L_μ di ordine μ , le quali abbiano $\mu-1$ rami incrociati nel punto a , passino per i σ punti h , tocchino le τ rette l

(*) *Mem. dell'Accad. di Bologna*, serie 2^a, tomo 5^o; oppure *Giornale di Matematiche*, tomo 3^o. Napoli, 1865.

in a , e passino ancora per altri κ punti c di P ; e facciamo corrispondere alle curve di questa rete le rette del piano P' . Il solo legame tra l'ordine μ' della rete, ed il numero κ dei punti arbitrari c è

$$2\mu = \tau + \sigma + \kappa + 2:$$

relazione la quale ad un tempo indica che le curve L_μ formano una rete, e che due qualunque di esse si segano in un solo punto variabile.

In questa trasformazione il sistema dei punti principali del piano P è costituito dai σ punti h , dai κ punti c , dai τ punti d , posti infinitamente vicini ad a sulle τ rette l , e dal punto a come punto multiplo d'ordine $\mu-1$; mentre il sistema delle curve principali consta delle $\tau+\sigma+\kappa$ rette l , ah , ad , e della curva $B_{\mu-1}$ di ordine $\mu-1$, individuata da a come punto multiplo di ordine $\mu-2$, dai $\sigma+\kappa$ punti h , d e dalle τ rette l come tangenti in a .

Alla curva $B_{\mu-1}$ corrisponderà sul piano P' un punto a' , multiplo secondo $\mu-1$ per la rete di curve M_μ , le quali corrispondono alle rette M del piano P ; ed alle $\tau+\sigma+\kappa$ rette l , ah , ac corrisponderanno su P' altrettanti punti semplici d' , h' , c' . Il punto a di P , al contrario, avrà per corrispondente su P' una curva $B'_{\mu-1}$ passante per i punti h' , c' , d' , ed avente in a' un punto multiplo secondo $\mu-2$; mentre ai punti h , c , d corrispondono le $\tau+\sigma+\kappa$ rette $a'h'$, $a'c'$, $a'd'$.

Alle rette M di P corrispondono su P' curve M_μ di ordine μ , che passano per i $\tau+\sigma+\kappa$ punti h' , c' , d' ed hanno in a' un punto multiplo secondo $\mu-1$. In particolare, le rette del fascio a di P ammettono, come curve corrispondenti su P' , le curve composte della curva fissa $B'_{\mu-1}$ e di una retta del fascio a' ; di modo che, fatta astrazione da punti speciali, ogni retta del fascio a è punteggiata proiettivamente ad una del fascio a' . Segue da ciò, che le immagini delle generatrici di S_n tanto su P quanto su P' sono rette di un fascio.

Curva Γ' trasformata di una curva Γ , immagine su P di una sezione piana di S_n . L'ordine di una Γ' è il numero delle intersezioni variabili di una L_μ colla curva Γ , e perciò è

$$\gamma' = \mu + \nu - \sigma = \frac{n + \kappa + 1}{2}.$$

Se si osserva che delle rette l , ah , ac soltanto le ultime hanno intersezioni variabili colle Γ , se ne ricava che la Γ' passa per i κ punti c' senza pas-

sare per i punti d' , h' . Ancora, la Γ' ha in a' un punto $(\gamma' - 1)$ -plo, giacchè la $B_{\mu-1}$ sega una curva Γ in altrettanti punti variabili.

Curva Θ' trasformata di Θ . Avendo lasciato arbitrario il numero e la posizione dei punti c scelti su P , supponiamo che essi siano tutti posti sulla curva Θ ; il che porta come condizione necessaria e sufficiente (*) che l'ordine della rete L_μ aumentato di 3 sia minore di quello di Θ , cioè

$$\mu < (n-4)(\nu + \tau + 1)$$

ossia

$$x < (n-1)(n-4) + (n-5)(\tau + \sigma + 2),$$

condizione che limita il numero x dei punti che si possono scegliere arbitrariamente.

Assegnato tale valore limite a x , è sempre possibile scegliere i x punti c sulla curva Θ ; allora l'ordine della trasformata Θ' è dato da

$$\begin{aligned} \mu \{ (n-4)(\nu + \tau + 1) + 3 \} - (\mu - 1) \{ (n-4)(\nu + \tau) + 1 \} - \\ - (n-3)(\tau + \sigma) - x = (n-4)\gamma' + 3. \end{aligned}$$

Considerando le intersezioni variabili di $B_{\mu-1}$, di l , ah , ac con Θ , si ricava che la trasformata Θ' passa $(n-4)(\gamma' - 1) + 1$ volte per a' , non passa per i punti h' , d' , ma ha dei punti multipli secondo $n-3$ nei x punti c' .

Genere della curva Θ . Il genere p della curva Θ è lo stesso di quello della Θ' ; dunque

$$p = \frac{(n-4)(n-1)(n-2)}{2} + 1.$$

Rappresentazione di ordine minimo. Dall'analisi precedente si è visto che si può trasformare il piano P in un piano P' punteggiato proiettivamente a P , in modo che alle rette del fascio a corrispondano rette di un fascio a' , alle curve Γ curve Γ' di ordine $\gamma' = \frac{n+x+1}{2}$ passanti per x punti fissi c' ed aventi in a' un punto $(\gamma' - 1)$ -plo; ed alla curva Θ corrisponda una curva Θ' di ordine $(n-4)\gamma' + 3$, avente in a' un punto multiplo secondo $(n-4)(\gamma' - 1) + 1$, e nei x punti c' dei punti multipli secondo $n-3$.

(*) CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, pag. 36. — CLEBSCH e GORDAN, *Theorie der Abelschen Functionen*, pag. 35.

Tale trasformazione si effettua mediante una rete di curve di ordine

$$\mu = (\nu + \tau + 1) - \frac{n - \kappa - 1}{2},$$

le quali toccano le τ rette l , passano per i σ punti h , e per altri κ punti c di Θ , mentre hanno in a un punto $(\mu - 1)$ -plo. Il numero κ è soggetto alle condizioni

$$\kappa + n \equiv 1 \pmod{2}, \quad \kappa \leq (n - 1)(n - 4) + (n - 5)(\tau + \sigma + 2).$$

Se supponiamo $n \geq 5$ possiamo prendere per κ un numero $<$ di 12, perchè la seconda condizione sia soddisfatta.

Noi ora ci proponiamo effettuare la trasformazione, per la quale si ottengono curve Γ' e curva Θ' del minimo ordine possibile. Per fare ciò, è necessario e sufficiente che γ' abbia il minimo valore possibile.

Ciò posto, sia:

1° $n = 2m + 1$, sarà $\gamma' = \frac{2m + \kappa + 2}{2}$, onde il minimo valore di γ' si ha per $\kappa = 0$ ed è $m + 1$; il che si può fare. Per conseguenza l'ordine di Θ' sarà

$$(n - 4)(m + 1) + 3 = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}$$

cioè lo stesso ordine della curva doppia della superficie S_n .

Le curve Γ' non hanno in comune che un punto multiplo; pel quale passano

$$\frac{(n - 2)(n - 3)}{2}$$

rami della Θ' .

2° Sia $n = 2m$, sarà $\gamma' = \frac{2m + \kappa + 1}{2}$, ed il minimo valore si ha scegliendo $\kappa = 1$, il che è ancora possibile. In tale caso $\gamma' = m + 1$ e l'ordine di Θ' sarà

$$(n - 4)(m + 1) + 3 = \frac{n(n - 2)}{2} - 1.$$

Le curve Γ' hanno 2 punti comuni, uno semplice e l'altro multiplo secondo m ; il primo è multiplo secondo $n - 3$ per Θ' , mentre il secondo è multiplo secondo $\frac{n(n - 4)}{2} + 1$.

In ambo i casi adunque, per $n \geq 5$, vi è una immagine di S_n , nella quale le generatrici sono rappresentate da rette di un fascio, e le sezioni piane da curve del minimo ordine possibile fra quelle le quali si possano segare in n punti variabili ed abbiano un punto della massima molteplicità. Tale rappresentazione di ordine minimo può essere chiamata rappresentazione normale.

**§ 7. Rappresentazione geometrica, su di un piano P ,
di una superficie S_n dotata di una retta A , multipla secondo $n-1$.**

Preso un piano fisso P , il quale non passi per A , ed una retta B la quale non seghi A , nè appartenga a P , facciamo muovere su di A e B una retta L . Questa retta L in ogni sua posizione individua un punto di S_n ed un punto di P , tali che, dato l'uno, l'altro resta determinato in modo unico. Dunque la traccia di L su P darà una rappresentazione punto per punto della superficie S_n .

Immagine di una generatrice. La generatrice G , essendo una retta che sega A , sarà rappresentata sul piano P dalla traccia del piano AG . Dunque le generatrici hanno per immagini rette di un fascio a (a traccia di A su P).

Immagine Γ di una sezione piana C_n . Questa immagine è la traccia su P della superficie luogo delle rette che si appoggiano ad A , B , C_n ; ma questa superficie è dell'ordine $n+1$, ha A come direttrice n -pla, B come direttrice semplice, ed ammette come generatrici le n rette di S_n , che passano per i punti ove B incontra la superficie: dunque la traccia è una curva Γ_{n+1} di ordine $n+1$, la quale ha in a un punto n -plo, passa per la traccia h di B e per gli n punti $a_1, a_2, \dots, a_n$, tracce delle n generatrici di S_n che tagliano B .

Segue da ciò che il sistema dei punti fondamentali di P è formato dal punto n -plo a , e dagli $n+1$ punti semplici $h, a_1, a_2, \dots, a_n$; mentre il sistema di rette fondamentali è composto dalle $n+1$ rette $ah, aa_1, aa_2, \dots, aa_n$.

Punto a . La retta mobile L contiene a quando passi per un punto di S_n che si trovi nel piano aB ; dunque a è la immagine di tutti i punti della sezione aB , ad eccezione di quelli posti sulla retta B , i quali hanno per

immagini le n rette $aa_1, aa_2, \dots aa_n$, e del punto dove la sezione aB sega ancora P , il quale ha per immagine la retta ah .

Si vede ancora che gli n punti, in cui una sezione C_n sega la aB , sono rappresentati negli n punti infinitamente vicini ad a posti sulle n tangenti in a della immagine Γ_{n+1} di C_n .

Punti $a_1, a_2, \dots a_n$. Essi sono le immagini dei punti delle generatrici di S_n che incontrano B , ad eccezione di quei punti posti su B , i quali hanno, come si è visto, per immagini le n rette fondamentali $aa_1, aa_2, \dots aa_n$.

Punto h . Questo punto è la immagine della generatrice di S_n , contenuta nel piano hA , ad eccezione della traccia g di questa generatrice, la quale è rappresentata, come si è visto, dalla retta fondamentale ah .

Immagine della sezione fatta da P . Questa immagine si compone della sezione stessa C_n , e della retta ah , come immagine del punto g di C_n .

Immagine della direttrice A . Dalla costruzione geometrica si scorge come il punto di una generatrice posto su A venga rappresentato in un punto variabile di P , e che perciò ogni punto α di A dà $n-1$ immagini, il cui luogo Θ sarà la immagine di A . Gli $n-1$ punti di P che corrispondono ad uno stesso punto α sono evidentemente posti sulla traccia del piano αB , ossia sono su di una retta che passa per h .

Cerchiamo la curva Θ . Sia R una retta qualunque di P ed m un punto di R ; il piano mA sega B in un punto c , e la cm individua su A un punto α , in generale differente dal punto β in cui la generatrice di S_n , contenuta nel piano mA , incontra A . Dunque ogni punto m di R individua un punto α ed un punto β di A ; viceversa ogni punto α individua un punto m , epperò un solo punto β . Al contrario ogni punto β individua $n-1$ generatrici di S_n epperò $n-1$ piani mA , ossia $n-1$ punti m , e quindi ancora $n-1$ punti α . Segue da ciò che tra i punti α e β di A vi è la corrispondenza $[1, n-1]$, e perciò vi saranno n punti di A in cui α coincide con β ; ma quando α coincide con β , il punto m corrispondente appartiene alla curva Θ : dunque Θ è dell'ordine n .

La Θ evidentemente passa per gli $n+1$ punti $h, a_1, \dots a_n$, ha in a un punto multiplo secondo $n-1$, e le $n-1$ tangenti in a sono quelle della C_n contenuta in P : dunque la Θ è completamente determinata.

Gli $n-1$ punti di Θ che corrispondono ad un punto α di A sono su di una retta che passa per h , di modo che, dato uno di essi, gli altri $n-2$ restano determinati, e le immagini delle generatrici che si segano nel punto α sono le $n-1$ rette del fascio α che vanno agli $n-1$ punti di Θ posti per diritto con h .

Di qui risulta che S_n ha tante generatrici singolari, quante sono le tangenti che si possono da h condurre a toccare altrove Θ ; ora in generale queste sono in numero di $2(n-2)$. Dunque S_n ha in generale $2(n-2)$ generatrici singolari.

Condizioni che determinano il sistema delle Γ_{n+1} . Queste condizioni sono evidentemente le $\frac{n(n+1)}{2}$ nascenti dal punto n -plo a , le $n+1$ provenienti dagli $n+1$ punti semplici $h, a_1, \dots, a_n$, e le $n-2$ che derivano dal dovere ciascuna Γ_{n+1} tagliare la sezione C_n , fatta da P , in n punti in linea retta.

Facciamo osservare infine che due curve Γ_{n+1} si segano in h punti posti su di una conica passante per h ed a , la quale è la traccia dell'iperboloide determinato dalle rette A, B e dalla C secondo la quale si tagliano i piani delle sezioni che sono rappresentate nelle due Γ_{n+1} che si considerano.

Crediamo inutile di passare per queste superficie alla rappresentazione di ordine minimo.

§ 8. Rappresentazione geometrica, su di un piano P , della superficie gobba di 4.º ordine, genere $p=0$, priva di direttrice tripla.

Sia H_3 la curva doppia di S_4 , A una generatrice fissata ad arbitrio, α_1, α_2 i punti di A posti su H_3 , e P un piano fisso qualunque, che non passi per A . Distinguiamo poi con h_1, h_2, h_3 i punti in cui P incontra H_3 , con A_1, A_2 le generatrici di S_4 che passano per α_1, α_2 , con a, a_1, a_2 le tracce di A, A_1, A_2 su P , ed in ultimo con Γ_4 la sezione della superficie fatta da P . Ciò posto, facciamo passare per A_1, H_3 e per un punto m qualunque di S_4 l'iperboloide I del fascio AH_3 , e consideriamo la generatrice di I del sistema opposto ad A , la quale passi per m . Poichè questa retta sega A, H_3 e passa per m , così non incontra altrove S_4 , e dà un punto μ di P , il quale appartiene alla conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$, sezione fatta da P su I .

Viceversa un punto μ di P determina l'iperboloide I , e mediante la generatrice del sistema opposto ad A , la quale passa per μ , individua su S_4 un unico punto m .

Facendo adunque, per tale costruzione, corrispondere i punti m di S_4 ai punti μ di P , la superficie S_4 viene ad essere rappresentata punto per punto su P .

Immagine di una generatrice G . Prendiamo su G un punto qualunque m , e conduciamo l'iperboloide mAH_3 ; questo conterrà per intero la G e non segnerà in alcun altro punto, fuori di A ed H_3 , la S_4 . Segue da ciò che i punti m di G sono rappresentati nei punti μ della conica traccia di mAH_3 , ossia nella conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$ che passa per la traccia g di G . Dunque:

« La immagine di una generatrice G è la conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$, la quale passa per la traccia g di G . »

In particolare, la immagine di A è la conica del fascio la quale tocca in a la Γ_4 , e le immagini delle due generatrici che passano per uno dei punti h sono le coniche del fascio le quali toccano le 2 tangenti in h a Γ_4 . Tutti i punti delle generatrici A_1, A_2 sono rappresentati nelle loro tracce α_1, α_2 , ad eccezione dei punti α_1, α_2 i quali hanno rispettivamente per immagini le coniche $(\alpha_1ah_1h_2h_3), (\alpha_2ah_1h_2h_3)$, tracce dei coni i cui vertici sono i punti stessi α_1, α_2 ed H_3 è la direttrice.

Immagine Γ di una sezione piana C_4 . Questa immagine è la traccia su P della superficie luogo delle rette che si appoggiano ad A, C_4 ed H_3 . Ora questa superficie è del 7.º ordine, ha A come direttrice quadrupla, H_3 come curva tripla, e contiene A_1, A_2 come generatrici semplici; dunque:

« La immagine di una sezione piana C_4 è una curva del 7.º ordine, appartenente al sistema lineare, le cui curve hanno un punto quadruplo in a , un punto triplo in ciascuno dei punti h , passano per α_1, α_2 , ed incontrano Γ_4 in 4 punti posti per diritto. »

In particolare, la immagine di Γ_4 si compone di Γ_4 stessa e delle tre rette ah_1, ah_2, ah_3 , come immagini dei punti c_1, c_2, c_3 dove queste rette incontrano Γ_4 .

Immagine della sezione fatta da un piano condotto per A . Una tale sezione è composta della retta A e di una cubica C_3 passante per α_1, α_2 : ora C_3 si rappresenta punto per punto, ad eccezione di α_1, α_2 , nella traccia del suo piano su P ; quindi la immagine completa di una tale sezione consta della conica immagine di A , delle coniche immagini di α_1, α_2 , e di una retta del fascio a , traccia del piano della sezione su P .

In particolare, la sezione Ah è rappresentata dalla conica relativa ad A , dalle coniche relative ad α_1, α_2 , dal punto h , come immagine di tutti i punti della sezione ad eccezione di α_1, α_2, c , e dalla retta ah come immagine di c .

Punto fondamentale a . Evidentemente la curva di S_4 che si rappre-

senta in a , è l'intersezione del cono del 3.^o ordine aH_3 con S_4 , ad eccezione dei punti $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2, c_3$ di tale curva. Ora tale intersezione è una curva gobba del 4.^o ordine, la quale passa non solo per a , ma anche per α_1, α_2 , poichè il cono tocca S_4 in questi punti; epperò essa è una curva di 2.^a specie. Dunque:

« Il punto a è la immagine di tutti i punti di una curva gobba di 4.^o ordine e 2.^a specie, ad eccezione dei punti $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2, c_3$ della curva medesima. »

Immagine di H_3 . Sia m un punto di H_3 ; G, G_1 le generatrici passanti per esso; M la tangente ad H_3 in m ; g, g_1, m_1 le tracce di G, G_1, M su P ; e K_4 la tricuspidale, sezione fatta da P nella sviluppabile formata dalle tangenti M di H_3 . La conica della rete (h_1, h_2, h_3) , che tocca K_4 in m_1 , è la traccia del cono mH_3 , e perciò passa per g, g_1 . Dunque questi punti sono le 2 intersezioni variabili di Γ_4 con la conica $(h_1h_2h_3m_1m_1)$. Sia μ la immagine di m come punto di G , e μ_1 quella di m come punto di G_1 , vale a dire siano μ, μ_1 le tracce delle generatrici $m\mu, m\mu_1$ degli iperboloidi $(AGH_3), (AG_1H_3)$, le quali appartengono al sistema opposto ad A .

I punti μ, μ_1 si trovano su di una retta del fascio a , poichè le $m\mu, m\mu_1$ si tagliano fra loro, ed incontrano A . Segue quindi che ad ogni punto m di H_3 corrisponde una retta del fascio a .

Viceversa ogni retta passante per a ha per corrispondente il punto m di H_3 , individuato dal piano che passa per questa retta e per A .

Se ora si osserva che ogni punto m di H_3 individua un punto m_1 di K_4 e viceversa, risulta ancora che ogni retta del fascio a corrisponde univocamente ad un punto m_1 di K_4 : corrispondenza che resta definita col dire che le rette ah_1, ah_2, ah_3 corrispondono alle cuspidi h_1, h_2, h_3 .

Inoltre, se si osserva che i punti μ, g, m sono in linea retta, come ancora μ_1, g_1, m_1 , si conclude che quando si conosca la retta l del fascio a la quale corrisponde ad m_1 , i punti μ, μ_1 sono determinati costruendo la conica $(h_1h_2h_3m_1m_1)$, la quale taglierà Γ_4 in g e g_1 , e tirando poi le rette m_1g, m_1g_1 , che incontreranno l nei punti μ, μ_1 .

Mediante questa costruzione e la corrispondenza tra le rette del fascio a ed i punti di K_4 , resta adunque individuata la curva Θ luogo dei punti μ , ossia immagine di H_3 .

Si trova senza difficoltà che la curva Θ è del 6.^o ordine, ha in a un punto quadruplo, 3 punti doppi nei punti h_1, h_2, h_3 , passa per i punti α_1, α_2 , ed ha nei punti h le stesse tangenti della Γ_4 . La curva è dunque indi-

viduata da queste condizioni ed è del genere $p=1$. I punti di Θ che corrispondono ad uno stesso punto di H_3 sono su di una retta del fascio a , e le immagini dei punti di una generatrice posti su H_3 sono le intersezioni di una conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$ con la Θ .

Riassumendo possiamo dire, che la rappresentazione trovata si effettua mediante un sistema di curve del 7.º ordine come immagini delle sezioni piane, un fascio di coniche come immagini delle generatrici, ed una curva del 6.º ordine come immagine della curva doppia.

Il sistema dei punti fondamentali si compone di sei punti: 2 semplici a_1, a_2 ; 3 tripli h_1, h_2, h_3 ; ed uno quadruplo a . Il sistema di curve fondamentali è formato dalle coniche $(a_1ah_1h_2h_3)$, $(a_2ah_1h_2h_3)$, e dalle rette ah_1, ah_2, ah_3 .

§ 9. Rappresentazione normale della superficie gobba di 4.º ordine, genere $p=0$, priva di direttrice tripla.

Ci proponiamo ora trasformare il piano rappresentativo P in un altro Π ad esso punteggiato proiettivamente e tale che le coniche $(ah_1h_2h_3)$ di P abbiano su Π , come corrispondenti, le rette di un fascio α ; le curve del 7.º ordine $(a^4h_1^3h_2^3h_3^3a_1a_2)$ siano rappresentate da curve del 3.º, e la curva $\Theta \equiv (a^4h_1^3h_2^3h_3^3a_1a_2)$, abbia per immagine su Π una curva del 3.º ordine.

Si raggiunge lo scopo, adoperando una rete di curve del 5.º ordine $(a^3h_1^2h_2^2h_3^2a_1a_2a_3)$ dove a_3 sia un punto di Θ .

Sia α il punto di Π che corrisponde alla cubica $(a^3h_1h_2h_3a_1a_2a_3)$, curva principale di P per tale trasformazione; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i punti di Π i quali sono le immagini delle rette principali ah_1, ah_2, ah_3 di P ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, i punti di Π corrispondenti alla coniche principali di P $(ah_1h_2h_3a_1)$, $(ah_1h_2h_3a_2)$, $(ah_1h_2h_3a_3)$; il sistema dei punti fondamentali di Π sarà composto di α come punto triplo, di $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ come punti doppi, e di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ come punti semplici; e la rete di curve di 5.º ordine in Π , la quale corrisponde alle rete di rette in P , sarà $(\alpha^3\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$.

Le linee principali di Π sono le rette $\alpha\beta_1, \alpha\beta_2, \alpha\beta_3$, corrispondenti ai punti a_1, a_2, a_3 ; le coniche $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_1)$, $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_2)$, $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_3)$ che corrispondono ai punti h_1, h_2, h_3 ; ed in fine la cubica $(\alpha^2\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, la quale è la immagine del punto a di P .

Passiamo ora a trovare la rappresentazione di S_4 su Π .

Immagine di una generatrice di S_4 . Questa immagine è ciò che di-

venta su Π una conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$ di P ; ora una tale conica forma insieme colla cubica $(a^2h_1h_2h_3a_1a_2a_3)$ una curva appartenente alla rete di trasformazione: dunque la conica si muterà in una retta del fascio α . Dunque:

« Le generatrici di S_4 hanno per immagini su Π le rette di un fascio α . »

Immagine di una sezione piana di S_4 . Questa immagine è la trasformata su Π di una curva $(a^4h_1^3h_2^3h_3^3a_1a_2)$, immagine su P di una sezione piana di S_4 ; ora una tale curva è tagliata in 3 punti da ciascuna curva della rete di trasformazione, perciò la immagine su Π è una curva del 3.^o ordine. Se poi si osserva quali delle curve principali tagli una $(a^4h_1^3h_2^3h_3^3a_1a_2)$ in punti non fondamentali, si trova che la cubica $(a^2h_1h_2h_3a_1a_2a_3)$ sega tale curva in due punti, mentre la conica $(ah_1h_2h_3a_3)$ la taglia in un punto solo; onde le curve cubiche, immagini delle sezioni piane di S_4 su Π , avranno in α un punto doppio e passeranno per β_3 .

Immagine di Γ_4 . Anche la Γ_4 avrà per immagine una cubica Γ_3 passante per β_3 ed avente in α un punto doppio; ma tale Γ_3 passerà ancora per i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

L'immagine di una sezione piana di S_4 , su P , tagliava la Γ_4 in 4 punti posti per diritto; perciò la cubica immagine, su Π , di una sezione piana di S_4 taglierà la Γ_3 in 4 punti situati in una curva del 5.^o ordine, appartenente alla rete $(\alpha_3\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$.

Le curve di 3.^o ordine adunque, le quali corrispondono alle sezioni piane di S_4 , oltre di avere un punto semplice β_3 ed un punto doppio α comuni, verificano a due altre condizioni, le quali consistono in ciò che solo 2 delle 4 intersezioni con una certa cubica Γ_3 del sistema sono arbitrarie.

Immagine della curva H_3 di S_4 . La curva Θ , immagine di H_3 su P , è incontrata da una curva della rete di trasformazione in 3 punti, onde avrà su Π , come corrispondente, una curva Ω di 3.^o ordine. Le curve principali di P , che segano Θ in punti diversi dai fondamentali, sono le 3 coniche principali e la cubica principale; perciò la Ω passa per i punti $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Inoltre, poichè la Θ ha nei punti h le stesse tangenti di Γ_4 , e ad ogni direzione per h corrisponde un punto della conica di Π , immagine di h , così la Ω passa per le 3 coppie di punti di Γ_3 posti sulle coniche $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_1)$, $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_2)$, $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_3)$. Per tal guisa si vede che, quando siano noti i punti (α, β) , Ω è più che determinata, epperò si conclude che le 6 intersezioni di queste coniche con Γ_3 insieme coi quattro punti $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ giacciono su di una stessa curva Ω del 3.^o ordine.