The present state of the Analytical Engine is as follows:

All the great principles on which the discovery rests have been explained, and drawings of mechanical structures have been made, by which each may be carried into operation.

Simpler mechanisms, as well as more extensive principles than were required for the Difference Engine, have been discovered for all the elementary portions of the Analytical Engine, and numerous drawings of these successive simplifications exist.

The mode of combining the various sections of which the Engine is formed has been examined with unceasing anxiety, for the purpose of reducing the whole combination to the greatest possible simplicity. Drawings of almost all the plans thus discussed have been made, and the latest of the drawings (bearing the number 28) shows how many have been superseded, and also, from its extreme comparative simplicity, that little further advance can be expected in that direction.

Mechanical notations have been made both of the actions of detached parts and of the general action of the whole, which cover about four or five hundred large folio sheets of paper.

The original rough sketches are contained in about five volumes.

There are upwards of one hundred large drawings.

No part of the construction of the Analytical Engine has yet been commenced. A long series of experiments have, however, been made upon the art of shaping metals; and the tools to be employed for that purpose have been discussed, and many drawings of them prepared. The great object of these inquiries and experiments is, on the one hand, by simplifying as much as possible the construction, and on the other, by contriving new and cheaper means of execution, at length to reduce the expense within those limits which a private individual may command.

Ueber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf einen besondern Fall.

Von Herrn Professor *Argelander*, Director der Sternwarte in Bonn.

Wenn aus einer oder mehreren Beobachtungsreihen eine sehr große Menge von unbekannten Größen abzuleiten ist, so wird bekanntlich die directe Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate wegen der übermäßigen Ausdehnung der Rechnung sehr lästig und oft ganz unmöglich, so daß man in diesem Falle zur Ableitung von partiellen Resultaten für einzelne Unbekannte und successive Annäherung seine Zuflucht nehmen muß. In einzelnen Fällen indessen, in denen die Abhängigkeit der Beobachtungen von den unbekannten Größen durch sehr symmetrische Formeln gegeben wird, läßt sich eine sehr bedeutende Abkürzung der Rechnung finden. Zu diesen gehört der bekannte und so häufig vorkommende, den *Bessel* in der Einleitung zum ersten Bande der Königsberger Beobachtungen behandelt hat; kürzlich ist mir ein anderer der Art vorgekommen, nämlich derjenige, wo die Unbekannten so von einander abhängen, daß die Beobachtung unmittelbar die Summe oder Differenz je zweier von ihnen giebt, und die Beobachtungen vollständig für alle verschiedenen Combinationen derselben zu je zweien vorhanden sind. Es seien also die einfachen aus den Beobachtungen entnommenen Gleichungen für die $(\mu + 1)$ Unbekannten $p, q, r, s, t, \dots, \gamma, z$

$$\begin{array}{lll} p \pm q = \alpha' & q \pm r = \beta'' & r \pm s = \gamma''' \\ p \pm r = \beta' & q \pm s = \gamma'' & r \pm t = \delta''' \\ p \pm s = \gamma' & q \pm t = \delta'' & r \pm z = \lambda''' \\ p \pm t = \delta' & \vdots & \vdots \\ p \pm z = \lambda' & q \pm z = \lambda'' & \gamma \pm z = \lambda^{(\mu)} \end{array}$$

in denen allen entweder das obere oder das untere Zeichen gilt, aber in allen dasselbe. Durch die Bedingung des Minimums für die Summe der Quadrate der Fehler entstehen hieraus die zur Auflösung nöthigen $(\mu + 1)$ Finalgleichungen

$$0 = A + \mu p \pm q \pm r \pm \text{etc.} \dots \pm z$$

$$0 = B \pm p + \mu q \pm r \pm \text{etc.} \dots \pm z$$

$$\vdots$$

$$0 = K \pm p \pm q \pm r \pm \text{etc.} \dots + \mu \gamma \pm z$$

$$0 = L \pm p \pm q \pm r \pm \text{etc.} \dots \pm \gamma + \mu z$$

Es sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn überall das obere Zeichen gilt, so ist

$$A = -[\alpha' + \beta' + \gamma' + \dots + \lambda']$$

$$B = -[\beta' + \gamma' + \delta' + \dots + \lambda'']$$

etc. etc.

$$L = -[\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \dots + \lambda^{(\mu)}]$$

Nennt man nun die Summe sämtlicher Unbekannten, also $(p + q + r + \dots + z) = S$, so verwandeln sich die obigen Gleichungen in die folgenden

$$0 = A + (\mu - 1)p + S$$

$$0 = B + (\mu - 1)q + S$$

etc. etc.

$$0 = L + (\mu - 1)z + S$$

addirt man diese $(\mu + 1)$ Gleichungen zusammen, so erhält man

$$0 = (A + B + \dots + L) + (\mu - 1)S + (\mu + 1)S$$

hieraus ferner

$$S = -\frac{(A+B+\dots+L)}{2\mu}$$

und endlich, da offenbar S bekannt ist

$$p = -\frac{A+S}{\mu-1}; \quad q = -\frac{B+S}{\mu-1}; \quad \text{etc.} \dots z = -\frac{L+S}{\mu-1},$$

so daß also die ganze Rechnung sich auf einfache Additionen und die Division durch $(\mu-1)$ reducirt. Man gelangt zu denselben Formeln auch durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren, wodurch aber nebenbei noch die Werthzahlen bestimmt werden. Wenn wir nämlich die bekannten *Gaussischen* Bezeichnungen für die Summen der Quadrational-Producte der Coëfficienten, so wie für ihre Umformungen durch die successiven Eliminationen beibehalten, ferner annehmen, daß die Elimination mit z beginne, und bei der ν ten diejenige Unbekannte eliminirt werde, deren Coëfficienten bei der gewöhnlichen Auflösung mit f bezeichnet werden, so daß also $(fn) = F$ ist; so sind offenbar alle $(ab), (ac), \dots (bc)$ etc. $\dots = 1$, alle $(aa), (bb), (cc)$ etc. $= \mu$, und folglich auch $(ab_\nu) = (ac_\nu) = \text{etc.} \dots = (bc_\nu) = \text{etc.} \dots$ und eben so auch alle $(aa_\nu) = (bb_\nu) = (cc_\nu) = \text{etc.} \dots$. Es wird dann, wie man ohne Mühe findet,

$$A_\nu = (an_\nu) = A - (F+G+\text{etc.} \dots + L) : (\mu + \nu - 1)$$

$$B_\nu = (bn_\nu) = B - (F+G+\text{etc.} \dots + L) : (\mu + \nu - 1)$$

$$\text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

$$(ab_\nu) = (ac_\nu) = \text{etc.} \dots = (\mu - 1) : (\mu + \nu - 1)$$

$$(aa_\nu) = (bb_\nu) = \text{etc.} \dots = (\mu - 1) \cdot (\mu + \nu) : (\mu + \nu - 1)$$

Setzt man nun $\nu = \mu$, so erhält man als Endresultat

$$A_\mu = A - (B+c+\text{etc.} \dots + L) : (2\mu - 1) = 2\mu(A+S) : (2\mu - 1)$$

$$B_\mu = B - (A+c+\text{etc.} \dots + L) : (2\mu - 1) = 2\mu(B+S) : (2\mu - 1)$$

$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

die Werthzahlen

$$(aa_\mu) = (bb_\mu) = \text{etc.} \dots = (\mu - 1) 2\mu : (2\mu - 1)$$

und daraus für die Unbekannten genau die früher gefundenen Werthe, da bekanntlich $p = -A_\mu : (aa_\mu)$; $q = -B_\mu : (bb_\mu)$ etc. ist.

II. Im zweiten Falle wird die Aufgabe bekanntlich unbestimmt, und läßt sich nur auflösen, wenn man für eine der Unbekannten einen willkürlichen Werth annimmt, oder die andern als Functionen dieser entwickelt. Es möge dies z sein; so fällt die letzte der Finalgleichungen fort, und die übrigen bleibenden, μ an der Zahl, verwandeln sich, wenn man $A-z = A'$, $B-z = B'$, $\dots K-z = K'$ setzt, in die folgenden

$$0 = A' + \mu p - q - r - \text{etc.} \dots - \gamma = A' + (\mu + 1)p - S$$

$$0 = B' - p + \mu q - r - \text{etc.} \dots - \gamma = B' + (\mu + 1)q - S$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$0 = K' - p - q - r - \text{etc.} \dots + \mu \gamma = K' + (\mu + 1)\gamma - S$$

wo S jetzt die Summe der μ Unbekannten $p+q+\dots\gamma$ ist. Durch Addition sämmtlicher μ Gleichungen erhält man ferner

$$0 = A' + B' + \dots + K' + (\mu + 1)S - \mu S$$

also

$$S = -[A' + B' + \text{etc.} \dots K'] = -[A+B+\dots+K] + \mu z$$

und

$$p = (S-A') : (\mu + 1) = -[A+(A+B+\dots+K)] : (\mu + 1) + z$$

$$q = (S-B') : (\mu + 1) = -[B+(A+B+\dots+K)] : (\mu + 1) + z$$

$$\text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

setzt man also die Summe $(A+B+\dots+K) = S'$, so erhält man

$$p - z = -(A+S') : (\mu + 1)$$

$$q - z = -(B+S') : (\mu + 1)$$

$$\text{etc.}$$

Man erhält also hier die Unterschiede aller übrigen Unbekannten von Z , und daher, wenn man für dieses einen bestimmten Werth setzt, jene selbst. Es wird am bequemsten seyn, $z = 0$ zu setzen, wodurch die Rechnung am einfachsten wird. Will man für $A, B, \text{etc.} \dots$ die kleinsten Zahlen haben, so wähle man für z diejenige Unbekannte, die in der Mitte zwischen den andern der Größe nach liegt; wählt man dafür die kleinste, so erhält man für die andern lauter positive Werthe. Die Quantitäten $A, B, \text{etc.}$ erhalten hier übrigens folgende Werthe:

$$A = -(\alpha' + \beta' + \gamma' + \dots + \lambda')$$

$$B = -(-\alpha' + \beta'' + \gamma'' + \dots + \lambda'')$$

$$C = -(-\beta' - \beta'' + \gamma''' + \dots + \lambda''')$$

$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

$$K = -(-\kappa' - \kappa'' - \text{etc.} \dots - \kappa^{(\mu-1)} + \lambda^{(\mu)})$$

Dieselben Werthe für die Unbekannten giebt auch die andere Ableitung; sie giebt aber außerdem noch die Werthzahlen, welche hier, da eine Unbekannte fortfällt, bei der $(\mu-1)$ ten Elimination erfolgen, und natürlich nur für die relative Bestimmung gegen z gelten. Man erhält

$$(aa_{\mu-1}) = (bb_{\mu-1}) = \text{etc.} \dots = \frac{1}{2}(\mu + 1).$$

Diese zweite Form der Aufgabe erhält ihre Anwendung unter andern, wenn man eine Reihe von Sternen, jeden mit allen andern, in Beziehung auf ihre Helligkeit verglichen hat, und daraus ihre relative Helligkeit gegen einen derselben sucht. Sind nun hier, wie es wohl meistens zutreffen wird, nicht alle Sterne mit allen verglichen, so werden die Finalgleichungen unvollständig; es werden nicht in allen alle Unbekannte vorkommen, und $(aa), (bb)$ etc. werden nicht alle $= \mu$ werden, sondern einige oder auch alle kleiner. In diesem Falle läßt sich also die gegebene Auflösung direct nicht anwenden. Wenn aber der ausgefallenen Gleichungen nicht gar zu viele sind, so wird man durch Annäherungen sehr rasch zum Ziele gelangen.

Man nehme vorläufige Werthe für die Unbekannten an, wie sie die einzelnen Gleichungen ergeben, wenn man $z = 0$ setzt, also z.B. für p den Werth $(\lambda' + \lambda'' + \alpha' + \lambda''' + \beta' + \text{etc.}): \mu$, oder noch besser $(2\lambda' + \lambda'' + \alpha' + \lambda''' + \beta' + \text{etc.}): (\mu + 1)$, indem dieser geradezu der wahrscheinlichste Werth ist, wenn alle Verbindungen zwischen p und den andern Unbekannten beobachtet sind. Unter Annahme dieser Werthe vervollständige man die Finalgleichungen, indem man für jede fehlende Unbekannte die Quantitäten $A, B, \text{etc.}$, um deren angenommene numerische Werthe vermindert, daraus nach den gegebenen Vorschriften neue Werthe für die Unbekannten bestimmt,

durch diese neuen Werthe die $A, B, \text{etc.}$ wieder corrigirt, und so fortfährt, bis die in den uncorrigirten Finalgleichungen übrigbleibenden Fehler so klein werden, daß man sie für den vorgesetzten Zweck als verschwindend betrachten kann. Wie man leicht übersieht, sind die Unterschiede der auf diese Weise erhaltenen successiven Werthe von $A, B, \text{etc.}$ den Abweichungen der Finalgleichungen in den verschiedenen Hypothesen von 0, also den Fehlern, gleich, und man kann daher ohne weitere Rechnung aus diesen Unterschieden die Größe der Annäherung an die Wahrheit, die man erreicht hat, theilen.

Argelander.

Scheinbare Positionen der bei den Beobachtungen des *Mauvaischen* Cometen auf der Hamburger Sternwarte gebrauchten Vergleichungs-Sterne.

Von Herrn Director *Rümker* mit dem *Repsold'schen* Meridiankreise bestimmt.

Tag der Vergleichung. 1843.	Scheinb. AR. in Zeit.	Scheinb. Decl.	Tag der Vergleichung. 1843.	Scheinb. AR. in Zeit.	Scheinb. Decl.
Mai 24	22 ^h 34' 25" 420	28° 29' 21" 55	Juli 3	23 ^h 29' 36" 226 23 30 9,380	18° 54' 56" 64 18 47 20,97
Mai 29	22 39 30,522 22 39 59,492 22 41 5,387	27 41 38,92 27 25 59,36 27 17 44,16		23 32 23,228 23 32 23,811 23 35 43,763 23 39 22,530 23 42 14,720	18 50 47,79 18 53 18,13 18 48 50,48 18 58 11,47 18 48 1,93
Mai 30	22 44 3,042 22 46 44,431 22 47 27,785	27 10 10,47 27 11 3,24 27 10 28,54	Juli 4	23 30 6,246	18 36 58,14
Juni 4	22 51 24,376 22 51 28,271 22 52 44,974	26 39 39,73 26 54 26,12 26 44 29,68	Juli 5	23 28 54,793 23 29 18,594 23 33 23,955	18 19 7,33 18 10 12,84 18 17 33,29
Juni 6	22 52 57,708 22 53 39,193 22 57 46,813 23 0 13,769 23 1 34,172 23 4 14,535	26 13 39,80 26 9 19,87 26 8 15,29 26 6 55,03 26 3 51,49 26 0 5,00	Juli 6	23 29 33,557 23 30 4,343 23 32 30,391 23 34 38,163	17 48 22,69 17 32 6,44 17 46 40,95 17 48 3,09
Juni 18	23 8 0,729 23 8 16,538	23 34 14,96 23 55 2,66	Juli 7	23 32 23,647	17 20 56,36
Juni 19	23 14 21,284 23 14 46,304 23 19 13,900	23 25 39,10 23 14 35,51 23 36 20,95	Juli 9	23 36 5,405	16 38 44,27
Juni 20	23 11 58,612 23 12 55,040 23 14 46,337 23 16 35,548 23 16 35,681	22 58 15,95 22 53 2,58 23 14 35,73 23 8 7,23 22 54 3,90	Juli 19	23 39 3,281 23 42 19,528 23 42 34,605	16 33 48,82 16 46 38,44 16 44 32,75
Juni 23	23 17 35,943 23 21 19,476	22 32 33,39 22 11 23,37	Juli 20	23 34 5,781 23 38 34,265	11 52 44,67 11 49 53,29
Juni 26	23 21 29,082 23 22 13,075 23 24 57,577 23 25 39,549 23 25 47,686	21 30 15,92 21 21 1,17 21 25 49,29 21 38 7,37 21 27 53,69	Juli 26	23 36 2,405 23 37 36,638 23 38 37,926 23 34 20,247 23 36 10,197 23 37 38,120 23 41 42,827 23 43 19,736 23 44 44,511	11 21 20,42 11 30 28,67 11 14 36,52 8 6 50,65 8 4 40,36 8 6 17,13 7 45 37,39 7 45 40,54 7 51 9,11