im Lichtbogen befindet, während dieser existirt. Aber von dieser Kraft ist es bewiesen, daß sie unabhängig von der Stromstärke ist.¹⁾ Nur wenn die Stromstärke sich der geringsten nähert, mit welcher ein Lichtbogen dargestellt werden kann, beginnt ein Abnehmen in der Größe der Kraft sich zu zeigen.²⁾ Aber die Temperatur der Polspitzen ist von der Stromstärke abhängig, und dasselbe Verhältniß findet ganz gewiß auch mit ihrem Temperatur-Unterschiede statt. Die gefundene Kraft ist also unabhängig von der Erwärmung der Pole und kann deshalb nicht thermoelektrischen Ursprungs seyn.

V. Ueber einige, auf die parabolischen Wurflinien bezügliche, geometrische Oerter und deren Gebrauch zur Bestimmung der Wurfhöhe und Wurfbreite; von K. L. Bauer,

Assistent d. Physik a. Polyt. z. Karlsruhe.

I.

Wir denken uns im leeren Raum ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x , y mit horizontaler Abscissen- und verticaler Ordinatenaxe. Vom Coordinatenanfang gehe ein unter dem Winkel α gegen die positive Richtung der x -Axe mit irgend einer Intensität geworfener, schwerer Punkt aus, so daß die Trajectorie desselben in die Coordinatenebene zu liegen komme; der Winkel werde von der positiven x -Axe aus in umgekehrtem Sinne wie die Bewegung eines Uhrzeigers gezählt. Um nun die Gestalt der Bahn zu ermitteln, zerlegen wir nach dem gewöhnlichen Verfahren die ertheilte

1) Pogg. Ann. Bd. 181, S. 586.

2) Oefversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. 1867 December.

Anfangsgeschwindigkeit c in eine horizontale und in eine verticale Seitengeschwindigkeit c_1 und c_2 , so daß

$$c_1 = c \cos \alpha \text{ und } c_2 = c \sin \alpha.$$

Dann folgen für die entsprechenden Componenten der Bahngeschwindigkeit zur Zeit t die Werthe

$$v_1 = c_1 \text{ und } v_2 = c_2 - g t,$$

und für die zugehörigen Werthe, oder die Coordinaten des bewegten Punktes zur nämlichen Zeit

$$x = c_1 t \text{ und } y = c_2 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Hierdurch ist die Bahnlinie völlig bestimmt; die besonderen Annahmen

$$v_2 = 0; y = 0; t = \frac{c_2}{g} \pm \tau$$

führen zur Kenntniss der wichtigsten Eigenschaften derselben, unter andern auch zur Auffindung der Wurfhöhe und Wurfweite. Die Gleichung der Trajectorie ergibt sich aus den aufgestellten Ausdrücken für die Coordinaten eines ihrer Punkte durch die sehr leichte Elimination von t ; übrigens liegt die Vermuthung nahe, daß das Eliminationsresultat sich unter der Form

$$(m - x)^2 = p(n - y)$$

werde darstellen lassen, wenn mit m , p , n gewisse, noch zu bestimmende, Constanten bezeichnet werden. Diese Vermuthung erweist sich als begründet; denn ersetzt man in jener hypothetischen Gleichung x und y durch die betreffenden Functionen von t , so erhält man durch Vergleichung der beiderseitigen Coëfficienten von t^2 , t' , t^0 die drei Bedingungen

$$c_1^2 = \frac{1}{2} g p; 2 c_1 m = c_2 p; m^2 = p n,$$

woraus sich successive p , m , n eindeutig und reell bestimmen, indem

$$p = \frac{2 c_1^2}{g}; m = \frac{c_1 c_2}{g}; n = \frac{c_2^2}{2g}.$$

Macht man jetzt noch die Substitution $m - x = -w$ und $n - y = u$, so wird die Gleichung $w^2 = p u$ der Bahn identisch mit der Scheitelgleichung der Parabel; um von den ursprünglichen Axen X , Y zu den neuen W , U zu gelangen,

hat man, jenen Substitutionen zufolge, die Axe der x um die Gröfse n , die Axe der y aber um die Gröfse m parallel zu sich selbst zu verschieben und außerdem die negative Richtung der letzteren zur positiven u -Axe zu wählen (Fig. 25, Taf. III!). Die drei Constanten m , n , p haben sämmtlich eine für die Bahncurve wesentliche Bedeutung; m ist nämlich die halbe Wurfweite, n die Wurfhöhe, und p der Parameter der Bahn, d. h. der vierfache Abstand des Scheitels vom Brennpunkt, oder von der Directrix. Die Gröfsen m , n bedeuten in Bezug auf das System der x , y Abscisse und Ordinate des Scheitels, in Bezug auf das System der u , w jedoch w - und u -Coordinate des Endpunkts der Bahn, in welchem sie zum zweiten Mal die Horizontale trifft. Eben deshalb besteht die schon oben gefundene Beziehung $m^2 = pn$, wonach *die halbe Wurfweite die mittlere Proportionale zwischen Wurfhöhe und Parameter ist.*

Bei Ansicht der Ausdrücke für p , m , n gewahrt man außerdem leicht, dafs $p = \pm 2m = 4n$ wird, wenn $c_1 = \pm c_2$, d. i. $\alpha = 45^\circ$, oder $= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$; den Wurfwinkeln 45° und 135° entsprechen demnach parabolische Bahnen, deren Brennpunkte in der horizontalen x -Axe liegen; außerdem wird die (absolute) Wurfweite $2m$ in diesem Falle ein Maximum. Allgemeiner läfst sich der erste Theil dieses Satzes so aussprechen: *die horizontale x -Axe ist der geometrische Ort der Brennpunkte aller Bahnen, die bei den Wurfwinkeln 45° und 135° und bei allen möglichen Anfangsgeschwindigkeiten zu Stande kommen.* Dieser Umstand kann veranlassen, ganz allgemein die geometrischen Oerter der Brennpunkte und Scheitel zu ermitteln, sowohl wenn bei irgend einem constanten Werth von α die Geschwindigkeit c nach einander beliebig variirt, als auch wenn mit irgend einer constanten Geschwindigkeit c unter allen möglichen Winkeln α geworfen wird.

II.

Bezeichnen wir das Maximum der Wurfhöhe n , welches bei verticalem Wurfe ($\alpha = 90^\circ$) eintritt, mit a , so ergeben

sich, wegen der Beziehung $a = \frac{c^2}{2g}$, für die Coordinaten des Brennpunkts und des Scheitels die Ausdrücke:

$$x = m = a \sin 2\alpha; \quad y = n - \frac{p}{4} = -a \cos 2\alpha \quad (\text{Coordinaten des Brennpunkts.})$$

$$x = m = a \sin 2\alpha; \quad y = n = a \sin^2 \alpha \quad (\text{Coord. des Scheitels}).$$

Ist nun zunächst α constant und c variabel, so werden wir die Gleichungen der geometrischen Oerter der Brennpunkte und Scheitel aller betreffenden Parabeln dadurch erhalten, daß wir durch Elimination des veränderlichen c , oder a , Relationen zwischen den Coordinaten jener Punkte aufstellen. Man findet sofort:

$$y = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} x = \operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) x \quad (\text{Gl. d. Orts d. Brennp.})$$

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha x \quad (\text{Gl. d. Orts d. Scheitel})$$

Wirft man mithin im leeren Raum einen schweren Punkt unter dem nämlichen Winkel α mit allen möglichen Intensitäten, so kommen sowohl die Brennpunkte als die Scheitel sämtlicher Wurflinien in je eine durch den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt (Coordinatenanfang) gehende Gerade zu liegen. Diese Geraden sind nur nach einer Seite unbegrenzt (also halbbegrenzt); der Coordinatenanfang ist beider Anfangspunkt; orientiren wir uns über die genauere Lage derselben!

Die Brennpunktsgerade OB (s. Fig. 26, Taf. III) steht offenbar im Coordinatenanfang normal zu der mit der positiven Richtung der x den positiven Winkel 2α einschließenden Geraden; oder, was dasselbe ist, die Brennpunktsgerade macht mit der negativen y -Axe den, von dieser Axe aus gezählten, Winkel 2α . Für $\alpha = 0^\circ$ fällt sie mit der negativen y -Axe zusammen; während α von 0° bis 180° wächst, dreht sie sich in der Coordinatenebene um O im positiven Sinne (der Drehung der Wurfrichtung entsprechend, linksinnig) vollständig im Kreise herum; für $\alpha = 45^\circ$ coïncidirt sie — eine Bestätigung des schon früher ausgesprochenen Satzes — mit der horizontalen, positiven x -Axe; bei fortgesetzter Zunahme des α dreht sich die, bisher unterhalb des

Horizonts gelegene, Brennpunktsgerade über die Horizontale hinaus und fällt für $\alpha = 90^\circ$ mit der positiven y -Axe zusammen; für $\alpha = 135^\circ$ coïncidirt sie mit der negativen x -Axe, biegt sich, bei noch ferner wachsendem α , wieder unter den Horizont und fällt, wenn $\alpha = 180^\circ$ geworden, ebenso wie für $\alpha = 0^\circ$, mit der negativen y -Axe zusammen.

Die Lage der Scheitelgeraden OS bestimmt sich durch die Bemerkung, daß diese Gerade die Ordinate $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$ jedes Punktes der Wurfrichtung OW halbt; der Scheitel liegt immer nur halb so hoch über der horizontalen, als der vertical darüber gelegene Punkt der entsprechenden Wurfrichtung. Hieraus folgt, daß bei jedem beliebigen Wurfwinkel α die x -Axe, die Scheitelgerade, die Wurfrichtung und die y -Axe ein harmonisches Büschel bilden; OX , OW und OS , OY sind gegenseitig einander zugeordnete Strahlen (vgl. u. a. J. H. T. Müller, Lehrbuch der Geometrie, Halle 1844, S. 222, No. 11). Der Winkel der Scheitelgeraden mit der x -Axe liegt zwischen $\frac{\alpha}{2}$ und α ; man kann ihn mit $\frac{\alpha}{2} + \alpha'$ bezeichnen, wenn $\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$, weil bei dieser Bedingung die Gleichung $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot x$ unter der Form $y = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \alpha' \right) x$ darstellbar ist. Für $\alpha = 0^\circ$ (bei horizontalem Wurf) liegen sämtliche Scheitel im Ausgangspunkte, dem Coordinatenanfang; wächst α von 0° bis 180° , so läßt sich die positive x -Axe durch linkssinnige Drehung in der Coordinatenebene um den Ursprung bis zum schließlichen Zusammenfallen mit der negativen x -Axe in die successiven Lagen der Scheitelgeraden überführen. Für $\alpha = 90^\circ$ (verticaler Wurf) fällt die Scheitelgerade sammt der Brennpunktsgerade selbstverständlich mit der positiven y -Axe zusammen; für $\alpha = 180^\circ$ liegen, wie für 0° , sämtliche Scheitel im Coordinatenanfang. Die Scheitelgerade liegt natürlich stets oberhalb der Horizontalen.

Wir können uns ein noch lebendigeres Bild von den Lagen der erwähnten Geraden verschaffen. Nehmen wir an, die Wurfrichtung OW drehe sich, umgekehrt wie der

Uhrzeiger, mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Coordinatenebene um den festen O , so entsteht die Frage, welche Bewegungen alsdann Brennpunkts- und Scheitelgerade vollführen. Die klarste Antwort hierauf sind die Differentialverhältnisse:

$$\frac{d(2\alpha)}{d\alpha} = 2; \quad \frac{d\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha'\right)}{d\alpha} = \frac{d \arctg \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)}{d\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha}.$$

Aus dem ersten derselben erkennen wir, daß die gleichförmige Drehung der Wurfrichtung eine ebenfalls gleichförmige und gleichsinnige, aber doppelt so schnelle Drehung der Brennpunktsgersten zur Folge hat. Weil nun beim horizontalen Wurf die Brennpunktsgerade einen Winkel von 90° mit dieser Wurfrichtung macht, so sieht man ein, daß wenn der Wurfinkel von 0° bis 45° gewachsen ist, die Brennpunktsgerade unterdessen einen Winkel von 90° beschrieben hat, also mit der Horizontalen zusammenfällt und sich der Wurfrichtung bis auf 45° Winkelabstand genähert hat; es versteht sich ferner, daß die Brennpunktsgerade die Wurfrichtung einholt, sobald $\alpha = 90^\circ$ wird, und daß, bei noch größeren Wurfinkeln, die Brennpunktsgerade der Wurfrichtung vorausseilt, sich wieder unterhalb dieselbe biegt und stets weiter von ihr entfernt, bis bei $\alpha = 180^\circ$ der Winkelabstand wieder 90° geworden ist; zur Erkenntnis alles dessen wäre übrigens die Bildung des Differentialquotienten nicht erforderlich gewesen. Mehr lehrt uns das zweite der oben aufgestellten Differentialverhältnisse. Es beweist zunächst, daß die Geschwindigkeit der Scheitelgeraden nicht in einem so einfachen, constanten Verhältnisse zu derjenigen der Wurfrichtung steht; dieses Verhältnisse ist von α abhängig, aber in jedem gegebenen Falle leicht zu berechnen. Machen wir z. B. successive die Annahmen:

$$\sin^2 \alpha = 0, = \frac{1}{2}, = \frac{2}{3}, = \frac{8}{9}, = 1,$$

so erhalten wir dem entsprechend

$$\frac{d\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha'\right)}{d\alpha} = \frac{1}{2}, = \frac{4}{5}, = 1, = \frac{3}{2}, = 2.$$

Die gleichförmige Drehung der Wurfrichtung von $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha = 90^\circ$ bewirkt also eine gleichsinnige, ungleichförmig beschleunigte Drehung der Scheitelgeraden; darüber hinaus wird die Geschwindigkeit der Scheitelgeraden eine ungleichförmig verzögerte seyn. Weil wir uns für $\alpha = 0^\circ$ die Scheitelgerade mit der horizontalen Wurfrichtung zusammenfallend denken können (in Wahrheit ist dann jene Gerade auf den Punkt O reducirt), so wird zunächst in Folge eines unendlich kleinen Incrementes von $\alpha = 0^\circ$ die Scheitelgerade um halb so viel sich drehen als die Wurfrichtung, also unterhalb dieser zurückbleiben; fährt α gleichförmig zu wachsen fort, so wächst zwar das Verhältniß der Drehung der Scheitelgeraden zur Drehung der Wurfrichtung und ist bereits von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{4}{5}$ gestiegen, wenn α von 0° bis 45° gewachsen ist; da aber bis jetzt das genannte Verhältniß immer kleiner als 1 blieb, so mußte die Scheitelgerade stets mehr gegen die Wurfrichtung zurückbleiben; der Winkelabstand beider Geraden wird ein Maximum, wenn $\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$ und $d\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha'\right) = 1$ geworden ist. Von hier ab dreht sich die Scheitelgerade schneller als die Wurfrichtung, für $\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$ z. B. schon $\frac{3}{2}$ mal so schnell; beide Gerade nähern sich daher beständig, bis sie für $\alpha = 90^\circ$ coïncidiren. In diesem Augenblicke bewegt sich die Scheitelgerade doppelt so schnell, als die Wurfrichtung, also ebenso rasch, als die in diesem Momente gleichfalls mit ihr zusammenfallende Brennpunktsgerade. Der Gang für $\alpha > 90^\circ$ versteht sich hiernach von selbst.

Auf das Maximum des Winkels $\alpha - \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha'\right) = \frac{\alpha}{2} - \alpha'$ zwischen Wurfrichtung und Scheitelgeraden führt auch die Gleichung:

$$-\frac{d\left(\frac{\alpha}{2} - \alpha'\right)}{d\alpha} = -\frac{d\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha'\right)}{d\alpha} + 1 = 0$$

Man zieht hieraus die oben gefundene Bedingung $\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$, welche identisch mit $\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{2}$ ist. Mit Benutzung einer

logarithmischen Tafel fand ich den hierdurch bestimmten spitzigen Winkel nahezu $\alpha = 54^\circ 44' 8'',2$. Da nun $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha'\right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so hat man sofort $\frac{\alpha}{2} + \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha = 35^\circ 15' 15'',8$ und kann jetzt aus diesen beiden Werthen auch die übrigen Winkel von Interesse ableiten; ich stelle dieselben hier zusammen:

$$\alpha = 54^\circ 44' 8'',2; \quad \frac{\alpha}{2} = 27^\circ 22' 4'',1; \quad \frac{\alpha}{2} + \alpha' = 35^\circ 15' 51'',8$$

$$\alpha' = 7^\circ 53' 47'',7; \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 19^\circ 28' 16'',4;$$

$$\frac{\pi}{2} - \alpha' = 19^\circ 28' 16'',4.$$

In Worte gefaßt giebt dies folgenden Satz: *Bei dem Wurfwinkel $\alpha = 54^\circ 44' 8'',2$ macht die Scheitelgerade mit der Wurfrichtung den möglichst großen Winkel $19^\circ 28' 16'',4$; eben diesen nämlichen positiven Winkelabstand $19^\circ 28' 16'',4$ besitzt gleichzeitig die Brennpunktsgerade von der Horizontalen, während die Scheitelgerade mit der Horizontalen und die Brennpunktsgerade mit der Wurfrichtung den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha = 35^\circ 15' 51'',8$ bildet.* Ähnliches gilt natürlich, wenn wir die stumpfen Winkel $\pi - \alpha = 125^\circ 15' 51'',8$ als Wurfwinkel wählen; außerdem bemerkt man leicht, *dafs die α entsprechende Wurfrichtung in diesem Falle normal zu der $\pi - \alpha$ entsprechenden Scheitelgeraden steht, und ebenso die $\pi - \alpha$ entsprechende Wurfrichtung normal zu der α entsprechenden Scheitelgeraden.*

Untersuchen wir jetzt, wann der Winkel $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ der Brennpunktsgeralen mit der x -Axe = dem Winkel $\frac{\alpha}{2} + \alpha'$ der Scheitelgeraden mit der x -Axe wird. Da alsdann Brennpunkts- und Scheitelgerade gleiche und entgegengesetzte Winkel mit der x -Axe machen, so haben wir $\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$ zu setzen, woraus $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt. Nennen wir den zu

1) Dieselbe differirt nicht viel vom Polarisationswinkel des Glases.

dem Zeichen + gehörigen Winkel speciell α , so wird der zu dem Zeichen — gehörige $\pi - \alpha$ seyn. Nach dem Vorausgegangenen wissen wir nun sogleich, daß $\alpha = 35^\circ 15' 51'',8$, und hieraus schließsen wir auf die anderen, uns interessirenden Winkel; zusammengestellt sind dieselben:

$$\alpha = 35^\circ 15' 51'',8; \pi - \alpha = 144^\circ 44' 8'',2; \frac{\alpha}{2} = 17^\circ 37' 55'',9$$

$$\frac{\pi}{2} - 2\alpha = \frac{\alpha}{2} + \alpha' = 19^\circ 28' 16'',4; \alpha' = 1^\circ 50' 20'',5.$$

Wirft man also unter den Winkel $35^\circ 15' 51'',8$, oder $144^\circ 44' 8'',2$, so bilden die jedesmaligen Brennpunkts- und Scheitelgeraden gleiche und entgegengesetzte, spitzige Winkel von $19^\circ 28' 16'',4$ mit der positiven, resp. negativen x -Axe; daher fällt die zu α gehörige Brennpunktsgerade im vorliegenden Falle in die Rückverlängerung der $\pi - \alpha$ entsprechenden Scheitelgeraden, und ebenso die $\pi - \alpha$ entsprechenden Brennpunktsgerade in die Rückverlängerung der zu α gehörigen Scheitelgeraden. Die jetzigen Wurfrichtungen coincidiren mit den vorher betrachteten Lagen der Scheitelgeraden, in welchen diese von den betreffenden Wurfrichtungen ($\alpha = 54^\circ 44' 8'',2$ und $125^\circ 15' 51'',8$) möglichst weit, und zwar um $19^\circ 28' 16'',4$ abweichen, die jetzigen Scheitelgeraden mit den damaligen Brennpunktsgeraden; die jetzige, α entsprechende Brennpunktsgerade fällt in die Rückverlängerung der dem damaligen $\pi - \alpha$ entsprechenden Brennpunktsgeraden, und die jetzige, $\pi - \alpha$ entsprechende Brennpunktsgerade in die Rückverlängerung der dem damaligen α entsprechenden Brennpunktsgeraden; die jetzige Wurfrichtung von $35^\circ 15' 51'',8$ steht normal zur damaligen von $125^\circ 15' 51'',8$ und die jetzige Wurfrichtung von $144^\circ 44' 8'',2$ normal zur damaligen von $54^\circ 44' 8'',2$. Bei dem Wurfwinkel $35^\circ 15' 51'',8$ gegen die positive oder negative x -Axe bilden die Brennpunktsgerade, die x -Axe, die Scheitelgerade und die y -Axe ein harmonisches Büschel; OB , OS und OX , OY sind einander zugeordnete Strahlen; gleichzeitig sind — wie für jedes α — OX , OW und OS , OY zugeordnete, harmonische Strahlen; daher bilden bei dem Wurfwinkel $\frac{\pi}{2} - 35^\circ 15' 51'',8$

$= 54^{\circ} 44' 8'',2$ die x -Axe, die Brennpunktsgerade, die Scheitelgerade und die y -Axe ebenfalls ein harmonisches Büschel mit den zugeordneten Strahlen OX , OS und OB , OY ; natürlich existirt auch in diesem Falle ein zweites harmonisches Büschel, bestehend aus OX , OW und OS , OY . Wir werden weiter unten noch eine andere Eigenthümlichkeit dieser Fälle nachweisen.

Gesetzt jetzt, es sey erwünscht, die Lage des Brennpunkts und Scheitels irgend einer der parabolischen Bahnen, die bei demselben α und verschiedenen c entstehen, schnell ermitteln zu können, so würde man sich vortheilhaft eine der Fig. 26 Taf. III analoge, dem gegebenen α entsprechende, Zeichnung der geometrischen Oerter OB und OS herstellen. Um dann den Brennpunkt zu finden, reicht es aus, seine Distanz vom Coordinatenanfang zu kennen: diese ist aber $= \sqrt{x^2 + y^2}$, wenn wir mit x , y die Coordinaten des Brennpunkts bezeichnen; unter Berücksichtigung der oben hierfür erhaltenen Werthe ergibt sich so für die fragliche Distanz der Werth $a = \frac{c^2}{2g}$, d. h. der Brennpunkt liegt immer so weit vom Ausgangspunkt der Bahn ab, als sich ein mit der jeweiligen Anfangsgeschwindigkeit c vertical aufwärts geworfener Punkt erheben würde; liefse man demnach bei constantem c den Winkel α beliebig variiren, so erhielte man als geometrischen Ort der Brennpunkte einen um O mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreis, (s. u. III). Der Scheitel liegt in OS , vertical über dem Brennpunkte; aus der Lage des Scheitels folgen schliesslich Wurfhöhe und Wurfweite.

III.

Richten wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die Bahnen, die bei constanter Anfangsgeschwindigkeit c und verschiedenen Wurfwinkeln α entstehen! Um in diesem Falle die Gleichungen der geometrischen Oerter der Brennpunkte und Scheitel zu erhalten, haben wir durch Elimination des

veränderlichen α Relationen zwischen den Coordinaten jener Punkte aufzustellen. Es ergibt sich leicht:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ (Gl. des Orts d. Brennp.)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1 \text{ (Gl. d. Orts d. Scheitel).}$$

Hieraus schliessen wir, *dass der Ort der Brennpunkte ein mit dem Radius a um den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der Bahnen (Coordinatenanfang) als Mittelpunkt beschriebener Kreis ist, der Ort der Scheitel hingegen eine oberhalb der Horizontalen gelegene Ellipse, deren Mittelpunkt in der Entfernung $\frac{a}{2}$ vom Coordinatenanfang auf der y -Axe liegt, deren kleine, in die y -Axe fallende, Halbaxe den Werth $\frac{a}{2}$, und deren grosse, der x -Axe parallele, Halbaxe den Werth a hat.* Auf den Kreis waren wir bereits vorhin gekommen; der Ellipse ist u. a. schon in Duhamel's analytischer Mechanik, herausgeg. von Schlömilch, Erwähnung geschehen (vergl. das. Bd. 1 S. 347). Der Kreis trifft den grossen Durchmesser der Ellipse augenscheinlich in deren Brennpunkten.

Während α alle Werthe von 0° bis 180° durchläuft, beschreibt der Brennpunkt der mit α veränderlichen Bahn den Kreis $K_0 K_1 K_2 K_3 K_0$ (Fig. 27 Taf. III) und der Scheitel zu gleicher Zeit die Ellipse $E_0 E_1 E_2 E_3 E_0$; die mit 0, 1, 2, 3, 0 signirten Punkte entsprechen den Wurfwinkeln 0° , 45° , 90° , 135° , 180° (vgl. die Ausdrücke für die Coordinaten des Brennpunkts und Scheitels). Uebereinstimmend mit dem Früheren coincidirt K_2 mit E_2 und liegen die zu den Scheiteln E_1 , E_3 gehörigen Brennpunkte K_1 , K_3 in der horizontalen x -Axe, K_0 aber in der negativen y -Axe.

Um die in Folge einer Aenderung des α eintretenden Bewegungen des Brennpunkts und Scheitels schärfer zu erkennen, bilden wir die Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{d\alpha} = 2a \cos 2\alpha; \quad \frac{dy}{d\alpha} = 2a \sin 2\alpha \quad (\text{für den Brennpunkt})$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = 2a \cos 2\alpha; \quad \frac{dy}{d\alpha} = a \sin 2\alpha \quad (\text{für d. zugehörigen Scheitel}).$$

Man sieht hieraus zunächst, daß die horizontalen Componenten der Bewegung beider Punkte stets einander gleich sind, daß also diese Punkte für jedes α in Einer Verticalen liegen müssen, wenn dieß für irgend ein α der Fall ist; das Maximum der horizontalen Geschwindigkeiten findet für $\alpha = 0^\circ$, $= 90^\circ$ und 180° statt, das Minimum 0 für $\alpha = 45^\circ$, oder $= 135^\circ$; (hiebei ist stillschweigend die Voraussetzung gemacht, α sey der Zeit proportional). Man erkennt ferner, daß die verticale Componente der Bewegung des Brennpunkts stets doppelt so groß als diejenige des Scheitels ist; da nun für $\alpha = 0^\circ$ der Brennpunkt um a unterhalb des in O befindlichen Scheitels liegt, so wird der Brennpunkt in die Horizontale sich erhoben haben, wenn bei $\alpha = 45^\circ$ der Scheitel um $\frac{a}{2}$ darüber hinaus gestiegen ist; hat der Scheitel aber bei $\alpha = 90^\circ$ die Verticalsteigung a vollzogen, so wird der Brennpunkt eine solche von $2a$ gemacht, d. h. den Scheitel eingeholt haben; an eine andere, hiermit zusammenhängende, Thatsache werden wir weiter unten erinnern. Das Verhältniß der von Brennpunkt und Scheitel beschriebenen Bogenelemente zu der gleichzeitig stattgefundenen Aenderung des Wurfwinkels, resp. die Gränzen jener Verhältnisse geben uns die Differentialquotienten

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} = 2a \quad (\text{für den Brennpunkt})$$

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} = a \sqrt{1 + 3 \cos^2 2\alpha} \quad (\text{für d. Scheitel})$$

hieraus findet man das unter einander bestehende Verhältniß der genannten, durch zwei unendlich nahe Verticalen auf Kreise und Ellipse begränzten Bogenelemente

$$\frac{ds}{d\sigma} = 2 : \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

Wenn demnach α von den Werthen 0° , oder 90° an eine Zunahme $d\alpha$ erfährt, so fallen die von dem Brennpunkte auf dem Kreise und von dem Scheitel auf der Ellipse beschriebenen, unendlich kleinen, horizontalen Wegelemente gleich lang aus; ändert sich aber α von 45° , oder 135° an, so ist das vom Brennpunkt beschriebene, verticale Kreiselement doppelt so groß als das gleichzeitig vom Scheitel beschriebene, verticale Ellipselement; im Allgemeinen hat das Größenverhältniß $\frac{ds}{d\sigma}$ einen zwischen 1 und 2 liegenden Werth, was daher auch bezüglich des Verhältnisses des ganzen Kreisumfanges zum ganzen Ellipsenumfange gelten muß. Diese, bei dem Wachsthum des α von 0° bis 180° , von Brennpunkt und Scheitel zurückgelegten, geschlossenen Bahnen verhalten sich natürlich auch wie Kreis- und Ellipsenquadrant; der arithmetische Ausdruck für dieses Verhältniß ist bekanntlich

$$s : \sigma = \frac{1}{2}\pi a : a E(k, \frac{1}{2}\pi),$$

worin $E(k, \frac{1}{2}\pi) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ das vollständige, elliptische Integral zweiter Art bedeutet, mit dem *Modulus*

(hier identisch mit der numerischen Excentricität) $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, wenn a, b die Halbaxen der Ellipse sind,

und mit der *Amplitude* (hier identisch mit dem Complement der excentrischen Anomalie) $\frac{1}{2}\pi$. Jenes Integral kann durch Zugrundelegung einer nach geraden Potenzen, entweder von k , oder von $k' = \sqrt{1 - k^2} = \frac{b}{a}$ fortschreitenden, unendlichen

Reihe berechnet werden. Gegenwärtig ist $k = \sqrt{0,75} = 0,8660255$, $k' = 0,5$, also k' weit kleiner als k und daher die Reihe mit k' derjenigen mit k vorzuziehen. Uebrigens sind wir durch die in Schlömilch's logarithmischen Tafeln angegebenen Längen von Ellipsenquadranten der Mühe der Berechnung überhoben und erhalten sogleich

$$\frac{s}{\sigma} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1,21106} = \frac{1,5708}{1,21106} = \frac{1}{0,770983} = 1,2970456.$$

Schneller noch finden wir das Verhältniß der von Brennpunkt und Scheitel umschriebenen Flächen; dasselbe ist offenbar $= \frac{\pi a^2}{\pi a b} = \frac{a}{b} = 2$; der Flächengehalt des Kreises ist das Doppelte von dem der Ellipse.

Wollte man die für ein gegebenes c construirten Oerter, Kreis und Ellipse, benutzen, um für jedes α schnell die Lage des resultirenden Brennpunkts und Scheitels zu ermitteln, so würde z. B. die Kenntniß der diesen Punkten gemeinsamen Abscisse völlig genügen. Je nachdem nun α dem ersten, oder zweiten Quadranten angehört, kann man setzen:

$$\sin 2\alpha = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} \mp \alpha_1\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \mp 2\alpha_1\right) = \cos 2\alpha_1,$$

oder

$$\sin 2\alpha = \sin 2\left(\frac{3\pi}{4} \mp \alpha_1\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} \mp 2\alpha_1\right) = -\cos 2\alpha_1,$$

und diesen Fällen entsprechend wird also die fragliche Abscisse:

$$x = a \sin 2\alpha = a \cos 2\alpha_1, \text{ oder } x = a \sin 2\alpha = -a \cos 2\alpha_1.$$

Hieran knüpft sich folgende Regel: Man ziehe, je nachdem α dem ersten, oder zweiten Quadranten angehört, unter dem geeigneten, spitzigen Winkel $2\alpha_1$ gegen die positive, oder negative Richtung der x -Axe einen Kreisradius und durch den Endpunkt desselben eine Parallele mit der y -Axe; die Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit dem Kreis und der Ellipse sind dann die gesuchten Punkte. In der Figur ist angenommen, daß α in dem Intervall 0° bis 90° liege; den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4} - \alpha_1$ entsprechen dann die Punkte B , S und dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4} + \alpha_1$ die Punkte B' , S' ; OM ist die in beiden Fällen gleiche halbe Wurfweite; SM , resp. $S'M$ ist die Wurfhöhe.

In Hinsicht auf die vorausgegangenen Betrachtungen können wir uns über die Lage des Brennpunkts und Scheitels einer bei der Anfangsgeschwindigkeit c und dem Wurfwin-

kel α entstehenden parabolischen Bahn auch so aussprechen: Der *Brennpunkt* ist der Schnittpunkt eines um den Ausgangspunkt beschriebenen Kreises vom Halbmesser $a = \frac{c^2}{2g}$ mit einer vom Ausgangspunkt unter dem Winkel 2α gegen die negative y -Axe gezogenen Geraden, den Winkel im positiven Sinne von dieser Axe ausgezählt gedacht; oder kürzer: *der Brennpunkt ist der Schnittpunkt des durch c bestimmten Brennpunktskreises mit der durch α bestimmten Brennpunktsgeraden.* Analog ist der *Scheitel* der Schnittpunkt einer oberhalb der horizontalen liegenden, diese im Ausgangspunkt der Bahn berührenden *Ellipse* vom großen, horizontalen Halbmesser a und vom kleinen, vertikalen Halbmesser $\frac{a}{2}$ mit einer vom Ausgangspunkt unter dem positiven Winkel $\frac{\alpha}{2} + \alpha'$ gegen die positive x -Axe gezogenen Geraden, den Winkel α' durch die Gleichung $\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$ definirt gedacht; oder kürzer: *der Scheitel ist der Schnittpunkt der durch c bestimmten Scheitellellipse mit der durch α bestimmten Scheitelgeraden.*

Die Durchschnittspunkte P, P' des Kreises mit der Ellipse sind gleichzeitig Scheitel zu den unterhalb gelegenen Brennpunkten Q, Q' und Brennpunkte zu den oberhalb befindlichen Scheiteln R, R' ; sie bieten aber noch ein weiteres Interesse. Zieht man nämlich durch dieselben die vertikalen Sehnen $PQ, P'Q'$, so ist klar, daß diese, wie jede andere vertikale Kreissehne, von der horizontalen x -Axe halbiert werden; durch OQ, OP und OQ', OP' sind daher die bereits von uns besprochenen Brennpunkts- und Scheitelgeraden gegeben, welche gleiche und entgegengesetzte Winkel mit der positiven und negativen x -Axe machen; die Brennpunktsgerade OQ fällt in die Rückverlängerung der Scheitelgeraden OP' und die Brennpunktsgerade OQ' in die Rückverlängerung der Scheitelgeraden OP . Die Coordinaten der Punkte P, P' sind bestimmt durch die beiden simultanen Gleichungen

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1,$$

woraus man drei Paare zusammengehöriger Coordinaten zieht, nämlich:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = a; \quad x_2 = +\frac{2}{3}a\sqrt{2}, \quad y_2 = \frac{1}{3}a; \quad x_3 = -\frac{2}{3}a\sqrt{2}, \\ y_3 = \frac{1}{3}a.$$

Das erste Paar bestimmt den Punkt K_1E_1 , das zweite P , das dritte P' . Die Gleichung der Scheitelgeraden OP ist daher $y = \frac{y_1}{x_1}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}x$, was mit unserer früheren Gleichung $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \cdot x$ für $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, wie es seyn muß, übereinstimmt.

Den Werthen ihrer Ordinaten gemäß liegen die Punkte P, P' um $\frac{1}{3}a$ über, die Punkte Q, Q' um ebensoviel unter dem Horizont; die Strecken RD und $R'D'$, sowie die Ellipsensehnen RP und $R'P'$ sind daher ebenfalls $=\frac{1}{3}a$, so daß die Abstände a der Punkte D, D' von der Horizontalen durch die Ellipsenpunkte R, P und R', P' in drei gleiche Theile zerlegt werden; dieß führt zu dem Satz: Wirft man einen schweren Punkt mit der Geschwindigkeit c unter dem Winkel $ROX = 35^\circ 15' 51'',8$, so fällt der Scheitel der Bahn in den Punkt P und der Brennpunkt derselben nach Q dergestalt, daß die drei Punkte R, P, Q in eine Vertikale zu liegen kommen (was außer bei den Punkten R', P', Q' nur noch beim horizontalen und vertikalen Wurfe der Fall ist)¹⁾, und daß Winkel $POX = QOX = 19^\circ 28' 16'',4$ wird; zu dem entspricht dem Wurfwinkel $\frac{\pi}{2} - ROX = 54^\circ 44' 8'',2$ eine Parabel, deren Scheitel in R und deren Brennpunkt in P liegt; auch bildet bei diesem Wurfwinkel die Scheitelgerade den möglichst großen Winkel $19^\circ 28' 16'',4$ mit der Wurfrihtung. Daß sich diesem Satze ein ähnlicher an die Seite stellen läßt, wenn man von dem Wurfwinkel $R'OX = \pi - ROX$ ausgeht, versteht sich von selbst.

1) Der Beweis für die Richtigkeit obiger Behauptung bildet den Schluß dieses Aufsatzes.

Weil ferner die Scheitel R , R' von den zugehörigen Brennpunkten P , P' und von den Punkten D , D' gleichweit abstehen, so folgt, daß die Gerade DD' die *Directrix* der betreffenden beiden Bahnen ist; da jedoch bei constantem c und veränderlichem α die Brennpunkte sämtlicher Bahnen gleichweit von O abstehen, O aber allen Bahnen gemeinsam ist, so muß die jedenfalls horizontallaufende *Directrix* DD' für alle diese Bahnen dieselbe seyn. Man schließt dies auch sehr leicht aus der Gleichung der *Directrix* $y = n + \frac{p}{4} = a$, oder aus dem schon erwähnten Umstande, daß der Diffe-

rentialquotient $\frac{d\left(n - \frac{p}{4}\right)}{d\alpha} = 2 \frac{dn}{d\alpha}$, d. h. daß die in Folge einer Aenderung des α eintretende, positive oder negative Vertikalsteigung des Brennpunkts immer das Doppelte der in gleichem Sinne erfolgenden Neigung des Scheitels beträgt. Die Gemeinschaftlichkeit der *Directrix* für oben charakterisirte Bahnen ist u. a. schon in Duhamel's analytischer Mechanik hervorgehoben, auf welches Werk ich bezüglich einiger anderen hierher gehörigen Betrachtungen nochmals verweise.

Bevor ich schliesse, sey es mir erlaubt, noch auf eine andere Thatsache aufmerksam zu machen! Da die durch den Brennpunkt einer Ellipse von den Halbmessern a , b normal zur großen Axe $2a$ gezogene Sehne bekanntlich $= 2 \frac{b^2}{a}$ ist, so giebt dies für die abgehandelte Scheitelellipse die Größe $\frac{a}{2} =$ der kleinen Halbaxe. Dies geht übrigens auch aus dem unmittelbar einleuchtenden Theorem hervor: Zieht man durch die Durchschnittspunkte des Brennpunktskreises mit der großen Axe der Scheitelellipse, d. h. durch die Brennpunkte der letztern Curve vertikale Gerade, so werden die von der x -Axe und der *Directrix* DD' begränzten Stücke a derselben durch die Ellipse und deren große Axe in vier gleiche Theile zerlegt. Die zu den Brennpunkten der Ellipse und den oberhalb liegenden Scheiteln gehörigen Wurf-

linien haben den Parameter a und entsprechen den Wurf-
winkeln 60° und $\pi - 60^\circ$; die zu den unterhalb liegenden
Scheiteln und Brennpunkten gehörigen Bahnen haben den
Parameter $3a$ und entstehen bei den Wurf-
winkeln 30° und $\pi - 30^\circ$. Der Parameter $2a$ kommt bei den Wurf-
winkeln 45° und $\pi - 45^\circ$ vor, der Parameter $4a$ beim horizontalen,
der Parameter 0 beim vertikalen Wurf. Der Parameter
 $4a$ besitzt auch die Umhüllende (Envelope) der zahllosen,
diesem a und allen möglichen a entsprechenden Wurf-
linien; der Scheitel der umhüllenden, nach der Richtung der
Schwere sich öffnenden, Parabel liegt, wie bekannt, auf der
positiven y -Axe um die Strecke a von O entfernt, der
Brennpunkt derselben also in O selbst. Denkt man sich
jeden der beiden Aeste der Umhüllenden successive gebildet,
indem von der vertikalen Wurf-
linie an zu beiden Seiten
in continuirlicher Aufeinanderfolge die unzähligen, anderen
Bahnen auftreten, so erscheinen die genannten Aeste als
identisch mit den parabolischen Curven, die durch zwei vom
Scheitel $K_2 E_2$ der Enveloppe horizontal nach rechts und
links mit der Geschwindigkeit c geworfenen, schweren
Punkte beschrieben werden.

Die umhüllende Parabel trennt bekanntlich die bei der
Anfangsgeschwindigkeit c unerreichbaren Punkte von den
durch je zwei Bahnen erreichbaren; die Punkte der Umhül-
lenden selbst können nur durch je Eine, sie tangirende Bahn
getroffen werden. Wenn man bedenkt, daß die dem Wurf-
winkel 45° entsprechende Bahn mit dem rechtsliegenden
Aste der Umhüllenden in demselben Punkte die Horizontale
trifft, also den erwähnten Ast in der Horizontalen berührt,
so sieht man ein, daß die Berührungspunkte der bei kleinern
Wurf-
winkeln entstehenden Bahnen von geringerer Wurf-
höhe und Wurfweite unterhalb des Horizonts liegen müssen;
an der Bildung des oberhalb der Horizontalen befindlichen
Stückes des rechtsliegenden Enveloppenastes können nur
die zu den Wurf-
winkeln 90° bis 45° gehörigen Bahnen An-
theil haben. Am deutlichsten geht dieß aus den Werthen
für die Coordinaten des Berührungspunktes hervor; wir fin-

den dieselben aus zwei gleichzeitigen Relationen zwischen x , y , wovon die eine die Umhüllende, die andere irgend eine der erzeugenden Parabeln (Charakteristiken) repräsentirt. Wir haben nun: $x^2 = 4a(a - y)$ (Envelope); $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4a \cos^2 \alpha}$ (Charakteristik); setzt man die aus beiden Gleichungen genommenen Werthe von y einander gleich, so wird

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot x^2 - 4ax + 4a^2 \cot \alpha = 0$$

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2}}{\operatorname{tg} \alpha} = 2a : \operatorname{tg} \alpha; \quad y = a - \frac{x^2}{4a} = a(1 - \cot^2 \alpha)$$

Diese Ausdrücke für die Coordinaten des Berührungspunktes bestätigen, bei verschiedenen Annahmen für α , das oben Gesagte vollkommen; dafs die bei horizontalem Wurfe entstehende Bahn die Umhüllende erst im Unendlichen berührt, hätten wir auch daraus schliessen können, dafs jener Wurfline derselbe Parameter, wie der Envelope, zukommt.

Es bleibt mir noch übrig, eine vorausgegangene Behauptung zu rechtfertigen. Ich sagte, dafs der Schnittpunkt der Wurfrichtung mit der Scheitelellipse, ausser beim horizontalen und vertikalen Wurfe, nur dann mit Scheitel und Brennpunkt der resultirenden Bahn in Eine Vertikale fiele,

wenn $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{2}}$, also $\alpha = 35^\circ 15' 51'', 8$, oder $= 144^\circ 44' 8'', 2$

wäre. Um dies zu beweisen, erinnern wir uns an die Gleichung $x = a \sin 2\alpha$ der durch Scheitel und Brennpunkt gehenden Vertikalen und schliessen daraus, dafs die Abscisse des Schnittpunktes der Wurfrichtung mit der Ellipse denselben Werth $a \sin 2\alpha$ haben mufs, falls er in jener Vertikalen liegen soll. Die Coordinaten des genannten Schnittpunktes sind durch die zwei Gleichungen

$$y = x \operatorname{tg} \alpha \text{ (Wurfrichtung); } \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1 \text{ (Ellipse)}$$

völlig bestimmt. Substituirt man den aus der ersten Gleichung genommenen Werth von y in die zweite, so wird diese zu

$$[(1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha)x - 4a \operatorname{tg} \alpha]x = 0.$$

Hieraus folgen für die gewünschte Abscisse die zwei Werthe

$x_1 = 0$; $x_2 = 4a \operatorname{tg} \alpha : (1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha) = 2a \sin 2\alpha : (1 + 3 \sin^2 \alpha)$; der erste derselben bezieht sich auf den unabänderlichen Ausgangspunkt O , der andere auf den zweiten, von α abhängigen Schnittpunkt. Damit nun zunächst $0 = a \sin 2\alpha$ sey, muß $\alpha = 0^\circ$, $= 180^\circ$, oder $= 90^\circ$ genommen werden; die Bedeutung dieser Bedingungen ist klar: bei horizontalem Wurfe stellt offenbar der Punkt O die zwei *zusammengerückten* Schnittpunkte vor, welche mit Scheitel und Brennpunkt in die nämliche Vertikale, die negative y -Axe, fallen, und zwar coïncidirt der Scheitel mit den beiden Schnittpunkten in O ; bei vertikalem Wurfe wird $x_1 = x_2 = 0$, es fallen jetzt beide *getrennte* Schnittpunkte in die durch Scheitel und Brennpunkt gezogene Vertikale und zwar befindet sich der zweite (von O verschiedene) Schnittpunkt sammt Brennpunkt und Scheitel in einem und demselben Punkte $K_1 E_2$. Damit aber $2a \sin 2\alpha : (1 + 3 \sin^2 \alpha) = a \sin 2\alpha$ werde, muß $\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}$, oder $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{2}}$ seyn; weitere Möglichkeiten sind nicht vorhanden.

Karlsruhe, im Januar 1868.

VI. Ueber das relative Volum der Verbindungen zweiter Ordnung; von P. Kremers.

Die hiernächst zusammengestellten, der mittlern Temperatur entsprechenden Volumina sind berechnet aus den früher (Bd. 120, S. 632 und Bd. 122, S. 249) angeführten Atomgewichten ¹⁾ und den im Folgenden näher bezeichneten speci-

1) Die von den frühern verschieden angenommenen Atomgewichte sind folgende:

K = 39,0; Ag = 107,7; Cl = 35,4; Br = 79,8; J = 126,5 Stas 65.

Tl = 203,6 Werthier 64. W = 92,1 Marchand 50, Schneider 50.