**9. Über Beseitigung der ungleichmäßigen Stromverteilung in Wechselstromleitern;
von F. Dolezalek und H. G. Möller.**

In einem von Wechselstrom durchflossenen dicken Leiter — Starkstromkabel — werden die Stromlinien nach der Oberfläche hin gedrängt und dadurch der Widerstand des Leiters erhöht. Diese Widerstandserhöhung ist ziemlich beträchtlich. Der erhöhte Widerstand w' berechnet sich nach Stefan¹⁾ zu

$$w' = w \left(1 + \frac{c^2}{12} - \frac{c^4}{180} + \frac{11 c^6}{26880} - \dots \right),$$

wobei w der Gleichstromwiderstand des Leiters und

$$c = \frac{2 \pi \text{ Periodenzahl. Querschnitt}}{\text{Spezifischen Widerstand (für Kupfer 1650)}}$$

bedeutet. Für einen Kupferquerschnitt von 1,5 cm Radius und bei nur 100 Perioden wird der Widerstand des Seiles bereits auf das 1,6 fache gesteigert. Die Beseitigung des Skin-effektes bedeutet mithin in diesem Falle eine Ersparnis von ca. 40 Proz. Kupfer.

Diese ungleichmäßige Stromverteilung hat bekanntlich ihre Ursache in Induktionswirkungen. Die inneren Drähte sind von mehr Magnetkraftlinien umschlossen wie die äußeren, daher bildet sich in ihnen schon bei geringerer Stromstärke dieselbe elektromotorische Gegenkraft aus wie in den äußeren.

Will man die gleichmäßige, das aufgewandte Kupfer am besten ausnutzende Stromverteilung erzwingen, so muß man entweder die einzelnen Drähte derartig führen, daß sie bei Betrachtung eines längeren Stückes alle von derselben Kraftlinienzahl umschlossen werden, oder man muß die elektromotorische

1) J. Stefan, Wiener Ber. 95. II A. p. 917. 1887.

Gegenkraft der äußeren Drähte durch Zuschalten von Selbstinduktion erhöhen. Und zwar wird allein Zuschalten von Selbstinduktion genügen. Denn der vom Ohmschen Widerstand herrührende Anteil der elektromotorischen Gegenkraft ist bereits gleich. Eine Erhöhung des energiefressenden Teiles des Wechselstromwiderstandes durch die Kompensation auf die zweite Art ist also nicht nötig.

Auf dem ersten Gedanken beruht das deutsche Patent der Firma Siemens & Halske A.-G. (Dr. Adolf Franke); durch geeignetes Verdrallen wird jeder Draht abwechselnd nach innen und nach außen geführt. Alle Drähte sind dann bezüglich ihrer Lage und gegenseitigen Induktion einander gleichartig, so daß keine Ursache für ungleichmäßige Stromverteilung mehr vorhanden ist. Die Versuche haben dieses Resultat auch vollauf bestätigt. Ein derartig verflochtenes Seil besitzt jedoch einen größeren Gesamtquerschnitt wie ein konzentrisch verseilter Leiter von gleichem Kupferquerschnitt. Dadurch werden wieder die Kosten an Isolationsmaterial und Armierung vermehrt. Es ist daher ein für die Fortleitung von Wechselströmen wichtiges Problem, den Skinneffekt ohne wesentliche Verdickung des Leiters, d. h. bei konzentrischer Verseilung zu beseitigen.

Das läßt sich nach dem zweiten angegebenen Gedanken dadurch erreichen, daß in die einzelnen Lagen¹⁾ Selbstinduktionen eingeschaltet werden, deren Größe so bemessen ist, daß bei gleichmäßiger Stromverteilung in den so vervollständigten Leiterzweigen die gleiche elektromotorische Gegenkraft ausgebildet wird.

Diese Selbstinduktion könnte man kontinuierlich verteilen, d. h. durch geeignetes spiralisches Verdrallen hervorrufen oder diskontinuierlich in Form von Spulen einschalten. Da nach hier nicht mitzuteilenden Berechnungen der zur Kompensation des Skinneffektes nötige Drall so stark würde, daß die Länge der einzelnen Drähte und damit der Widerstand und die Dicke des ganzen Leiters wesentlich vergrößert würden und man außerdem die für Festigkeit und Biegsamkeit günstigste Art der Verdrallung beibehalten möchte, ist das Einschalten von

1) Über Zusammenfassen der Drähte der zylindrischen Lagen des Kabels wegen Rotationssymmetrie vgl. unten.

Spulen die einzig technisch brauchbare Art der Kompensation.¹⁾

Ist der Leiter, wie gewöhnlich ein Seil aus konzentrischen Lagen von Kupferdraht, so wird das Problem wesentlich durch Vorhandensein von Rotationssymmetrie vereinfacht. Es lassen sich dann die gleichwertigen Drähte einer ganzen Lage zusammenfassen und mit einer Spule kompensieren. Die Rotationssymmetrie erscheint auf den ersten Blick zwar durch den Einfluß der Rückleitung gestört. Die Berücksichtigung des Umstandes aber, daß jeder Draht infolge des Dralles ebensolange auf der der Rückleitung zugewandten Seite hinläuft wie auf der abgewandten, lehrt, daß sie tatsächlich streng vorhanden ist.

Fig. 1.

Infolge der gleichmäßigen Verteilung von Kupfer und Luftraum auf den Querschnitt des Seiles kann man das Seil durch einen von Metall entsprechend geringerer Leitfähigkeit stetig erfüllten Vollzylinder mit hinreichender Genauigkeit ersetzt denken. Dadurch wird die Durchrechnung des Problems mit stetigen Funktionen einer Variablen, des Radius, möglich.

Bei der Berechnung der Spulen hat man nach dem oben angegebenen Prinzip zunächst mit Hilfe des Magnetfeldes die elektromotorischen Gegenkräfte zu berechnen, die sich in den einzelnen Lagen bei gleichmäßiger Stromverteilung ausbilden.

Fig. 2.

Nach dem elektromagnetischen Grundgesetz ist das Linienintegral der Feldstärke h gleich der mit 4π multiplizierten

1) D.R.P. angemeldet.

Stärke des umschlossenen Stromes. Erstreckt sich die Integration längs eines Kreises mit dem Radius r , und ist i die Stromdichte, und $i \cdot \pi r^2$ der umschlossene Strom, so gilt:

$$2 \pi r h = 4 \pi i \pi r^2,$$

$$h = 2 \pi r i.$$

Bezeichnet man das von der Rückleitung herrührende Feld mit h' , so erhält man das ganze induzierende Feld durch Superposition. Die Gesamtfeldstärke heiße $\mathfrak{H}$. Aus der Feldstärke berechnet sich die elektromotorische Kraft, welche in der ganzen Begrenzung des vom Mittelleiter und der Rückleitung umschlossenen Flächenstückes F_m , also in einer Länge $2l^1$) erregt wird, durch die negative Änderungsgeschwindigkeit der F_m durchdringenden Magnetkraftlinien

$$- \frac{dZ}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \mathfrak{H} d\sigma$$

genommen über das Flächenstück F_m . Der auf den Mittelleiter der Hinleitung allein entfallende Teil der elektromotorischen Gegenkraft ist die Hälfte davon

$$E_m = - \frac{1}{2} \frac{dZ}{dt} = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{F_m} \mathfrak{H} d\sigma.$$

Analog findet man für die elektromotorische Gegenkraft in einem Draht der Lage im Abstand r

$$E_r = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{F_r} \mathfrak{H} d\sigma,$$

wobei F_r der von diesem Draht und der Rückleitung umschlossene Flächenstreifen ist.

Die durch die Spule auszugleichende Differenz ist

$$D = E_m - E_r = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{F_m} \mathfrak{H} d\sigma - \int_{F_r} \mathfrak{H} d\sigma \right) = - \frac{1}{2} \frac{dz}{dt},$$

z ist aber die Zahl der Kraftlinien, die zwischen dem Mittelleiter und dem Repräsentanten der betrachteten Lage verlaufen. Die Rückleitung liefert bei Betrachtung eines längeren

1) l sei die Länge Hin- bez. Rückleitung.

Stückes in Summa zu z nichts. Denn die einzelnen Drähte laufen von rechts, wo die Kraftlinien der Rückleitung zuzuzählen sind, über Stellen, wo ihre wirksame Komponente Null ist, nach links, wo — wenigstens bei homogenem ¹⁾ Feld der Rückleitung — ebensoviel Kraftlinien wieder abzuziehen sind, wie rechts zugezählt werden mußten. Zur Berechnung von z genügt also die Integration über das Feld h der Hinleitung allein.

$$z = \int_0^r h l dr = \pi i l r^2,$$

$$(a) \quad D = -\frac{1}{2} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2} \pi l r^2 \frac{di}{dt}.$$

Dieser Unterschied läßt sich zum Verschwinden bringen, wenn in die Lage mit dem Radius r eine Spule von der Selbstinduktion L eingeschaltet wird, so daß

$$(b) \quad D = -L \frac{dJ}{dt}$$

ist. J bedeutet die Stromstärke in der Spule und der betreffenden Drahtlage. Beträgt der Querschnitt derselben q qcm, so wird

$$(c) \quad J = qi \quad \text{und} \quad \frac{dJ}{dt} = q \frac{di}{dt}.$$

Aus Gleichung (a), (b) und (c) folgt schließlich für die Größe der einzuschaltenden Selbstinduktion:

$$L = \frac{\pi l r^2}{2 q} \text{ cm} = \frac{\pi l r^2}{2 q} 10^{-9} \text{ Henry.}$$

Die Größen l , q und r sind in Zentimetern auszudrücken. Die elektromotorische Gegenkraft infolge des Ohmschen Widerstandes besitzt in allen Schichten den identischen Wert ilw , ist daher ohne Einfluß auf die Werte von D und L . Die große Einfachheit der Gleichung für L ist für die technische Anwendung von großem Vorteil.

Der Widerstand der Spulen muß so berechnet werden, daß sein Einfluß auf die Kompensation verschwindet. Um

1) Auch bei sehr nahe am Hinleiter verlaufender Rückleitung ist Kompensation des Skineffektes auf die angegebene Weise möglich. Die Selbstinduktion der Spulen ist dann nur um wenige Prozente zu ändern.

das zu erreichen, ist entweder der Spulenwiderstand verschwindend klein im Vergleich zum Widerstand des zu kompensierenden Leiterstückes zu wählen, oder es ist in den Mittelleiter ein induktionsfreies Drahtstück einzuschalten und der Widerstand W der Spulen und des in den Mittelleiter eingeschalteten Drahtstückes so zu bemessen, daß das Produkt $i q W$ für alle Spulen und das Drahtstück gleich groß ist. Die Widerstandsglieder werden dann, wie oben, aus den Gleichungen verschwinden.

Da die Kenntnis der Periode zur Berechnung der elektrischen Konstanten der Spulen unnötig ist (di/dt hob sich beim Vergleich von (a) und (b) heraus), so gilt die *Kompensation für alle Perioden*.

Kupferersparnis bei Verwendung oben beschriebener Spulen.

Der durch den Skineffekt modifizierte Ohmsche Widerstand w' berechnet sich nach der Stefanschen Reihe für einen 2,5 cm starken Leiter bei 200 Perioden zu

$$w' = w \cdot 2,192.$$

In einem Kabel ohne Skineffekt ist aber $w' = w$. Man spart also bei Anwendung der oben beschriebenen Spulen bereits in einem Leiter von nur 2,5 cm Durchmesser 54,5 Proz., also über die Hälfte Kupfer.

Diese Ersparnis wächst, wie die Stefansche Formel für w' zeigt, sehr schnell annähernd quadratisch mit der Periode an.

Die Menge des für die Spulen verwandten Kupfers, die gegenüber so großen Ersparnissen natürlich nicht in Frage kommt, kann noch dadurch herabgedrückt werden, daß man die Spulen auf einen gemeinsamen Kern wickelt und so die gegenseitige Induktion ausnutzt.

Experimenteller Teil.

Um die Theorie durch Messungen zu bestätigen, wurde zunächst ein Kabel hergestellt. Seine Ausmaße sind folgende: Es ist 30 m lang, hat einen Durchmesser von 13,6 mm und besteht aus 47 Kupferdrähten von je 1,5 mm Durchmesser. Die einzelnen Lagen bestehen aus 8, 16 und 22 Drähten,

die auf einen Mittelleiter aufgeseilt sind. Ihre Abstände, gemessen von Mitte des Mittelleiters bis Mitte der Drähte der Lagen sind 2,6 bez. 4,3 und 6,1 mm. Die einzelnen Lagen wurden, da merkliche Querspannungen zu erwarten waren, durch Bandbewicklung voneinander isoliert.

Zu den zugehörigen Spulen wurde, um Spulen- und Skin-effekt zu vermeiden, aus Kupferdraht geflochtenes Band benutzt. In die Spulen versenkbare Gläschen mit Ferrum reductum dienten zur Feineinstellung.

Ihre Selbstinduktion wurde nach der angegebenen Formel

$$L = \frac{\pi r^2}{2 q}$$

berechnet. Der in dieser Formel vorkommende Querschnitt der Lage wurde praktisch aus

$$q = \text{Gesamtquerschnitt} \frac{\text{Drahtzahl in der Lage}}{\text{Gesamtdrahtzahl}} = \pi R^2 \frac{n}{N}$$

berechnet. Die Formel für L erhielt dann die handliche Form:

$$L = \frac{l N}{2 R^2} \frac{r^2}{n},$$

worin l die Länge, R der Kabelradius, r der Radius der Lage, N die Gesamtdrahtzahl, n die Drahtzahl in der Lage ist. Für das vorliegende Versuchskabel war

$$\frac{l N}{2 R^2} = \frac{3000 \cdot 47}{2 \cdot 0,61^2} \text{ cm} = 152\,400 \text{ cm},$$

also

$$L_1 = 152\,400 \frac{0,26^2}{8} = 1284 \text{ cm},$$

$$L_2 = 152\,400 \frac{0,43^2}{16} = 1764 \text{ cm},$$

$$L_3 = 152\,400 \frac{0,61^2}{22} = 2674 \text{ cm}.$$

Ein Kupferleiter von denselben Dimensionen würde hienach bei einer Länge von 10 km Spulen erfordern, deren größte eine Selbstinduktion von 0,891 Milli-Henry besitzt, also immer noch aus nur wenigen Windungen besteht.

Der Widerstand der Spulen wurde sehr klein gewählt

und außerdem so abgeglichen, daß sich die Widerstände der einzelnen Spulen wie die der zugehörigen Lagen verhielten.

Diese Spulen konnten durch Quecksilberkontakte leicht ein- und ausgeschaltet werden, so daß die Messungen am kompensierten und nichtkompensierten Kabel rasch hintereinander ausführbar waren.

Zum Messen des Skineffektes diente die nachstehende skizzierte Brückenkombination (Fig. 3). Um die Verhältnisse von Selbstinduktion *und* Widerstand variieren zu können, war außer Schleifkontakt *C* auf dem Brückendraht noch ein zweiter *C'*, auf einem dicken Manganindraht verschiebbar, zum Einstellen des Widerstandsverhältnisses da.

Fig. 3.

Zunächst wurde die Brücke mit Wechselstrom von 1250 Wechsel pro Sekunde betrieben und durch Verschieben beider Kontakte das Telefon zum Schweigen gebracht. Dann wurde an Stelle der Wechselstromsirene eine Gleichstromquelle, für das Telefon ein Galvanometer eingeschaltet, und durch Verschieben von *C'* auf Stromlosigkeit in der Brücke eingestellt. *C'* mußte dabei nach der Seite des Selbstinduktionsnormales hin verschoben werden. Die hierdurch bedingte Widerstandserhöhung auf der Seite des Kabels entspricht der Erhöhung des Ohmschen Widerstandes durch den Skineffekt. Sie besteht aus dem zugeschalteten Widerstand *w* und dem

Äquivalent des auf der anderen Seite ausgeschalteten w , nämlich $w \times$ Brückenverhältnis ($w(a/b)$), beträgt also insgesamt:

$$W = w \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

Mit der beschriebenen Meßvorrichtung konnte noch ein Skineffekt von $5 \cdot 10^{-5} \Omega$ gemessen werden. Die Messungen ergaben, daß 78 Proz. des Skineffekts kompensiert waren. Es blieb eine Widerstandserhöhung von nur $92 \cdot 10^{-5} \Omega$ übrig.

Um einen weiteren Vergleich mit der Theorie zu bekommen, wurde die Selbstinduktion der größten Spule durch Verschieben des Eisenkerns verstellt und mit Hilfe einer Reihe von Skineffektmessungen experimentell auf das Optimum der Kompensation eingestellt. Ihre Selbstinduktion betrug dann 2580 cm, während die Berechnung einen ca. 3 Proz. höheren Wert, 2674 cm, ergibt, wie bei Nichtberücksichtigung des verhältnismäßig starken Dralles zu erwarten war. Eine gleiche Prüfung der kleinen Spulen in der ersten und zweiten Drahtlage war nicht ausführbar, da hierzu das Kabel zu kurz war.

Die Messungen sind als gute Bestätigungen der Theorie zu betrachten, besonders wenn man bedenkt, daß in den Spulen, den massiven Teilen der Brücke und der Zuleitungen eine Summe geringfügiger Wirbelstromverluste zu finden ist, die gegen die kleinen Effekte des sehr kurzen Versuchsseiles schon wesentlich in Betracht kommen, bei längeren Leitungen aber nicht zu befürchten sind.

Eine absolut vollständige Beseitigung des Skineffektes ist auch theoretisch nicht zu erwarten, da der der Berechnung zugrunde liegende Idealfall eines homogen erfüllten Querschnittes nicht realisiert ist. Außerdem bewirken Querspannungen Kapazitätsströme zwischen den verschiedenen voneinander isolierten Schichten. Doch läßt sich zeigen, daß die hierdurch verursachten Störungen nur klein sein können. Die erreichte Beseitigung des Skineffektes ist ein weiterer Schritt auf dem Wege, die Vorteile höherer Perioden für die Technik nutzbar zu machen.

Die Spulensätze behalten ihre Eigenschaft, den Skineffekt zu beseitigen, auch wenn man die Selbstinduktion aller Spulen um den gleichen Betrag vermehrt. Denn es kommt ja nur

auf die Differenz der elektromotorischen Gegenkraft in den einzelnen Lagen an. Man ist dadurch in den Stand gesetzt, in einem Leiter durch dieselben Spulen, die man nach Pupin zur Beseitigung der schädlichen Wirkung der Kapazität einschaltet, zugleich den Skineffekt zu eliminieren. Man erreicht dies, indem man die Wicklung dieser Spulen in so viel Teile zerlegt, als der Leiter Lagen hat, und die Windungszahlen dieser Teilspulen so bemißt, daß die Unterschiede der Selbstinduktion der verschiedenen Lagen des Leiters ausgeglichen werden.

Göttingen, Physik.-chem. Institut d. Universität.

(Eingegangen 22. Januar 1907.)