Mémoire.

Sur la loi des pressions, et la loi des ellipticités des couches terrestres, en supposant leur densité uniformément croissante depuis la surface de la Terre jusqu'à son centre.

Après avoir démontré par ma Note publiée dans le Nr. 828 des *Astronomische Nachrichten*, que la loi des densités des couches terrestres exprimée par la formule

$$\rho = \rho' (1 + e - ea) \dots\dots\dots(1)$$

satisfait à l'ensemble des phénomènes, en prenant $e = 7,8907$; et pour la densité ρ' de la couche superficielle, $\rho' = 1,83$ (celle de l'eau étant égale à l'unité) il est assez naturel de se demander quelle est la loi correspondante, soit des pressions, soit des ellipticités des mêmes couches, en supposant d'abord qu'elles ont existé, à une époque très-éloignée de Nous, dans un état de fluidité et d'incompressibilité complètes. La solution de cette question n'exige pas la connaissance de la température du liquide; et dépend seulement de l'intégration d'une équation différentielle du second ordre entre la densité et l'ellipticité des couches, que *Clairaut* a trouvée le premier avec toute la généralité qu'elle comporte.

Dans le cas actuel, où la loi des densités est exprimée par la plus simple fonction de la profondeur, $1-a$ des couches, que l'on puisse imaginer, il est intéressant de voir, que la loi des pressions, qui lui est inhérente est algébrique, et même rationnelle, tandis que celle des ellipticités est, au contraire, fort transcendante. Heureusement, elle est susceptible d'être développée dans une série convergente.

En réduisant en nombres les formules que j'ai trouvées, j'ai obtenu $\frac{1}{320}$ pour l'aplatissement de la couche superficielle, et $\frac{1}{473}$ pour l'aplatissement de la couche centrale. C'est une conséquence, à mon avis fort remarquable, que l'aplatissement $\frac{1}{320}$, conclu à priori de cette loi de la densité, soit aussi peu différent de celui $\frac{1}{303,224}$, donné d'une manière incontestable et indépendante de toute hypothèse, par la comparaison des observations astronomiques avec la Théorie des inégalités lunaires dues à la non sphéricité de la Terre.

A une époque éloignée de Nous de plusieurs milliers, et même de plusieurs millions d'années, la Terre et les autres planètes, formées par des portions de l'atmosphère du Soleil successivement abandonnées en se concentrant vers sa surface, étaient des masses aériformes; et le volume de la Terre

était très-grand par rapport à celui qu'elle a maintenant, sa température dépendait de celle de l'espace qu'elle occupait et de sa distance au Soleil. A cet état tout-à-fait primitif a succédé celui de la liquidité, en vertu de l'attraction mutuelle de ses molécules en raison inverse du carré des distances, et c'est dans cet état secondaire que nous la supposons formée par des couches, dont la densité et l'ellipticité étaient variables, conformément aux résultats que je viens d'énoncer. Mais, le cas mathématique d'une liquidité et d'une incompressibilité, à la fois complètes, n'aura pas eu lieu, ou n'aura pas été permanent; et dès lors l'énorme pression supportée par les couches, croissant au point de devenir égale à près de quatre millions d'atmosphères pour la couche centrale, n'étant pas contrebalancée (même en supposant leur température très-élevée) aura fini par les solidifier. Toute fois je me hâte d'ajouter „que cette haute température de la planète à l'état liquide est une supposition gratuite, dont il serait difficile de trouver aucune explication.“ Mais, quelle que soit l'opinion que l'on jugera plus admissible sur ce point, il faudra, d'après des argumens plausibles, sagement exposés par *Poisson* dans sa *Théorie Mathématique de la Chaleur*, croire, ou du moins conjecturer avec une forte probabilité, que cette condensation des couches s'est opérée depuis le centre vers la surface de la Terre, et non depuis la surface vers le centre.

Avec le temps, par l'effet du rayonnement, toute la chaleur développée par ce changement d'état s'est dissipée pendant la durée du phénomène, et il ne doit plus en subsister la moindre trace.

Le phénomène de la température croissante des lieux profonds, que l'on a voulu opposer à cette manière de voir l'acte de la transition de la Terre liquide à l'état solide, ne doit pas être étendu, sans restriction des profondeurs accessibles aux profondeurs inaccessibles. Il est très-probable qu'il a une limite, peut-être inférieure au centième du rayon de notre planète, c'est-à-dire, inférieure à soixante mille mètres. Par une étude plus approfondie de la question on parvient à croire qu'il est beaucoup plus rationnel et plus philo-

sophique, d'attribuer ce phénomène à l'action d'une cause extérieure, due aux énormes changements de température, que la Terre a éprouvés en traversant, en vertu du mouvement de translation du système solaire, des régions de l'espace où la chaleur était très-inegale. En adoptant cette hypothèse on peut obtenir, à priori, la loi des températures en fonction de toute profondeur, $1-a$, qui soit une petite fraction comparativement au rayon de la Terre. L'expression de cette loi est de la forme

$$M + N(1-a);$$

M et N étant chacune une fonction du temps lentement décroissante. Cette forme est commune, soit à cette hypothèse, soit à celle de la chaleur d'origine et centrale. En outre leur rapport $\frac{N}{M}$ demeure le même, et indépendant du temps; ce qui est un résultat théorique de la plus haute importance. Mais il y a une énorme différence à l'égard des fonctions M et N du temps qui leur correspondent. Et c'est cette différence qui n'a pas été appréciée, ni examinée dans ses conséquences, par les partisans de l'hypothèse de la chaleur centrale. L'observation a fait connaître les valeurs actuelles de M et N , qui sont peu différentes l'une de l'autre, et telles que l'on a pour Paris; $M = 0^{\circ}0357$, $N = 0^{\circ}0377$; pourvu que la profondeur $1-a$ soit mesurée en mètres. Mais ce résultat incontestable de l'expérience peut être obtenu à priori sans l'intervention de la chaleur centrale; et à l'aide des variations de la chaleur de l'espace traversé par le système solaire, on peut même l'obtenir en remplissant la condition, voulue par quelques Géologues, que la température du globe à une grande profondeur soit très-élevée, même à l'époque actuelle.

Les changements de température, qui se succèdent par intervalles de temps et d'espace d'une énorme grandeur dans l'immense enceinte stellaire, où le Soleil exécute son mouvement de translation en entraînant à sa suite toutes les planètes, doivent amener des altérations de chaleur et de froid, propres à expliquer les altérations physiques, que la couche extérieure de la Terre a subies dans l'immensité des siècles.

L'hypothèse de la chaleur centrale est exempte par sa nature, de toute alternative, et si l'accroissement dans le sens de la profondeur lui était dû-il faudrait rétrograder d'un million de siècles, et lui supposer à cette époque, dans toute sa masse, une chaleur de trois mille degrés, pour avoir, conformément à l'observation un accroissement d'un trentième de degré, dans la température de la surface de la Terre à l'époque actuelle.

La transition des couches liquides à celle des couches solides s'est opérée sans que la loi des densités ait changé

de forme; c'est-à-dire que, dans l'état de fluidité comme dans l'état subséquent, l'on avait $\rho = \rho'(1 + e - ea)$ sans que le coefficient e ait cessé d'être égal à 7,8907; mais la densité ρ' de la couche extérieure aura subi des changements avant de se fixer à celle de 1,83 que nous lui trouvons maintenant. Au contraire, la loi des ellipticités a subi dans le passage de l'état liquide à l'état solide une altération sensible, par laquelle toutes les couches se sont constituées de manière à avoir un même aplatissement, et plus grand que le précédent. En effet; en admettant que l'ellipticité des couches soit devenue constante, et ayant égard à la circonstance, que la Terre solide est couverte en grande partie d'un Océan en équilibre, je trouve, que l'aplatissement doit être égal à $\frac{1}{308}$; ce qui le rapproche d'une manière frappante de l'aplatissement $\frac{1}{305.1224}$ conclu des inégalités Lunaires. Ce rapprochement a lieu en employant pour le coefficient e , qui entre dans l'expression de la densité des couches, le nombre 7,8907, que j'ai déterminé par l'ensemble des phénomènes sur lesquels sa valeur absolue a une influence. Mais la même formule qui donne la fraction $\frac{1}{308}$, donnerait un aplatissement beaucoup plus grand ($\frac{1}{214}$) si l'on prenait pour e le nombre 2,349 trouvé par *Laplace* à la page 46 du 5. Volume de la Mécanique Céleste. Et alors, au lieu de la différence positive $\frac{1}{305.1224} - \frac{1}{308}$, l'on aurait la différence négative $\frac{1}{305.1224} - \frac{1}{214}$; ce qui entraîne à des conséquences moins probables tirées de la Théorie du flux et reflux de la mer.

Le mode d'existence du résultat dont je viens de parler tient à la circonstance, que l'équation différentielle qui lie la loi des densités avec celle des ellipticités cesse de subsister lorsqu'il est question d'un sphéroïde solide couvert par une couche liquide, ou Océan, en équilibre. En ce cas l'équilibre des couches intérieures du sphéroïde, n'est plus soumis au principe des couches de niveau, qui est la base de l'Hydrostatique, et il n'est plus permis de différentier l'équation qui est bornée à la condition d'exprimer l'équilibre de la couche superficielle. La régularité même de la figure de cette couche, et celle de la loi de la pesanteur qu'on y observe sont une conséquence de la solidification acquise après la fluidité. Sans cet état antérieur, l'adhérence des molécules, qui a lieu dans toute masse solide, aurait empêché les couches de la Terre de se disposer avec une régularité conforme à la loi des densités et des ellipticités que nous avons reconnues. La petite différence entre les deux fractions $\frac{1}{305.1224}$ et $\frac{1}{308}$ dont je viens de déclarer la source, n'est pas insignifiante; on peut en rendre compte à l'aide d'une théorie plus élaborée de la figure de la Terre. L'action que sa masse exerce sur la Lune se compose de celle due à sa partie solide et de celle due à la couche liquide qui la couvre. En tenant

séparées ces deux actions on parvient à une équation par laquelle on peut déterminer le coefficient $\alpha h'$ du terme variable qui entre dans l'expression de la profondeur de la mer, réductible à la forme

$$H + \alpha h' (\cos^2 \theta - \frac{1}{3}).$$

Ici H est la partie constante et la plus considérable de cette profondeur; θ désigne le complément de la latitude du point que l'on considère. A l'aide de l'équation dont je viens de parler, j'ai trouvé $\alpha h' = 0,00043994$, en parties du rayon de la Terre; de sorte que, en mètres, $\alpha h' = 280$ mètres. Ce résultat, fort peu différent de la centième partie de l'aplatissement de la Terre, est en harmonie avec la Théorie du flux et reflux de la mer, par laquelle on démontre (Lisez la page 193 du second volume de la Mécanique Céleste), que le coefficient $\alpha h'$ doit être très-petit par rapport à la fraction $\frac{1}{289}$, qui exprime le rapport de la force centrifuge à la pesanteur.

En supposant la mer anéantie, je trouve la fraction $\frac{1}{301,118}$ pour l'ellipticité du noyau solide. Il est remarquable que cet aplatissement soit très-approchant de celui ($\frac{1}{299,1528}$), que, feu M. Bessel a trouvé d'après la mesure des degrés réduite au niveau de la mer. Mais en employant ce dernier aplatissement j'aurais trouvé une valeur plus que triple pour le coefficient $\alpha h'$ du terme variable dans l'expression de la profondeur de la mer. Au reste, j'ai évité, à dessein, l'emploi de la mesure des degrés; parce que les attractions locales qui agissent d'une manière irrégulière sur le fil à plomb, empêchent que les amplitudes célestes des arcs mesures puissent être fixées avec une précision suffisante pour une recherche

aussi délicate. La Théorie de la Lune offre, seule, le moyen de soustraire le résultat à l'influence perturbatrice des attractions locales. Et si l'ellipsoïde qu'elle donne n'est pas celui qui s'accorde avec l'ellipsoïde osculateur dans les différents points de la surface de la Terre, il est, sans aucune doute, celui qui satisfait le mieux à l'ensemble des phénomènes dépendants de l'action du Soleil et de la Lune sur la Terre.

Telle est l'exposition des résultats consignés dans ce Mémoire. L'analyse qui me les a fournis est la suivante.

1.

Soit $\alpha \bar{h}$ l'ellipticité de la couche superficielle de la Terre, et αh celle d'une couche quelconque placée à la profondeur $1-a$; l'unité de longueur étant le demi-axe de rotation. En désignant par $\psi(a)$ une fonction convenable de a , on doit avoir

$$\frac{\psi(a)}{\psi(1)} \alpha \bar{h} = \alpha h \dots \dots \dots (2)$$

puisque, en posant $a = 1$, la valeur de αh doit devenir égale à celle de $\alpha \bar{h}$. Le rayon vecteur d'une couche elliptique quelconque est exprimé par

$$r = a \left\{ 1 + \frac{2}{3} \alpha h - \alpha h (\cos^2 \theta - \frac{1}{3}) \right\} \dots \dots \dots (3)$$

θ étant l'angle qu'il forme avec l'axe de rotation. Conformément aux formules établies dans le No. 29 du second Volume de la Mécanique Céleste, l'ellipticité αh et la densité ρ de la couche sont liées par l'équation

$$0 = -\frac{2}{3} \int_0^1 \rho d(\alpha h) - \frac{2}{3} \int_0^a \rho d(a^3 \alpha h) + \frac{\alpha h}{a} \int_0^a \rho da^3 - \frac{\alpha \Phi}{2} \int_0^a \rho da^3 \dots \dots \dots (4)$$

$\alpha \Phi$ étant le rapport de la force centrifuge à la gravité, c'est-à-dire, la fraction $\frac{1}{289}$.

En nommant Π la pression supportée par la couche placée à la profondeur $1-a$, l'on a l'équation

$$\int \frac{d\Pi}{\rho} = \frac{4\pi}{3a} \int_0^a \rho da^3 - 4\pi \int_1^a \rho a da + \frac{8\pi}{3} \left\{ \frac{1}{a} \int_0^a \rho d(a^3 \alpha h) - \frac{\alpha h}{3a} \int_0^a \rho da^3 - \int_1^a \rho d(a^2 \alpha h) \right\} \dots \dots \dots (5)$$

En différenciant les deux membres par rapport au paramètre a , on aura la différentielle $d\Pi$ de la pression exprimée par cette équation; savoir

$$d\Pi = -\frac{4\pi}{3} \frac{\rho da}{a^2} \int_0^a \rho da^3 - \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{\rho da}{a^2} \left\{ \int_0^a \rho d(a^3 \alpha h) - \frac{\alpha h}{3} \int_0^a \rho da^3 + \frac{a}{3} \frac{d\alpha h}{da} \int_0^a \rho da^3 \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Et en intégrant par parties, il viendra

$$d\Pi = -\frac{4\pi}{3} \rho \frac{da}{a^2} \int_0^a \rho da^3 - \frac{4\pi}{9} \rho^2 a da \left\{ 2\alpha h - a \frac{d\alpha h}{da} \right\} + \frac{8\pi}{3} \rho \frac{da}{a^2} \left\{ \int_0^a a^3 \alpha h d\rho - \frac{\alpha h}{3} \int_0^a a^3 d\rho + \frac{a}{3} \frac{d\alpha h}{da} \int_0^a a^3 d\rho \right\} \dots (7)$$

Mais on pourra s'en tenir au seul premier terme, et négliger ceux dépendans de l'aplatissement αh , qui sont, comparativement, fort petits; alors on a

$$d\Pi = -\frac{4\pi}{3}\rho \frac{da}{a^2} \int_0^a \rho da^3 \dots\dots\dots (8)$$

En substituant pour ρ sa valeur donnée par la formule (1), nous aurons

$$\Pi = \frac{2\pi}{3}\rho'^2 \{ (1+e)^2(1-a^2) - \frac{7}{6}e(1+e)(1-a^3) + \frac{3}{8}e^2(1-a^4) \} \dots\dots\dots (9)$$

En nommant C la gravité, nous avons

$$C = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 \rho da^3 = \frac{4\pi}{3} \rho' \left(1 + \frac{e}{4} \right) \dots\dots\dots (10)$$

Donc par l'introduction du facteur C , la formule (9) donnera

$$\Pi = \frac{2\rho' C}{4+e} \{ (1+e)^2(1-a^2) - \frac{7}{6}e(1+e)(1-a^3) + \frac{3}{8}e^2(1-a^4) \} \dots\dots\dots (11)$$

Maintenant, si l'on remplace e par sa valeur $e = 7,8907$ on trouvera

$$\Pi = C\rho' \{ 13,2952(1-a^2) - 13,7614(1-a^3) + 3,927215(1-a^4) \} \dots\dots\dots (12)$$

Dans cette formule, l'unité linéaire étant le demi-axe de rotation de la Terre, il faut la multiplier par 6356810, et la diviser par 10,462, si l'on veut exprimer la pression Π , en prenant pour unité celle de l'atmosphère; la hauteur du baromètre étant 0^m760. Alors en faisant $\rho' = 1,83$, l'on a

$$\Pi' = 1111925 \{ 13,2952(1-a^2) - 13,7614(1-a^3) + 3,927215(1-a^4) \} \dots\dots\dots (13)$$

J'ai écrit Π' au lieu de Π pour distinguer cette évaluation de la précédente. La quantité a doit être évaluée en prenant 6356810 mètres pour unité.

En faisant $a = 0$, l'on a pour la pression exercée sur la couche centrale

$$\Pi' = 1111925 \times 3,461015 = 3848390 \text{ atmosphères} \dots (14)$$

En faisant $1-a = \frac{1}{1000}$, la même formule (13) donne

$$\Pi' = 1111925 \times 0,0105911 = 11471 \text{ atmosphères} \dots (15)$$

Un cylindre d'eau qui aurait la hauteur H serait réduit par cette pression à la hauteur

$$H(1 - \frac{11471}{3848390}) = H.0,4127.$$

On voit par là que, en supposant tant soit peu compressible la matière — liquide qui constituait les couches terrestres, elle a dû se solidifier sous l'action de pressions aussi énormes. Et l'hypothèse de *Poisson*, que la solidification s'est propagée de proche en proche depuis le centre vers la surface, et non depuis la surface vers le centre, me paraît

$$\frac{d\Pi}{da} = -\frac{4\pi}{3}\rho'^2 a(1+e-ea)(1+e-\frac{3}{4}ea);$$

d'où l'on tire

$$\Pi = -\frac{4\pi}{3}\rho'^2 \int_1^a a da (1+e-ea)(1+e-\frac{3}{4}ea);$$

et en exécutant l'intégration indiquée:

raisonnable, et fortement appuyée par les argumens qu'il a Lui-même développés dans sa *Théorie Mathématique de la Chaleur*.

En faisant $e = 0$ (ce qui revient à supposer la Terre homogène) la formule (11) donne

$$\Pi = \frac{C\rho}{2}(1-a^2)$$

Donc, en supposant la densité ρ' égale à 5,50 cette formule donnera

$$\Pi' = 1670925(1-a^2) \dots\dots\dots (16)$$

De sorte que la pression centrale serait, dans cette hypothèse, moindre de la moitié de celle qui nous est fournie par l'équation (14).

Comme $a = 1 - \frac{(\rho-\rho')}{e\rho}$, il est clair que la formule (13) revient à dire, que la pression Π' est exprimée par un polynome algébrique de la forme

$$\Pi' = N \frac{(\rho-\rho')}{\rho'} \left\{ N' + N'' \frac{(\rho-\rho')}{\rho'} + N''' \left(\frac{\rho-\rho'}{\rho'} \right)^2 + N^{IV} \left(\frac{\rho-\rho'}{\rho'} \right)^3 \right\};$$

ce qui diffère de la forme

$$\Pi' = K(\rho-\rho')(\rho+\rho')$$

supposée par *Laplace* à la page 49 du cinquième Volume de la *Mécanique Céleste*, afin d'avoir pour la densité ρ la loi proposée par *Legendre* en 1789.

2.

Considérons maintenant l'équation (4); en y remplaçant αh par $\alpha \bar{h} \frac{\psi(a)}{\psi(1)}$, l'on aura

$$0 = -\frac{3}{2} \alpha \bar{h} \int_a^1 \rho d\psi(a) - \frac{3}{2} \alpha \bar{h} \int_0^a \rho d(a^5 \psi(a)) + \alpha \bar{h} \frac{\psi(a)}{a} \int_0^a \rho da^3 - \frac{\alpha \Phi}{2} \psi(1) \int_0^a \rho da^3 \quad \dots\dots\dots (17)$$

et comme l'intégrale $\int_a^1 \rho d(\psi(a))$ est nulle à la surface de la Terre, il est clair, que l'équation (17) bornée à la couche superficielle, se réduit à celle-ci:

$$0 = -\frac{3}{2} \alpha \bar{h} \int_0^1 \rho d(a^5 \psi(a)) + \alpha \bar{h} \psi(1) \int_0^1 \rho da^3 - \frac{\alpha \Phi}{2} \psi(1) \int_0^1 \rho da^3;$$

d'où l'on tire

$$\alpha \bar{h} = \frac{\frac{1}{2} \alpha \Phi}{1 - \frac{\int_0^1 \rho d(a^5 \psi(a))}{\psi(1) \int_0^1 \rho da^3}} \quad \dots\dots\dots (18)$$

D'après l'équation (1) nous avons

$$\int_0^1 \rho da^3 = \rho' \left(1 + \frac{e}{4}\right)$$

$$\int_0^1 \rho d(a^5 \psi(a)) = \rho' \psi(1) + e \rho' \int_0^1 a^5 \psi(a) da;$$

donc l'équation (18) revient à dire, que l'on a

$$\alpha \bar{h} = \frac{\frac{1}{2} \alpha \Phi \left(1 + \frac{e}{4}\right)}{1 + \frac{e}{4} \left\{ \frac{5}{2} - 6 \int_0^1 \frac{a^5 \psi(a)}{\psi(1)} da \right\}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

Mais en posant $\psi'(a) = \frac{d\psi(a)}{da}$, l'intégration par parties, donne

$$6 \int_0^1 a^5 \psi(a) da = \psi(1) - \int_0^1 a^6 \psi'(a) da;$$

Donc en substituant cette valeur, nous aurons

$$\alpha \bar{h} = \frac{\frac{1}{2} \alpha \Phi \left(1 + \frac{e}{4}\right)}{1 + \frac{e}{4} \left\{ \frac{5}{2} + \int_0^1 \frac{a^6 \psi'(a) da}{\psi(1)} \right\}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

Or il suffirait de démontrer, que le coefficient différentiel $\psi'(a)$ de la fonction $\psi(a)$ est nécessairement une quantité positive, pour en conclure, que le dénominateur de cette fraction est plus grand que $1 + \frac{e}{4}$; et d'après cela, il serait prouvé, que l'ellipticité $\alpha \bar{h}$ de la couche superficielle doit être plus petite, que l'ellipticité $\frac{1}{2} \alpha \Phi$, qui a lieu dans le cas de la Terre homogène et fluide.

3.

Pour parvenir à la connaissance de la fonction $\psi(a)$ et vérifier que $\psi'(a)$ est une quantité positive, il faut faire disparaître les signes d'intégration de l'équation (17); ce qui donne par un calcul assez facile:

$$\frac{d^2 \alpha h}{da^2} = \frac{6}{a^2} \left\{ 1 - \frac{\rho a^3}{\int \rho da^3} \right\} \alpha h - \frac{6 \rho a^2}{\int \rho da^3} \cdot \frac{d \alpha h}{da} \quad \dots\dots\dots (21)$$

Maintenant, si l'on substitue pour ρ sa valeur donnée par l'équation (1), on trouvera, après avoir fait pour plus de simplicité

$$K = \frac{3}{4} \frac{e}{1+e} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{d^2 \alpha h}{da^2} + \left(\frac{6}{a} - \frac{2K}{1-Ka} \right) \frac{d \alpha h}{da} - \frac{2K}{a(1-Ka)} \alpha h = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

Cela posé, si l'on fait $\alpha h = \alpha \bar{h} \frac{\psi(a)}{\psi(1)}$, le facteur commun $\frac{\alpha \bar{h}}{\psi(1)}$ disparaîtra, et l'on aura pour déterminer $\psi(a)$ cette équation différentielle du second ordre, savoir

$$\frac{d^2\psi(a)}{da^2} + \left(\frac{6}{a} - \frac{2K}{1-Ka}\right) \frac{d\psi(a)}{da} - \frac{2K}{a(1-Ka)} \psi(a) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

Les équations (17) et (21), desquelles celle-ci est tirée sont celles de *Clairaut*; mais on les forme immédiatement à l'aide des formules posées dans les pages 83 et 84 du second Volume de la *Mécanique Céleste*.

4.

Pour intégrer l'équation (24) je commence par la multiplier par $a-Ka^2$; ce qui donne

$$(a-Ka^2) \frac{d^2\psi(a)}{da^2} + (6-8Ka) \frac{d\psi(a)}{da} - 2K\psi(a) = 0 \dots\dots\dots (25)$$

ensuite, je suppose la fonction $\psi(a)$ développée suivant les puissances de a , sous la forme

$$\psi(a) = 1 + H^{(1)}Ka + H^{(2)}K^2a^2 \dots\dots\dots + H^{(m)}K^ma^m + \text{etc.} \dots\dots\dots (26)$$

ce qui donne

$$\frac{d\psi(a)}{da} = H^{(1)}K + 2H^{(2)}K^2a + 3H^{(3)}K^3a^2 + \dots\dots\dots + mH^{(m)}K^ma^{m-1} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^2\psi(a)}{da^2} = 2H^{(2)}K^2 + 2.3H^{(3)}K^3a + \dots\dots\dots + m(m-1)H^{(m)}K^ma^{m-2} + \text{etc.}$$

En substituant ces séries dans l'équation (25), et égalant à zéro les coefficients des mêmes puissances de a , on obtiendra entre les deux coefficients consécutifs $H^{(m-1)}$, $H^{(m)}$ cette équation; savoir

$$(m-1)mK^mH^{(m)} - (m-2)(m-1)K^mH^{(m-1)} + 6mK^mH^{(m)} - 8(m-1)K^mH^{(m-1)} - 2K^mH^{(m-1)} = 0,$$

de laquelle on tire

$$H^{(m)} = \left\{ 1 - \frac{4}{m(m+5)} \right\} H^{(m-1)} \dots\dots\dots (27)$$

Cette formule donne

$$H^{(1)} = \left(1 - \frac{4}{1.6} \right);$$

$$H^{(2)} = \left(1 - \frac{4}{1.6} \right) \left(1 - \frac{4}{2.7} \right);$$

$$H^{(3)} = \left(1 - \frac{4}{1.6} \right) \left(1 - \frac{4}{2.7} \right) \left(1 - \frac{4}{3.8} \right);$$

.....

$$H^{(m)} = \left(1 - \frac{4}{1.6} \right) \left(1 - \frac{4}{2.7} \right) \left(1 - \frac{4}{3.8} \right) \dots\dots\dots \left(1 - \frac{4}{m(m+5)} \right).$$

De sorte que l'on a

$$H^{(1)} = \frac{1}{3}; \quad H^{(2)} = \frac{5}{21}; \quad H^{(3)} = \frac{25}{126}; \quad H^{(4)} = \frac{100}{567};$$

$$H^{(5)} = \frac{92}{567}; \quad H^{(6)} = \frac{2852}{18711}; \quad H^{(7)} = \frac{57040}{392931};$$

$$H^{(8)} = \frac{57040}{392931} \left(1 - \frac{4}{8.13} \right); \text{ etc.}$$

L'équation linéaire (24) est donc satisfaite en prenant $\psi(a) = MA$; où M est une constante arbitraire et A la série qui constitue le second membre de l'équation (26). Pour trouver l'intégrale complète de la même équation différentielle, avec deux constantes arbitraires, je suppose variable le facteur M . Alors l'on a

$$\frac{d\psi(a)}{da} = M \frac{dA}{da} + A \frac{dM}{da}$$

$$\frac{d^2\psi(a)}{da^2} = M \frac{d^2A}{da^2} + 2 \frac{dM}{da} \cdot \frac{dA}{da} + A \frac{d^2M}{da^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (24), et observant que l'on a;

$$M \left\{ \frac{d^2A}{da^2} + \left(\frac{6}{a} - \frac{2K}{1-Ka} \right) \frac{dA}{da} - \frac{2K}{a(1-Ka)} A \right\} = 0,$$

il viendra l'équation

$$\frac{d^2M}{da^2} + \left\{ \frac{6}{a} - \frac{215}{1-15a} + \frac{2}{A} \cdot \frac{dA}{da} \right\} \frac{dM}{da} = 0$$

qui peut être écrite ainsi:

$$\frac{dM}{da} \cdot \text{Log.} \left\{ \frac{dM}{da} \cdot A^2 a^6 (1-Ka)^2 \right\} = 0.$$

Donc, en désignant par M' une constante arbitraire, l'on a:

$$\frac{dM}{da} \cdot A^2 a^6 (1-Ka)^2 = M';$$

et en intégrant, nous aurons

$$M = M'' + M' \int \frac{da}{a^6 (1-Ka)^2 A^2};$$

M' , M'' étant deux constantes arbitraires.

L'intégrale complète de l'équation (24) est donc

$$\psi(a) = M'' A + M' A \int \frac{da}{a^6 (1-Ka)^2 A^2}$$

Ainsi, conformément à notre équation (2), l'on a

$$\alpha h = \frac{\alpha \bar{h} \cdot A \left\{ M'' + M' \int \frac{da}{a^6 (1-Ka)^2 A^2} \right\}}{A_{(1)} \left\{ M'' + M' \int \frac{da}{a^6 (1-Ka)^2 A^2} \right\}};$$

où $A_{(1)}$ et $\int \frac{da}{a^6 (1-Ka)^2 A^2}$ désignent les valeurs de A et $\int \frac{da}{a^6 (1-Ka)^2 A^2}$, lorsque l'on fait $a = 1$.

Or il est clair, que, en donnant à M' une valeur différente de zéro, l'on aurait pour αh une quantité infinie, en posant $a = 0$; ce qui est absurde.

Il faut donc prendre, dans le cas actuel, $M' = 0$, et alors on a

$$\alpha h = \alpha \bar{h} \frac{A}{A_{(1)}} \dots \dots \dots (28)$$

L'intégrale particulière fournie par l'ensemble des deux équations (26) et (27) est donc la seule qui convient à la solution du problème dont il est ici question. Il est clair maintenant, que la valeur de $\psi'(a)$, qui entre dans le second membre de l'équation (20), est une quantité nécessairement positive. Et quoique cette conséquence soit fondée sur une série, elle n'en est pas moins incontestable, si l'on observe, que la série (26) est convergente: car en vertu de la formule (27), dès que la valeur de l'indice m a acquis une certaine grandeur, on peut supposer égaux à $H^{(m)}$ tous les coefficients $H^{(m+1)}$, $H^{(m+2)}$, $H^{(\infty)}$. De sorte que la suite infinie

$$H^{(m+1)} K^{m+1} a^{m+1} + H^{(m+2)} K^{m+2} a^{m+2} + \text{etc.}$$

a une valeur inférieure à

$$\frac{H^{(m)} a^{m+1} K^{m+1}}{1-Ka}.$$

5.

Cela posé, nous avons

$$a^6 \psi'(a) = H^{(1)} Ka^6 + 2 H^{(2)} K^2 a^7 + 3 H^{(3)} K^3 a^8 + \text{etc.}$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\int_0^1 a^6 \psi'(a) da = H^{(1)} \frac{K}{7} + \frac{2 H^{(2)} K^2}{8} + \frac{3 H^{(3)} K^3}{9} \dots \dots \dots + \frac{m H^{(m)} K^m}{m+6} + \text{etc.}$$

Donc en écrivant

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \psi'(a) a^6 da &= \sum_1^\infty \frac{m H^{(m)} K^m}{m+6} \\ \psi(1) &= 1 + \sum_1^\infty H^{(m)} K^m = \sum_0^\infty H^{(m)} K^m \end{aligned} \right\} \dots \dots (29)$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (20), l'on aura

$$\alpha \bar{h} = \left. \begin{aligned} &\frac{\frac{3}{4} \alpha \varphi \left(1 + \frac{\epsilon}{4} \right)}{1 + \frac{3}{8} \epsilon + \frac{\frac{1}{4} \sum_1^\infty \frac{m H^{(m)} K^m}{m+6}}{\sum_1^\infty H^{(m)} K^m}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

Pour réduire cette formule en nombres, j'observe que, en posant $\epsilon = 7,8907$, l'on a $k = \frac{3}{4} \cdot \frac{7,8907}{8,8907}$, et $\text{Log. } K = 9,8232408$. Cela posé j'ai trouvé;

$$\begin{array}{ll} H^{(1)} K = 0,221881; & H^{(7)} K^7 = 0,0084052; \\ H^{(2)} K^2 = 0,105495; & H^{(8)} K^8 = 0,0053797; \\ H^{(3)} K^3 = 0,0585183; & H^{(9)} K^9 = 0,0034672; \\ H^{(4)} K^4 = 0,034624; & H^{(10)} K^{10} = 0,0022464; \\ H^{(5)} K^5 = 0,021218; & H^{(11)} K^{11} = 0,0014613; \\ H^{(6)} K^6 = 0,013258; & \text{etc.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{H^{(1)} K}{7} = 0,0316973; & \frac{7 H^{(7)} K^7}{13} = 0,0045259; \\ \frac{2 H^{(2)} K^2}{8} = 0,0263737; & \frac{8 H^{(8)} K^8}{14} = 0,0030741; \\ \frac{3 H^{(3)} K^3}{9} = 0,0195061; & \frac{9 H^{(9)} K^9}{15} = 0,00208032; \\ \frac{4 H^{(4)} K^4}{10} = 0,0138496; & \frac{10 H^{(10)} K^{10}}{16} = 0,001408; \\ \frac{5 H^{(5)} K^5}{11} = 0,0096224; & \frac{11 H^{(11)} K^{11}}{17} = 0,00094555; \\ \frac{6 H^{(6)} K^6}{12} = 0,006629; & \text{etc.} \end{array}$$

En négligeant les termes suivants l'on a donc

$$\sum_0^{\infty} H^{(m)} K^m = 1,4759541;$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{m H^{(m)} K^m}{m+6} = 0,1197119;$$

et par conséquent la formule (30) donne

$$\alpha \bar{h} = \frac{5}{4} \alpha \varphi \frac{(2,972675)}{4,11908} = \frac{5}{4} \alpha \varphi \cdot 0,721685;$$

et en substituant pour $\alpha \varphi$ sa valeur l'on aura

$$\alpha \bar{h} = 0,004325 \times 0,721685 = 0,0031213 = \frac{1}{320,38} \dots (31)$$

En divisant cette quantité par $\psi(1) = \sum_0^{\infty} H^{(m)} K^m$ l'on aura pour l'ellipticité de la couche centrale;

$$\frac{\alpha \bar{h}}{\psi(1)} = 0,0021148 = \frac{1}{472,87} \dots \dots \dots (32)$$

6.

Ces résultats n'ont lieu que dans l'hypothèse d'une fluidité complète de la Terre; mais en la supposant solidifiée, et couverte seulement d'une couche liquide en équilibre, on ne pourra plus différentier, par rapport à α , l'équation (17) et en dériver l'équation différentielle (21). Néanmoins la formule (20) subsiste, sans que l'on puisse déterminer à priori la fonction $\psi(a)$ qui détermine l'ellipticité des couches solidifiées. Or en supposant que dans l'acte de la solidification, la différence entre les ellipticités des couches ait disparu, et qu'elles se soient conformées de manière à avoir toutes la même ellipticité, l'on aura $\psi'(a) = 0$, ce qui réduit la formule (20) à celle-ci:

$$\alpha \bar{h} = \frac{\frac{5}{4} \alpha \varphi \left(1 + \frac{\sigma}{4}\right)}{1 + \frac{3}{8} \sigma} \dots \dots \dots (33)$$

d'où l'on tire en substituant pour σ et $\alpha \varphi$ leurs valeurs numériques;

$$\alpha \bar{h} = \frac{5}{4} \alpha \varphi \frac{2,972675}{3,95908} = \frac{5}{4} \alpha \varphi \cdot 0,75071;$$

$$\alpha \bar{h} = 0,00324683 = \frac{1}{307,99} \dots \dots \dots (34)$$

$$0 = -\frac{3}{5} \alpha \bar{h} \int_0^1 \rho d(a^5 \psi(a)) + \alpha \bar{h} \cdot \psi(1) \int_0^1 \rho d a^3 - \frac{\alpha \varphi}{2} \psi(1) \int_0^1 \rho d a^3 - \alpha \bar{h} \psi(1) \left\{ \int_0^1 \rho d a^3 - \frac{2}{3} \rho'' \right\} \dots (37)$$

Cet aplatissement diffère très peu de celui $\left(\frac{1}{305,224}\right)$

qui est donné d'une manière incontestable, et indépendamment de toute hypothèse, par la comparaison des observations astronomiques avec la théorie des inégalités lunaires, dues à la non sphéricité de la Terre.

Sur cela, il importe de remarquer, que la même formule (33) donnerait $\alpha \bar{h} = \frac{1}{274}$, si l'on y substituait pour σ la valeur $\sigma = 2,349$ trouvée par Laplace à la page 46 du cinquième Volume de la Mécanique Céleste. Et alors au lieu de la différence positive $\frac{1}{305,224} - \frac{1}{307,99}$ on aurait la différence négative $\frac{1}{305,224} - \frac{1}{274}$; ce qui entraîne à des conséquences, d'un autre genre, moins probables.

7.

La petite différence entre les deux fractions $\frac{1}{305,224}$, $\frac{1}{307,99}$, dont je viens de déclarer la source n'est pas insignifiante; on peut en rendre compte à l'aide d'une Théorie plus élaborée de la figure de la Terre. En effet; l'action que la Terre exerce sur la Lune se compose de celle due à sa partie solide, et de celle due à la couche liquide, ou Océan, qui la couvre dans une vaste étendue.

Pour plus de simplicité, nous supposons que l'inondation est totale. De sorte que, en retenant pour r la formule (3), relative aux couches solides, nous admettons, que le rayon vecteur $\bar{r}$ de sa surface est exprimé par

$$\bar{r} = 1 + \frac{2}{3} \alpha \bar{h} - \alpha \bar{h} (\cos^2 \theta - \frac{1}{3}) \dots \dots \dots (35)$$

tandis que la profondeur $\delta \bar{r}$ de l'Océan est exprimé par

$$\delta \bar{r} = H - \frac{2}{3} \alpha \bar{h} + \alpha \bar{h} (\cos^2 \theta - \frac{1}{3}) \dots \dots \dots (36)$$

où H désigne (en parties du demi-axe de rotation) la partie constante de cette profondeur; et θ le complément de la latitude du point que l'on considère.

D'après cela, comme il est ici question d'un sphéroïde solide couvert par une couche liquide en équilibre, on a, au lieu de l'équation qui précède l'équation (18), celle-ci; savoir

où ρ'' désigne la densité de la couche liquide qui couvre le noyau solide.

(Fortsetzung folgt).

M é m o i r e.

Sur la loi des pressions, et la loi des ellipticités des couches terrestres, en supposant leur densité uniformément croissante depuis la surface de la Terre jusqu'à son centre.

(Fortsetzung).

En divisant tous les termes par $\psi(1) \int_0^1 \rho \, d a^3$, cette équation donne

$$\alpha \bar{h} \left\{ 1 - \frac{\int_0^1 \rho \, d(a^5 \psi(a))}{\psi(1) \int_0^1 \rho \, d a^3} \right\} = \frac{\alpha \Phi}{2} + \alpha \bar{h}' \left\{ 1 - \frac{\frac{3}{5} \rho''}{\int_0^1 \rho \, d a^3} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

Mais notre valeur de $\rho = \rho'(1 + e - ea)$ donne

$$\int_0^1 \rho \, d a^3 = \rho' \left(1 + \frac{e}{4} \right);$$

donc en substituant ces valeurs l'équation (38) donnera

$$\alpha \bar{h} = \frac{\frac{5}{4} \alpha \Phi \left(1 + \frac{e}{4} \right) + \alpha \bar{h}' \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{8} e - \frac{3}{2} \frac{\rho''}{\rho'} \right)}{1 + \frac{e}{4} \left\{ \frac{5}{2} - 6 \int_0^1 a^5 \frac{\psi(a)}{\psi(1)} \, d a \right\}} \dots (39)$$

ou bien

$$\alpha \bar{h} = \frac{\frac{5}{4} \alpha \Phi \left(1 + \frac{e}{4} \right) + \alpha \bar{h}' \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{8} e - \frac{3}{2} \frac{\rho''}{\rho'} \right)}{1 + \frac{e}{4} \left\{ \frac{3}{2} + \int_0^1 a^5 \frac{\psi'(a)}{\psi(1)} \, d a \right\}} \dots (40)$$

Telle est la formule qui doit remplacer la formule (20) lorsqu'on veut tenir compte de la profondeur $\delta \bar{r}$ de la mer.

Maintenant, si l'on suppose $\psi(a) = 0$, cette formule donne

$$\alpha \bar{h} - \alpha \bar{h}' = \frac{\frac{5}{4} \alpha \Phi \left(1 + \frac{e}{4} \right) + \alpha \bar{h}' \left(\frac{3}{2} + \frac{e}{4} - \frac{3}{2} \frac{\rho''}{\rho'} \right)}{1 + \frac{3}{8} e} \quad (41)$$

En employant cette équation, au lieu de l'équation (33), il faudra faire

$$\alpha \bar{h} - \alpha \bar{h}' = 0,003276285 = \frac{1}{305,224} \dots\dots\dots (42)$$

qui est l'aplatissement de la Terre entière déterminé par la Théorie de la Lune. Donc, conformément aux équations (33), (34), l'on a

$$\alpha \bar{h} = \frac{(0,00327628 - 0,00324683)(1 + \frac{3}{8} e)}{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'} + \frac{e}{6} \right)} \dots\dots (43)$$

Maintenant, si l'on fait $\frac{\rho''}{\rho'} = 1,83$, $e = 7,8907$, cette formule donnera

$$\alpha \bar{h} = \frac{0,00002945 \cdot 31,6761 \cdot 1,22}{8 \cdot 3,2336135} = 0,0000439944 \dots (44)$$

En multipliant cette fraction par 6356810 on aura

$$\alpha \bar{h}' = 279,66 \text{ mètres } \dots\dots\dots (45)$$

En divisant 0,0032763 par $\alpha \bar{h}'$ on voit que, dans l'hypothèse de l'inondation totale l'on aurait l'aplatissement de la mer égal à celui de la Terre entière divisé par 74,471. Ce résultat est en harmonie avec la Théorie du flux et reflux de la mer, par laquelle on démontre (Lisez la page 193 du second Volume de la Mécanique Céleste) que le coefficient $\alpha \bar{h}'$ qui multiplie le terme variable dans le second membre de l'équation (36) doit être fort petit comparativement à la fraction $\alpha \Phi = 0,0034602$, qui mesure le rapport de la force centrifuge à la gravité.

D'après les équations (42), (44) l'on a

$$\alpha \bar{h} = 0,003276285 + 0,0000439944 = 0,003320279 \dots (46)$$

ou bien $\alpha \bar{h} = \frac{1}{301,118}$. Il est remarquable, que cet aplatissement du noyau solide du sphéroïde terrestre soit très-approchant de celui $\left(\frac{1}{299,1528} \right)$ que feu Mr. Bessel a trouvé

d'après la mesure des degrés de la Terre, réduite au niveau de la mer. Au reste cette manière de déterminer l'aplatissement de la Terre entière est, probablement, celle qui mérite moins de confiance; parceque, les attractions locales, qui agissent d'une manière irrégulière sur le fil-à-plomb, empêchent, que les amplitudes célestes des arcs mesurés puissent être fixées avec une précision suffisante pour une recherche aussi délicate. La Théorie de la Lune offre, seule, le moyen de soustraire le résultat à l'influence perturbatrice des attractions locales.

$$\delta \Pi = - \frac{2 \pi \rho'^2}{9,473} \int_1^a a da (1+e-ea) \left\{ [4(1+e)-5ea] \psi(a) - a[2(1+e)-3ea] \psi'(a) \right\} \\ - \frac{8 \pi \rho'^2 e}{3,473} \int_1^a \frac{da}{a^2} (1+e-ea) \int_0^a a^2 \psi(a) da \quad \dots\dots\dots (47)$$

En introduisant le facteur C, conformément à l'équation (10), nous aurons

$$\delta \Pi = - \frac{\rho' C}{2538} \int_1^a a da (1+e-ea) \left\{ [4(1+e)-5ea] \psi(a) - a[2(1+e)-3ea] \psi'(a) \right\} \\ - \frac{2 e \rho' C}{473} \int_1^a \frac{da}{a^2} (1+e-ea) \int_0^a a^2 \psi(a) da \quad \dots\dots\dots (48)$$

Il est maintenant facile de réduire cette formule en nombres; mais il suffit de voir que le résultat serait beaucoup plus petit, que celui trouvé en considérant seulement le premier terme de Π .

9.

Si l'on voulait appliquer la théorie précédente à des fonctions plus compliquées, et telles qu'il serait indispensable d'exécuter les intégrations par les quadratures, on pourrait employer avec avantage une formule nouvelle que je vais démontrer en peu de mots. Soit $y = F(x)$ et $y' = F(x+h')$;

$$(\epsilon) \dots\dots \int_0^h y' dh' = h \left\{ \Delta^0 y + \Delta^1 y \cdot H_{(1)} + \Delta^2 y \cdot H_{(2)} + \Delta^3 y \cdot H_{(3)} + \dots\dots \text{etc.} \right\}$$

où l'on a fait pour plus de simplicité;

$$H_{(1)} = \int_0^1 z dz;$$

$$H_{(2)} = \int_0^1 \frac{dz \cdot z(z-1)}{2};$$

$$H_{(3)} = \int_0^1 \frac{dz \cdot z(z-1)(z-2)}{2 \cdot 3};$$

8.

Nous avons calculé la pression Π par la formule (8); mais si l'on voulait tenir compte de l'aplatissement il faudrait employer la formule (7), en y substituant pour αh sa valeur $\alpha h \frac{\psi(a)}{\psi(1)}$. Alors à l'aide des formules (26) et (32) on trouverait, qu'en nommant $\delta \Pi$ cette partie de la pression Π , l'on a

en développant y' par la série ordinaire propre à l'interpolation, l'on a

$$y' = y + \frac{h'}{h} \cdot \Delta y + \frac{\frac{h'}{h} \left(\frac{h'}{h} - 1 \right)}{2} \Delta^2 y + \text{etc.}$$

et d'une manière symbolique

$$y' = y (1 + \Delta)^{\frac{h'}{h}}$$

En intégrant cette série par rapport à h' depuis $h' = 0$ jusqu'à $h' = h$, après avoir fait $h' = hz$ l'on aura

$$H_{(1)} = \int_0^1 \frac{dz \cdot z(z-1)(z-2)(z-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4};$$

etc.....

Ces coefficients sont ceux qui naissent du développement de la fraction

$$\frac{x}{\text{Log.}(1+x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \text{etc.}}$$

suivant les puissances de x . En effet, remarquons que l'on a

$$\int_0^1 (1+x)^z dz = \frac{x}{\text{Log.}(1+x)};$$

d'un autre côté, en développant le binôme l'on a

$$\int_0^1 (1+x)^z dz = 1 + x \int_0^1 z dz + x^2 \int_0^1 \frac{z(z-1)}{2} dz \\ + x^3 \int_0^1 \frac{z(z-1)(z-2)}{2 \cdot 3} dz \\ + \text{etc.}$$

donc en comparant les coefficients des mêmes puissances de x on obtient les valeurs précédentes de $H_{(1)}$, $H_{(2)}$, $H_{(3)}$..etc. Il suit de là que l'on peut établir cette formule symbolique; savoir:

$$y_{(h)} = y + \frac{1}{2} \Delta y + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \Delta^2 y + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \Delta^n y$$

ou bien

$$y_{(h)} = y + C_{(1)} \Delta y + C_{(2)} \Delta^2 y + \dots + C_{(n-1)} \Delta^{n-1} y + C_{(n)} \Delta^n y;$$

d'où l'on tire

$$\frac{h H_{(n)} y_{(h)}}{C_{(n)}} = \frac{h H_{(n)}}{C_{(n)}} \{y + C_{(1)} \Delta y + C_{(2)} \Delta^2 y + \dots + C_{(n-1)} \Delta^{n-1} y\} + h H_{(n)} \Delta^n y.$$

Donc en vertu de la formule (ε) il est clair que l'on a:

$$\int_0^h y' dh' - \frac{h H_{(n)}}{C_{(n)}} y_{(h)} = h y \left\{ 1 - \frac{H_{(n)}}{C_{(n)}} \right\} \\ + h \Delta y \left\{ H_{(1)} - \frac{H_{(n)} C_{(1)}}{C_{(n)}} \right\} \\ + h \Delta^2 y \left\{ H_{(2)} - \frac{H_{(n)} C_{(2)}}{C_{(n)}} \right\} \\ \dots \dots \dots \\ + h \Delta^{n-1} y \left\{ H_{(n-1)} - \frac{H_{(n)} C_{(n-1)}}{C_{(n)}} \right\};$$

Lorsque $n = 2$, cette formule donne

$$\int_0^h y' dh' = \frac{h}{6} \{y_0 + 4y_{(h)} + y_1\}$$

où $y_0 = F(x)$; $y_{(h)} = F(x + \frac{1}{2}h)$; $y_1 = F(x+h)$.

En faisant $n = 3, 4$ etc. l'on aura des formules analogues propres à donner l'intégrale définie avec une exactitude croissante, si les différences finies sont elles-mêmes décroissantes.

Turin, le 1. Mars 1853.

$$(\varepsilon') \dots \int_0^h y' dh' = h \frac{\Delta y}{\text{Log.}(1 + \Delta y)};$$

c'est-à-dire, que cette équation sera vraie après avoir remplacé les puissances $(\Delta y)^0$, $(\Delta y)^1$, $(\Delta y)^2$... etc. par y , Δy , $\Delta^2 y$, etc. respectivement.

Supposons que l'on néglige les différences $\Delta^{n+1} y$, $\Delta^{n+2} y$..etc.; alors en désignant par $y_{(h)}$ la valeur de $F\left(x + \frac{h}{2}\right)$, l'on aura

et par conséquent:

$$(\varepsilon'') \dots \int_0^h y' dh' = h y_{(h)} \frac{H_{(n)}}{C_{(n)}} + h y \left\{ 1 - \frac{H_{(n)}}{C_{(n)}} \right\} \\ + h \Delta y \left\{ H_{(1)} - \frac{H_{(n)} C_{(1)}}{C_{(n)}} \right\} \\ + h \Delta^2 y \left\{ H_{(2)} - \frac{H_{(n)} C_{(2)}}{C_{(n)}} \right\} \\ + \dots \dots \dots \\ + h \Delta^{n-1} y \left\{ H_{(n-1)} - \frac{H_{(n)} C_{(n-1)}}{C_{(n)}} \right\};$$

J. Plana.