16.

Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+a^2} e^{-x\theta}$.

(Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch*, professeur à l'université de Jena.)

L'intégrale énoncée ci-dessus est une de celles dont les valeurs peuvent être calculées à l'aide des fonctions transcendantes $Ci(\omega)$ et $Si(\omega)$ dont nous avons parlé dans la théorie des intégrales définies et dont les définitions sont données par les équations

$$1.\quad Ci(\omega) = 0{,}577\,215\,6\,\ldots + \tfrac{1}{2}l(\omega^2)$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{1}{4}\,\frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{6}\,\frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$2.\quad Si(\omega) = \frac{1}{1}\,\frac{\omega}{1} - \frac{1}{3}\,\frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\,\frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Pour effectuer la réduction mentionnée, on peut opérer comme suit. Soit d'abord

$$3.\quad y = \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} e^{-x\theta}.$$

En différentiant cette expression deux fois par rapport à x, on obtient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \int_0^\infty \frac{\theta^2\,\partial\theta}{\theta^2+1} e^{-x\theta},$$

et par conséquent

$$4.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = \int_0^\infty e^{-x\theta}\,\partial\theta = \frac{1}{x}.$$

Pour intégrer cette équation différentielle, nous faisons

$$5.\quad y = z_1 \cos x + z_2 \sin x,$$

en désignant par z_1 et z_2 deux fonctions indéterminées de x; alors on a

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -z_1 \sin x + z_2 \cos x + \frac{\partial z_1}{\partial x}\cos x + \frac{\partial z_2}{\partial x}\sin x.$$

En y supposant

$$6.\quad \frac{\partial z_1}{\partial x}\cos x + \frac{\partial z_2}{\partial x}\sin x = 0,$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -(z^1 \cos x + z_2 \sin x) - \frac{\partial z_1}{\partial x}\sin x + \frac{\partial z_2}{\partial x}\cos x,$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = -\frac{\partial z_1}{\partial x}\sin x + \frac{\partial z_2}{\partial x}\cos x,$$

ou en vertu de l'équation (4):

$$7. \quad \frac{\partial z_1}{\partial x}\sin x - \frac{\partial z_2}{\partial z}\cos x = -\frac{1}{x}.$$

Les quantités $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ étant eliminées des équations (6) et (7), on obtient

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{\cos x}{x}$$

et par conséquent

$$z_1 = A - \int \frac{\sin x}{x}\partial x, \qquad z_2 = B + \int \frac{\cos x}{x}\partial x,$$

où A et B désignent les deux constantes de l'intégration.

Maintenant on a en vertu des équations (5) et (3)

$$8. \quad \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} e^{-x\theta} = (A - \int \frac{\sin x}{x}\partial x)\cos x + (B + \int \frac{\cos x}{x}\partial x)\sin x$$

$$= (A - \frac{1}{1}\,\frac{x}{1} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots.)\cos x$$

$$+ (B + \tfrac{1}{2}l(x^2) - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.)\sin x.$$

Pour trouver les deux constantes A et B, nous faisons d'abord $x=0$, ce qui donne

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} = A = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ayant trouvé A, nous multiplierons toute l'équation par $e^{-x}\partial x$, et nous intégrerons par rapport à x entre les limites $x=0$ et $x=\infty$, ce qui donne

$$\int_0^\infty e^{-x}\partial x + \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} e^{-x0}.$$

$$= \int_0^\infty (\tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{1}\,\frac{x}{1} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{1.2\ldots.5} + \ldots.)\cos x\,\partial x$$

$$+ \int_0^\infty (B + \tfrac{1}{2}l(x^2) - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.)\sin x\,\partial x.$$

Puis, ayant recours aux formules

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos bx\,\partial x = \frac{1.2\ldots.n\cos[(n+1)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{a}{b}]}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos bx\,\partial x = \frac{1.2\ldots.n\sin[(n+1)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{b}{a}]}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{2} l(x^2) e^{-x} \sin x \partial x = \int_0^\infty lx e^{-x} \sin x \partial x$$
$$= \tfrac{1}{2}(C + \tfrac{1}{2} l1 - \tfrac{1}{4}\pi), \quad C = 0{,}577\,215\,6 \ldots, \quad \text{(Voyez le mémoire précédent)}$$
on obtient

$$9. \quad \int_0^\infty e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} e-x\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{1} \frac{\cos 2 . \frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^2} + \tfrac{1}{3} \frac{\cos 4 . \frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{(2)})^4} - \tfrac{1}{5} \frac{\cos 6 . \frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^6} + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{4} l2 - \tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{2} \frac{\sin 3 . \frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^3} + \tfrac{1}{4} \frac{\sin 5 . \frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^5} - \tfrac{1}{6} \frac{\sin 7 . \frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^7} + \ldots$$

En renversant l'ordre des intégrations à gauche, on trouve que l'intégrale double est égale à la suivante:

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} \int_0^\infty e-(\theta+1)x \partial x = \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{(\theta^2+1)(\theta+1)} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Les deux séries à droite dans (9), qui contiennent les cosinus et sinus, peuvent être sommées, et l'on obtient

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{4}\pi - (\tfrac{1}{4}\text{arc tang } 2 - \tfrac{1}{8} l5) + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{4} l2 - \tfrac{1}{8}\pi$$
$$- (\tfrac{1}{8} l(\tfrac{5}{4}) + \tfrac{1}{4}\text{arc tang } 2).$$

De là suit

$$B = C = 0{,}577\,215\,6 \ldots.$$

En substituant maintenant les valeurs de A et B dans l'expression ci-dessus et ayant égard aux définitions de $Ci(\omega)$ et $Si(\omega)$, l'équation (8) prend la forme

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} e-x\theta = [\tfrac{1}{2}\pi - Si(x)] \cos x + Ci(x) \sin x$$
$$= Ci(x) \sin x - Si(x) \cos x + \tfrac{1}{2}\pi \cos x.$$

De là, en différentiant suivant x, on tire

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} e-x\theta = Ci(x) \cos x + Si(x) \sin x - \tfrac{1}{2}\pi \sin x.$$

En remplaçant enfin θ et x par $\frac{\theta}{a}$ et ax, les équations trouvées prennent la forme

$$10. \quad \int_0^\infty \frac{a\partial\theta}{a^2+\theta_2} e-x\theta = Ci(ax) \sin ax - Si(ax) \cos ax + \tfrac{1}{2}\pi \cos ax,$$

$$11. \quad \int_0^\infty \frac{\theta\partial\theta}{a^2+\theta^2} e^{-x\theta} = Ci(ax) \cos ax + Si(ax) \sin ax - \tfrac{1}{2}\pi \sin ax.$$

où il ne faut pas oublier que les quantités a et x doivent être essentiellement positives.

Suivant les différents résultats déjà connus, et suivant les développements que nous avons données antérieurement, on pourra calculer une table complète des valeurs des intégrales que l'on obtient en fésant $\varphi(\theta) = e^{-x\theta}$, $\cos x\theta$, $\sin x\theta$ dans les formules générales

$$\int_0^\infty \frac{a\varphi(\theta)\partial\theta}{a^2-\theta^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\theta\varphi(\theta)\partial\theta}{a^2-\theta^2}, \quad \int_0^\infty \frac{a\varphi(\theta)\partial\theta}{a^2+\theta^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\theta\varphi(\theta)\partial\theta}{a^2+\theta^2}.$$

En effet, si pour abréger on fait

$$12. \quad Ei(\omega) = 0{,}577\,215\,6\,\ldots + \tfrac{1}{4}l(\omega^4)$$
$$+ \frac{1}{1}\,\frac{\omega}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\,\frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

on obtient les douze formules suivantes:

$$\text{I.} \quad \int_0^\infty \frac{a\partial\theta}{a^2-\theta^2}.e^{-x\theta} = \tfrac{1}{2}\{e^{-ax}Ei(ax) - e^{ax}Ei(-ax)\},$$

$$\text{II.} \quad \int_0^\infty \frac{\theta\partial\theta}{a^2-\theta^2}.e^{-x\theta} = \tfrac{1}{2}\{e^{-ax}Ei(ax) + e^{ax}Ei(-ax)\},$$

$$\text{III.} \quad \int_0^\infty \frac{a\partial\theta}{a^2+\theta^2}.e^{-x\theta} = Ci(ax)\sin ax - Si(ax)\cos ax + \tfrac{1}{2}\pi\cos ax,$$

$$\text{IV.} \quad \int_0^\infty \frac{\theta\partial\theta}{a^2+\theta^2}.e^{-x\theta} = Ci(ax)\cos ax + Si(ax)\sin ax - \tfrac{1}{2}\pi\sin ax,$$

$$\text{V.} \quad \int_0^\infty \frac{a\cos x\theta}{a^2-\theta^2}.\partial\theta = \tfrac{1}{2}\pi\sin ax,$$

$$\text{VI.} \quad \int_0^\infty \frac{\theta\cos x\theta}{a^2-\theta^2}.\partial\theta = Ci(ax)\cos ax + Si(ax)\sin ax,$$

$$\text{VII.} \quad \int_0^\infty \frac{a\cos x\theta}{a^2+\theta^2}.\partial\theta = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ax},$$

$$\text{VIII.} \quad \int_0^\infty \frac{\theta\cos x\theta}{a^2+\theta^2}.\partial\theta = -\tfrac{1}{2}\{e^{-ax}Ei(ax) + e^{ax}Ei(-ax)\},$$

$$\text{IX.} \quad \int_0^\infty \frac{a\sin x\theta}{a^2-\theta^2}.\partial\theta = Ci(ax)\sin ax - Si(ax)\cos ax,$$

$$\text{X.} \quad \int_0^\infty \frac{\theta\sin x\theta}{a^2-\theta^2}.\partial\theta = -\tfrac{1}{2}\pi\cos ax,$$

$$\text{XI.} \quad \int_0^\infty \frac{a\sin x\theta}{a^2+\theta^2}.\partial\theta = \tfrac{1}{2}\{e^{-ax}Ei(ax) - e^{ax}Ei(-ax)\},$$

$$\text{XII.} \quad \int_0^\infty \frac{\theta\sin x\theta}{a^2+\theta^2}.\partial\theta = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ax}.$$

Dans toutes ces formules il faut que $\infty > a > 0$ et $\infty > x > 0$.