Addition au mémoire sur les fonctions elliptiques, inséré dans le Nr. 138. de ce journal.

Par Mr. N. H. Abel.

Dans le Nr. 138 de ce journal j'ai fait voir comment on pourra trouver toutes les transformations possibles, réelles ou imaginaires d'une fonction elliptique proposée. Les modules c, e, c', e' , pourront être des quantités quelconques. Le cas le plus remarquable est celui où l'on suppose les modules réelles. Dans ce cas le problème général pourra se résoudre par une méthode particulière, entièrement différente de celle que nous avons donnée dans le mémoire cité. Puisque cette nouvelle méthode est remarquable par sa grande simplicité je vais l'indiquer ici en peu de mots.

Le problème général que nous allons complètement résoudre est le suivant:

„Trouver tous les cas possibles où l'on pourra satisfaire „à l'équation différentielle:

$$[1] \dots \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} = a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

„par une équation algébrique entre les variables x „et y , en supposant les modules c et c' , moindres que „l'unité et le coefficient a réel ou imaginaire.“

En désignant par $\lambda\theta$ la fonction inverse de celle-ci $\theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$ en sorte que $x = \lambda\theta$ on aura en vertu de la formule [4] du Nr. 138

$$\lambda[(-1)^{m+m'}\theta + m\omega + m'\omega'] = \lambda\theta$$

où les quantités constantes ω, ω' sont déterminées par les formules:

$$[2] \dots \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \\ \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

Dans le cas que nous considérons, la quantité ω est réelle mais ω' est imaginaire. On aura en effet

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} + \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\omega'}{2} = \frac{\omega}{2} + \sqrt{-1} \cdot \int_1^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}}$$

où il est clair que le coefficient de $\sqrt{-1}$ est une quantité réelle. En faisant $x = \frac{1}{\sqrt{1-b^2y^2}}$ où $b = \sqrt{1-c^2}$ on trouve:

$$\frac{\omega'}{2} = \frac{\omega}{2} + \sqrt{-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

où

$$[3] \dots \frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}}$$

Le théorème II du Nr. 138 donnera donc ce-ci:

„On satisfera de la manière la plus générale à l'équation

$$\lambda\theta' = \lambda\theta$$

„en prenant

$$[4] \dots \theta' = (-1)^m\theta + m\omega + m'\omega \cdot \sqrt{-1}$$

„où m et m' sont des nombres entiers quelconques et ω „et ω' deux quantités réelles données par les formules „[2] et [3].“

Cela posé soit

$$[5] \dots f(y, x) = 0$$

l'équation algébrique entre y et x qui doit satisfaire à l'équation différentielle [1]. Si l'on fait $x = \lambda\theta$ et $y = \lambda'\theta'$ où θ et θ' sont deux nouvelles variables et λ, λ' la fonction elliptique qui reponde au module c , en sorte que

$$[6] \dots \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} = d\theta' \text{ pour } y = \lambda'\theta'$$

l'équation [1] deviendra

$$d\theta' = \pm a d\theta$$

d'où l'on tire en intégrant: $\theta' = s \pm a\theta$ où s est une constante. On a donc:

$$y = \lambda'(\pm a\theta + s)$$

ou bien en mettant $+a$ pour $\pm a$:

$$[7] \dots y = \lambda, (\varepsilon + a\theta).$$

L'équation [5] entre x et y donnera donc celle-ci

$$[8] \dots f[\lambda, (\varepsilon + a\theta), \lambda\theta] = 0$$

qui ne contient que la seule variable θ et qui aura lieu quelle que soit la valeur de cette quantité.

Il ne serait pas difficile à l'aide de la formule [8] de trouver la fonction $f(y, x)$; mais pour notre objet il suffit de connaître le coefficient a et une certaine relation entre les fonctions complètes. Voici comment on y parviendra. En mettant $\theta + 2m\omega$ au lieu de θ on obtiendra en remarquant qu'en vertu de [4]

$$\lambda(\theta + 2m\omega) = \lambda\theta$$

cette autre équation

$$[9] \dots f[\lambda, (\varepsilon + 2m\omega + a\theta), \lambda\theta] = 0$$

On aura de même en mettant $\theta + m\pi i$ pour θ où $i = \sqrt{-1}$:

$$[10] \dots f[\lambda, (\varepsilon + m\pi i + a\theta), \lambda\theta] = 0$$

Dans ces deux équations m pourra être un nombre entier quelconque. En faisant $x = \lambda\theta$ on voit donc que l'équation algébrique:

$$f(y, x) = 0$$

est satisfaite en mettant pour y une quantité quelconque de l'une des deux formes:

$$\lambda, (\varepsilon + 2m\omega + a\theta); \quad \lambda, (\varepsilon + m\pi i + a\theta)$$

mais m peut avoir une infinité de valeurs tandis que l'équation dont il s'agit n'a qu'un nombre limité de racines; il faut donc qu'on puisse trouver deux nombres entiers k et k' tels que

$$[11] \dots \lambda, (\varepsilon + 2k'\omega + a\theta) = \lambda, (\varepsilon + 2k\omega + a\theta)$$

et deux autres ν et ν' tels que

$$[12] \dots \lambda, (\varepsilon + \nu'a\pi i + a\theta) = \lambda, (\varepsilon + \nu a\pi i + a\theta)$$

En vertu de la formule [4] ces deux équations donneront respectivement:

$$[13] \dots \begin{cases} 2k'\omega = 2k\omega + 2m\omega + m'\pi, \sqrt{-1} \\ \nu'a\pi i = \nu a\pi i + 2\mu\omega + \mu'\pi, \sqrt{-1} \end{cases}$$

où ω , et π , désignent les valeurs de ω et π qui répondent au module c , c'est-à-dire on a:

$$[14] \dots \begin{cases} \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \\ \frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}} \end{cases} \text{ où } b = \sqrt{1-c^2}$$

Cela posé les équations [13] donneront en mettant ν pour $k' - k$ et ν' pour $\nu' - \nu$.

$$[15] \dots \begin{cases} a = \frac{m}{\nu} \cdot \frac{\omega}{\omega} + \frac{m'}{2\nu} \cdot \frac{\pi}{\omega} \sqrt{-1} \\ a = \frac{\mu'}{\nu'} \cdot \frac{\pi}{\pi} + \frac{2\mu}{\nu'} \cdot \frac{\omega}{\pi} \sqrt{-1} \end{cases}$$

et de là en comparant les parties réelles et imaginaires:

$$[16] \dots \frac{m}{\nu} \cdot \frac{\omega}{\omega} = \frac{\mu'}{\nu'} \cdot \frac{\pi}{\pi}; \quad \frac{m'}{2\nu} \cdot \frac{\pi}{\omega} = -\frac{2\mu}{\nu'} \cdot \frac{\omega}{\pi}$$

Ces deux équations donneront celles-ci:

$$[17] \dots \frac{\omega^2}{\pi^2} = -4 \frac{m \cdot m'}{\mu \cdot \mu'} \cdot \frac{\nu'^2}{\nu^2}; \quad \frac{\omega_1^2}{\pi_1^2} = -4 \frac{m' \mu'}{m \mu}$$

Maintenant $\frac{\omega^2}{\pi^2}$ est une fonction continue de c , donc les équations 17 ne sauront avoir lieu que pour des valeurs particulières des modules c et c_1 . Si donc on suppose c indéterminé il faut que l'une des équations

$$[18] \dots m' = \mu = 0;$$

$$[19] \dots m = \mu' = 0$$

ait lieu. Dans le premier cas les équations [15] et [16] se réduiront à

$$[20] \dots \begin{cases} a = \frac{m}{\nu} \cdot \frac{\omega}{\omega} = \frac{\mu'}{\nu'} \cdot \frac{\pi}{\pi} \\ \frac{\omega}{\pi} = \frac{\nu \mu'}{\nu' m} \cdot \frac{\omega}{\pi} \end{cases}$$

et dans le second cas à

$$[21] \dots \begin{cases} a = \frac{m'}{2\nu} \cdot \frac{\pi}{\omega} \sqrt{-1} = -\frac{2\mu}{\nu'} \cdot \frac{\omega'}{\pi} \sqrt{-1} \\ \frac{\omega}{\pi'} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{m' \nu'}{\mu \nu} \cdot \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Mais si la valeur du module c est telle que la 1^{ère} des équations [17] ait lieu, on doit avoir en même temps:

$$[22] \dots \frac{\omega}{\pi} = 2 \cdot \frac{\nu'}{\nu} \cdot \sqrt{-\frac{m \cdot m'}{\mu \cdot \mu'}}; \quad \frac{\omega_1}{\pi_1} = 2 \sqrt{-\frac{m' \mu'}{m \mu}}$$

et alors a est donné par l'une des équations [15]...

Quant aux nombres $m, m', \mu, \mu', \nu, \nu'$ il faut les prendre tels que $\omega, \omega_1, \pi, \pi_1$ soient selon leur nature des quantités positives. Si donc on suppose, ce qui est permis, ν et ν' positifs, il faut que m et μ' soient du même signe et m' et μ du signe contraire. On pourra d'ailleurs sans diminuer la généralité supposer m', m et μ' positifs et μ négatif.

Par ce qu'on vient de voir on a immédiatement ce théorème:

Théorème. Pour que l'équation [1] ait une intégrale algébrique en x et y il faut nécessairement que les modules c , et c' soient liés entre eux de la manière que l'une des deux quantités $\frac{\omega'}{\omega}$, et $\frac{\omega}{\omega'}$ soit dans un rapport rationnel avec $\frac{\omega}{\omega'}$; c'est-à-dire on doit avoir l'une des équations

$$[23] \dots \frac{\omega'}{\omega} = k \cdot \frac{\omega}{\omega'}; \quad \frac{\omega'}{\omega} = k' \cdot \frac{\omega}{\omega'}$$

où k et k' sont des nombres rationnels. Si la première de ces équations a lieu mais pas la seconde, on aura en même temps

$$[24] \dots a = \delta \cdot \frac{\omega'}{\omega}$$

où δ est un nombre rationnel. Si la seconde équation a lieu mais pas la première, on aura en même temps

$$[25] \dots a = \delta' \cdot \frac{\omega}{\omega'} \sqrt{-1}$$

Enfin si les deux équations [23] ont lieu en même temps, les modules c et c' seront tous deux déterminés, savoir respectivement par les équations:

$$[26] \dots \frac{\omega}{\omega'} = \sqrt{(k \cdot k')}; \quad \frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{k}{k'}\right)}$$

et alors le coefficient a doit avoir la forme:

$$[27] \dots a = \delta \cdot \frac{\omega'}{\omega} + \delta' \cdot \frac{\omega}{\omega'} \sqrt{-1}$$

où δ et δ' sont des nombres rationnels.

Les conditions indiquées dans ce théorème doivent donc nécessairement être remplies pour que l'équation [1] ait une intégrale algébrique; il reste encore le point le plus important, savoir de déterminer si ces conditions sont suffisantes. Or c'est cela que nous allons faire voir à l'aide de la formule [65] du Nr. 138. Cette formule peut facilement être démontrée en faisant effectivement la substitution de y ; mais il existe une autre démonstration, tirée des considérations entièrement différentes et que nous allons donner ici en nous servant d'une formule démontrée dans „*les recherches sur les fonctions elliptiques*.“ Il s'agit de la formule [185] de ce mémoire (*Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik* 2^{ter} Band. pag. 176) savoir:

$$[28] \dots f\alpha = \prod_m \frac{1 - \left(\frac{\rho - \rho^{-1}}{r^{m+\frac{1}{2}} - r^{-m-\frac{1}{2}}}\right)^2}{1 + \left(\frac{\rho - \rho^{-1}}{r^{m+\frac{1}{2}} + r^{-m-\frac{1}{2}}}\right)^2}$$

où

$$[29] \dots \rho = e^{\frac{\alpha\pi}{\omega}}, \quad r = e^{\frac{\omega'\pi}{\omega'}}$$

les quantités ω' et ω étant données par les équations

$$[30] \dots \frac{\omega'}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}; \\ \frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1+x^2)}}$$

On a de plus:

$$[31] \dots f\alpha = \sqrt{(1-x^2)}$$

où x est lié à α par l'équation

$$[32] \dots \alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}$$

Si l'on fait $e = \sqrt{\frac{c}{1-c^2}} = \frac{c}{b}$; $x = \sqrt{(1-y^2)}$ on trouvera:

$$\frac{\omega'}{2} = b \cdot \frac{\omega}{2}; \quad \frac{\omega'}{2} = b \cdot \frac{\omega}{2}; \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\omega}{\omega'}$$

$$d\alpha = -b \cdot \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}$$

et de là:

$$y = \lambda \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{b} \right)$$

maintenant l'équation $x = \sqrt{(1-y^2)}$ donne

$$y = \sqrt{(1-x^2)} = f\alpha \text{ donc: } f\alpha = \lambda \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{b} \right)$$

et de là en mettant $b \frac{\omega}{2} - b\alpha$ pour α

$$[33] \dots \lambda\alpha = f\left(b \frac{\omega}{2} - b\alpha\right)$$

Cela posé si l'on pose dans la formule [28] $b \frac{\omega}{2} - b\alpha$ au lieu de α on trouvera après quelques réductions faciles:

$$[34] \lambda\alpha = A \cdot \frac{(1-t^2)(1-t^2r^2)(1-t^2r^4)(1-t^2r^6)(1-t^2r^8)\dots}{(1+t^2)(1+t^2r^2)(1+t^2r^4)(1+t^2r^6)(1+t^2r^8)\dots}$$

où

$$[35] \dots t = e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega}}, \quad r = e^{-\frac{\omega'\pi}{\omega}}$$

et A une quantité indépendante de α .

Si l'on fait pour abréger

$$[35]^a \dots \frac{1 - e^{-2\pi x}}{1 + e^{-2\pi x}} = \psi(x)$$

on aura donc:

$$[36] \lambda\alpha = A \cdot \psi\left(\alpha \frac{\pi}{\omega}\right) \cdot \psi\left(\omega + \alpha\right) \frac{\pi}{\omega} \cdot \psi\left(\omega - \alpha\right) \frac{\pi}{\omega} \cdot \psi\left(2\omega + \alpha\right) \frac{\pi}{\omega} \cdot \psi\left(2\omega - \alpha\right) \frac{\pi}{\omega} \cdot \psi\left(3\omega + \alpha\right) \frac{\pi}{\omega} \cdot \psi\left(3\omega - \alpha\right) \frac{\pi}{\omega} \dots$$

Si l'on fait maintenant successivement

$$\alpha = \theta, \quad \theta + \frac{\omega}{n}, \quad \theta + \frac{2\omega}{n}, \quad \dots, \quad \theta + \frac{n-1}{n}\omega$$

on aura les valeurs de $\lambda\theta$, $\lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right)$... $\lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right)$ qui multipliées ensemble donneront sur le champ

$$[37] \quad \lambda\theta \cdot \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) \cdot \lambda\left(\theta + \frac{2\omega}{n}\right) \dots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right) \\ = A^n \cdot \psi\left(\delta \cdot \frac{\pi}{\omega}\right) \cdot \psi\left(\omega + \delta\right) \frac{\pi}{\omega} \cdot \psi\left(\omega - \delta\right) \frac{\pi}{\omega} \cdot \psi\left(2\omega + \delta\right) \frac{\pi}{\omega} \dots$$

où on a fait pour abréger

$$[38] \quad \dots \quad \delta = \frac{\omega}{\omega'} \cdot \theta; \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\omega}{\omega'}$$

or si l'on suppose dans la formule [36] le module c , au lieu de c et désigne les valeurs correspondantes de

$\lambda\theta$, ω , ω' , A respectivement par
 λ, θ , ω , ω' , A , il viendra

$$\lambda, \alpha = A \cdot \psi\left(\alpha \frac{\pi}{\omega}\right) \cdot \psi\left(\omega + \alpha\right) \frac{\pi}{\omega} \cdot \psi\left(\omega - \alpha\right) \frac{\pi}{\omega} \dots$$

Le second membre de la formule [37] est donc la même chose que $\frac{A^n}{A} \cdot \lambda, \delta = \frac{A^n}{A} \cdot \lambda, \left(\frac{\omega}{\omega'} \theta\right)$ et par conséquent on aura la suivante

$$[39] \quad \lambda, \left(\frac{\omega}{\omega'} \theta\right) = \frac{A}{A^n} \cdot \lambda\theta \cdot \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) \cdot \lambda\left(\theta + \frac{2\omega}{n}\right) \dots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right)$$

cette équation a donc toujours lieu si le module c , et tel que:

$$[40] \quad \dots \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\omega}{\omega'}$$

quel que soit d'ailleurs le nombre entier n .

Si l'on fait $\lambda\theta = x$, $\lambda, \left(\frac{\omega}{\omega'} \theta\right) = y$ on aura

$$[41] \quad \frac{\omega' \cdot dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \frac{\omega \cdot dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = \omega d\theta$$

qui par conséquent est satisfaite par l'équation algébrique:

$$[42] \quad \dots \quad y = \frac{A}{A^n} \cdot \lambda\theta \cdot \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) \dots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right)$$

La valeur de y est toujours une fonction algébrique de x . En effet si n est un nombre impair on a

$$[43] \quad y = \frac{A}{A^n} \cdot x \cdot \frac{\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2 \cdot \lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) \cdot x^2} \dots \frac{\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2 \lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\omega}{n}\right) \cdot x^2}$$

et si n est un nombre pair:

$$[44] \quad y = \frac{A}{A^n} \cdot x \cdot \frac{\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2 \lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) \cdot x^2} \dots \frac{\lambda^2\left(\frac{n-2}{2}\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2 \lambda^2\left(\frac{n-2}{2}\frac{\omega}{n}\right) \cdot x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}}$$

Considérons maintenant les trois cas de notre problème général.

Premier cas, si a est réel. Dans ce cas on doit avoir comme nous avons vu $\alpha = \delta \cdot \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\omega'}{\omega}$ où μ et ν sont des nombres entiers et l'équation proposée deviendra:

$$[45] \quad \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\omega'}{\omega} \cdot \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

On doit avoir de plus $\frac{\omega'}{\omega} = k \cdot \frac{\omega}{\omega} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\omega}{\omega}$ où ω et n sont entiers. — Si l'on fait $x = \lambda(\nu\omega\theta)$ et $y = \lambda, (\mu\omega\theta)$ où θ est une nouvelle variable, l'équation [45] sera satisfaite, car les deux membres se réduiront à $\mu\omega, d\theta$. Pour avoir une intégrale en x et y il faut donc éliminer θ des deux équations:

$$[46] \quad \dots \quad x = \lambda(\nu\omega\theta); \quad y = \lambda, (\mu\omega\theta)$$

Nous allons voir que le résultat de l'élimination sera une équation algébrique en x et y .

Soit c' un nouvel module et désignons

par $\lambda'\theta$, ω' , ω' , A' les valeurs correspondantes de $\lambda\theta$, ω , ω' , A . Cela posé si l'on suppose le module c' tel que $\frac{\omega'}{\omega'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\omega}{\omega'}$ on aura en vertu de la formule [39], en mettant $\mu\nu\omega$ au lieu de θ

$$[47] \quad \dots \quad \lambda'(\mu\nu\omega, \theta) = \frac{A'}{A^n} \cdot \lambda'(\mu\nu\omega\theta) \cdot \lambda'\left(\mu\nu\omega\theta + \frac{\omega}{n}\right) \dots \lambda\left(\mu\nu\omega\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right)$$

maintenant ayant $\frac{\omega'}{\omega'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\omega}{\omega'}$ et $\frac{\omega'}{\omega'} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\omega}{\omega'}$ on en tire $\frac{\omega'}{\omega'} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\omega}{\omega'}$ donc la même formule donnera:

$$[48] \quad \dots \quad \lambda'(\mu\nu\omega'\theta) = \frac{A'}{A'^m} \cdot \lambda, (\mu\nu\omega, \theta) \cdot \lambda, \left(\mu\nu\omega, \theta + \frac{\omega}{m}\right) \dots \lambda\left(\mu\nu\omega, \theta + \frac{m-1}{m}\omega\right)$$

En égalant entre elles ces deux expressions de $\lambda'(\mu\nu\omega'\theta)$ il viendra en faisant pour abréger:

$$[49] \quad \dots \quad \nu\omega\theta = \delta, \quad \mu\omega, \theta = \delta,$$

$$[50] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{A^n} \cdot \lambda(\mu\delta) \cdot \lambda\left(\mu\delta + \frac{\omega}{n}\right) \dots \lambda\left(\mu\delta + \frac{n-1}{n}\omega\right) \\ = \frac{1}{A'^m} \cdot \lambda, (\nu\delta) \cdot \lambda, \left(\nu\delta + \frac{\omega}{m}\right) \dots \lambda, \left(\nu\delta + \frac{m-1}{m}\omega\right) \end{array} \right.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction algébrique de $\lambda(\mu\delta)$ et le second une fonction algébrique de $\lambda, (\nu\delta)$; mais $\lambda(\mu\delta)$ est à son tour une fonction algébrique de $\lambda\delta = x$ et $\lambda, (\nu\delta)$ une fonction algébrique de $\lambda, \delta = y$. Donc enfin les deux membres de l'équation [50] sont respectivement des fonctions algébriques de x et de y . Donc cette équation exprime l'intégrale cherchée en x et y de l'équation différentielle [45]. Pour en avoir l'intégrale complète il suffit d'ajouter à δ ou à δ , une quantité constante arbitraire. Quant aux quantités A et A' , on doit remarquer qu'on a

$$[51] \dots A = \frac{1}{\sqrt{c}} \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{c}},$$

Pour donner un exemple supposons qu'on demande une intégrale algébrique de l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2 y^2)]}} = \frac{\omega_1}{\omega} \cdot \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}$$

dans le cas où $\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\omega}{\omega}$. On aura alors $\mu = \nu = 1$, $m = 2$, $n = 3$. L'équation () deviendra donc:

$$c\sqrt{c} \cdot \lambda \delta \cdot \lambda \left(\delta + \frac{\omega}{3} \right) \cdot \lambda \left(\delta + \frac{2\omega}{3} \right) = c_1 \lambda_1 \delta_1 \cdot \lambda_1 \left(\delta_1 + \frac{\omega_1}{2} \right)$$

c'est-à-dire:

$$y \cdot \frac{\sqrt{(1-y^2)}}{\sqrt{(1-c^2 y^2)}} = \frac{c_1 \sqrt{c}}{c_1} \cdot x \cdot \frac{\lambda^2 \frac{\omega}{3} - x^2}{1 - c^2 \lambda^2 \frac{\omega}{3} \cdot x^2}$$

Second cas si $a\sqrt{-1}$ est réel. Dans ce cas on doit avoir selon [15], $a = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \sqrt{-1}$ où μ et ν sont entiers. On doit avoir de même $\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\omega}{\omega}$. L'équation proposée [1] deviendra:

$$[52] \quad \frac{\nu}{\mu} \frac{\omega}{\omega_1} \sqrt{-1} \cdot \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2 y^2)]}} = \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}$$

Pour réduire ce cas au précédent il suffit de faire $x = \frac{z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-z^2)}}$ où z est une nouvelle variable, on aura alors: $\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}} = \sqrt{-1} \cdot \frac{dz}{\sqrt{[(1-z^2)(1-b^2 z^2)]}}$ où $b = \sqrt{(1-c^2)}$ et par suite l'équation [52] deviendra en y et z :

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2 y^2)]}} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\omega}{\omega_1} \cdot \frac{dz}{\sqrt{[(1-z^2)(1-b^2 z^2)]}}$$

donc l'intégrale algébrique est exprimée par la formule [50] en y faisant $z = \lambda \delta = \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$ et mettant ω au lieu de ω_1 .

Supposons par exemple qu'il s'agit de trouver une intégrale algébrique de l'équation:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2 y^2)]}} = \frac{\omega_1}{\omega} \sqrt{-1} \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}$$

dans le cas où $\frac{\omega_1}{\omega} = 2 \cdot \frac{\omega}{\omega}$. Ayant $\mu = \nu = 1$ et $m = 2$, $n = 1$ l'équation [50] deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \lambda \delta = \frac{1}{c_1} \cdot \lambda_1 \delta_1 \cdot \lambda_1 \left(\delta_1 + \frac{\omega_1}{2} \right)$$

c'est-à-dire en remettant les valeurs de $\lambda \delta$ et $\lambda_1 \delta_1$:

$$y \frac{\sqrt{(1-y^2)}}{\sqrt{(1-c^2 y^2)}} = \frac{c_1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$$

Troisième cas. Si $\frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{k k'}$, $\frac{\omega_1}{\omega} = \sqrt{\frac{k}{k'}}$

Dans ce cas on doit avoir en vertu du théorème I

$a = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\mu'}{\nu'} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \sqrt{-1}$ où μ , ν , μ' , ν' sont des nombres entiers. L'équation proposée deviendra donc:

$$[53] \dots \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2 y^2)]}} = \left(\frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\mu'}{\nu'} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \sqrt{-1} \right) \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}$$

et cette équation sera toujours intégrable algébriquement. En effet comme on a tant

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{k'} \cdot \frac{\omega}{\omega} \quad \text{que} \quad \frac{\omega_1}{\omega} = k \cdot \frac{\omega}{\omega} \quad \text{où } k' \text{ et } k$$

sont des nombres rationnels on pourra en vertu de ce que nous venons de voir dans les deux premiers cas satisfaire algébriquement aux équations

$$\frac{dz}{\sqrt{[(1-z^2)(1-c_1^2 z^2)]}} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}$$

$$\frac{dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-c_1^2 v^2)]}} = \frac{\mu'}{\nu'} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \sqrt{-1} \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}$$

Par là l'équation [53] deviendra:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2 y^2)]}} = \frac{dz}{\sqrt{[(1-z^2)(1-c_1^2 z^2)]}} + \frac{dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-c_1^2 v^2)]}}$$

à la quelle on satisfera comme on sait en prenant:

$$[54] \quad y = \frac{z \cdot \sqrt{[(1-v^2)(1-c_1^2 v^2)]} + v \cdot \sqrt{[(1-z^2)(1-c_1^2 z^2)]}}{1 - c_1^2 z^2 v^2}$$

En y substituant les valeurs de v et z en x on aura une intégrale algébrique en x et y de l'équation.

Nous avons ainsi démontré que les conditions nécessaires exposées dans le théorème I sont en même temps suffisantes.

En vertu de ce qui a été exposé dans le premier cas on a immédiatement ce théorème:

Pour que deux fonctions elliptiques réelles $F(c', \theta')$, $F(c, \theta)$ puissent être réduites l'une à l'autre il est nécessaire et il suffit qu'on ait entre les fonctions complètes:

$F^n(c)$; $F^n(b)$; $F^n(c')$; $F^n(b')$ cette relation:

$$[55] \dots n \cdot F^n(c') \cdot F^n(b) = m \cdot F^n(b') \cdot F^n(c)$$

où m et n sont des nombres entiers. — Si cette condition est remplie on pourra établir une relation algébrique entre $\sin \theta'$ et $\sin \theta$ telle que:

$$[56] \dots F(c', \theta') = k \cdot \frac{F^n(b')}{F^n(b)} \cdot F(c, \theta)$$

où k est un nombre rationnel. On pourra ajouter que dans le cas où $k = 1$, θ' est lié à θ par l'équation:

$$[57] \dots \left\{ \begin{aligned} &\theta' + \text{Arct.}[a'_1 \cdot \text{tang } \theta'] + \text{Arct.}[a'_2 \cdot \text{tang } \theta'] + \dots + \text{Arct.}[a'_{m-1} \cdot \text{tang } \theta'] \\ &= \theta + \text{Arct.}[a_1 \cdot \text{tang } \theta] + \text{Arct.}[a_2 \cdot \text{tang } \theta] + \dots + \text{Arct.}[a_{n-1} \cdot \text{tang } \theta] \end{aligned} \right.$$

où $a_1, a_2, \dots, a'_1, a'_2, a'_3, \dots$ sont des quantités constantes données par les formules

$$[58] \dots \left\{ \begin{aligned} a_\mu &= \sqrt{1 - c^2 \cdot \sin^2 \theta_\mu} \\ a'_\mu &= \sqrt{1 - c'^2 \cdot \sin^2 \theta'_\mu} \end{aligned} \right.$$

après avoir déterminé θ_μ et θ'_μ tels que

$$[59] \dots \left\{ \begin{aligned} F(c, \theta_\mu) &= \frac{2\mu}{n} \cdot F^n(c) = \frac{\mu}{n} \cdot \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \theta)}} \\ F(c', \theta'_\mu) &= \frac{2\mu}{m} \cdot F^n(c') = \frac{\mu}{m} \cdot \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c'^2 \sin^2 \theta)}} \end{aligned} \right.$$

En prenant $n = 1$ on aura la formule [67] du Nr. 138.

Il y a un cas du problème général qui mérite d'être remarqué; c'est celui où l'on suppose les deux modules égaux entre eux, ou en d'autres termes quand on demande tous les cas dans lesquels il sera possible d'intégrer algébriquement l'équation différentielle:

$$[60] \dots \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2 y^2)}} = a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2 x^2)}}$$

Dans ce cas on a $\omega' = \omega$, $\varpi' = \varpi$ et par conséquent les équations [15] deviendront:

$$a = \frac{m}{\nu} + \frac{m'}{2\nu} \cdot \frac{\varpi}{\omega} \sqrt{-1} = \frac{\mu'}{\nu'} - \frac{2\mu}{\nu'} \cdot \frac{\omega}{\varpi} \sqrt{-1}$$

et de là

$$\frac{m}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'}; \quad \frac{m'}{2\nu} \cdot \frac{\varpi}{\omega} = -\frac{2\mu}{\nu'} \cdot \frac{\omega}{\varpi}$$

Si l'on veut que a soit réel on a $a = \frac{m}{\nu}$, $m' = \mu = 0$ dans ce cas on n'aura aucune condition pour la valeur de c , qui peut être quelconque, mais on voit que a doit être un nombre rationnel. — Si au contraire on admet des valeurs imaginaires de a le modul c doit être tel que $\frac{m'}{2\nu} \cdot \frac{\varpi}{\omega} = -\frac{2\mu'}{\nu'} \cdot \frac{\omega}{\varpi}$ d'où l'on tire $\frac{\omega}{\varpi} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{m' \nu'}{\mu' \nu}}$.

En vertu de cette expression la valeur de a deviendra:

$$a = \frac{\mu'}{\nu'} - \frac{\mu}{\nu'} \cdot \sqrt{-\frac{m' \nu'}{\mu' \nu}} \cdot \sqrt{-1}$$

Soit $\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{k}$ on aura

$$a = \delta + \delta' \sqrt{k} \cdot \sqrt{-1}$$

où k, δ, δ' pourront désigner des nombres rationnels quelconques. On voit que pour que l'équation [60] soit intégrable algébriquement en supposant a imaginaire il est nécessaire et il suffit que

$$\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{k}, \quad a = \delta + \delta' \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{-1}$$

k est essentiellement positif.

On pourra exprimer le modul c en produits infinis comme il suit

$$\sqrt{c} = \frac{1 - e^{-\pi \sqrt{k}}}{1 + e^{-\pi \sqrt{k}}} \cdot \frac{1 - e^{-3\pi \sqrt{k}}}{1 + e^{-3\pi \sqrt{k}}} \cdot \frac{1 - e^{-5\pi \sqrt{k}}}{1 + e^{-5\pi \sqrt{k}}}$$

On tire cette expression de la formule [34] en y faisant

$\alpha = \frac{\omega}{2}$ et remarquant que $\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{k}$ et $A = \sqrt{c}$.

On aura en même temps le module b par cette formule:

$$\sqrt{b} = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{\sqrt{k}}}}{1 + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{k}}}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{k}}}}{1 + e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{k}}}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{k}}}}{1 + e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{k}}}}$$

Il suit encore de ce qui précède que si le modul c a la valeur ci dessus, l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-b^2 y^2)}} = k' \sqrt{k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2 x^2)}}$$

sera toujours intégrable algébriquement quels que soient les nombres rationnels k et k' , pourvu que k soit positif.

Il y a encore beaucoup de choses à dire sur la transformation des fonctions elliptiques. On trouvera des développements ultérieurs sur cette matière ainsi que sur la théorie des fonctions elliptiques en général dans un mémoire qui va paraître dans le Journal de Monsieur *Crelle*.

Christiania le 25 Septembre 1828.

N. H. Abel.

Ephemeride für die im Jahr 1829 vorfallenden Bedeckungen der Fixsterne vom Monde.

Herr Professor Ritter *Schumacher* zeigte sich auf mein Anfragen bereitwillig, eine von mir für das nächste Jahr berechnete Ephemeride der Sternbedeckungen in seine Hülfsstafeln für 1829 aufnehmen zu wollen. Um nun

dieselbe so früh als möglich den Beobachtern zugänglich zu machen, habe ich den für die ersten 6 Monate geltenden Theil schon jetzt für die Astronomischen Nachrichten zur gefälligen Benutzung eingesendet.