VII. Ueber den Auftrieb in Flüssigkeiten, welche specifisch schwerere oder leichtere Körperchen suspendirt enthalten; von Camillo Bondy.

(Aus den Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. LI, von Hrn. Verf. mitgetheilt.)

Vorliegende Arbeit unternahm ich auf Vorschlag unter Leitung meines Lehrers Prof. Mach, zunächst bloß zu meiner Uebung. Da sich jedoch bei der Untersuchung manches vielleicht auch für Andere Brauchbare ergeben hat, entschloß ich mich, die Resultate zu publiciren.

Ich versuchte auf experimentellem und theoretischem Wege die Beantwortung der Frage: *Welchen Einfluß haben specifisch schwerere oder leichtere in einer Flüssigkeit suspendirte Körperchen auf den Auftrieb in derselben?*

Es scheint mir, daß dieser Gegenstand bisher nicht genügend behandelt worden, obgleich sich demselben bei näherer Betrachtung sehr interessante Seiten abgewinnen lassen. Meines Wissens hat diese Frage, wenn auch nicht genau in derselben Form, zuerst Brücke bei Gelegenheit der Untersuchung des specifischen Gewichtes der Milch angeregt.

Brücke ¹⁾ sagt in seinem Aufsatz:

Es fragt sich nun, ob die Unterschiede, welche sich in den Angaben des Tausendgranfläschchens und des Aräometers nothwendig zeigen müssen, groß genug sind, um mit Sicherheit wahrgenommen zu werden; ist dieß der Fall, so würde man auch aus ihnen einen Schluß auf die Menge des Rahms machen können, den die Milch absetzen wird; denn wenn man die Angabe des Tausendgranfläschchens mit a , die des Aräometers mit b , und eine Constante für das mittlere specifische Gewicht des Rahms mit c bezeichnet, wenn man ferner die absoluten Gewichte des Serums und des Rahms mit p und p_1 bezeichnet, so hat man:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{c(b-a)}{b(a-c)}.$$

1) Müller's Archiv 1847, S. 409.

Aus dieser Formel Brücke's ersieht man, daß Brücke annimmt, die suspendirten Körperchen wirkten gar nicht auf das Aräometer; denn sie ist, was übrigens nirgends ausdrücklich gesagt wird, offenbar unter der Annahme abgeleitet, daß die Aräometerangabe b dem specifischen Gewichte des Serums entspreche. Wir erhalten nämlich unter dieser Voraussetzung für das mittlere specifische Gewicht a nach dem Pyknometer die unmittelbar verständliche Formel:

$$a = \frac{p + p_1}{\frac{p}{b} + \frac{p_1}{c}}$$

aus welcher sofort der obige Ausdruck für $\frac{p_1}{p}$ folgt.

Es scheint mir nun diese Annahme Brücke's einer besonderen Prüfung werth. Doch dürfte zu diesem Ende ein anderes Experimentirmaterial als das von Brücke verwendete zweckmäßiger seyn. Nachdem Brücke aus zehn Versuchen die Grenzen der Differenzen in den Angaben des Pyknometers und eines feinen Aräometers auf $+0,00010$ und $-0,00014$ und die mittlere Differenz auf $-0,000018$ bestimmt hat (durch Abziehen der Aräometer- von der Pyknometerangabe) schreitet er zu den Versuchen mit einer Emulsion von Mohnöl und arabischem Gummi und mit Milch. Das Aräometer zeigte bei zwei Emulsionen und bei zwei Milchsorten constant ein größeres specifisches Gewicht als das Pyknometer selbst für die unterste Schicht der Flüssigkeit. Die größten Differenzen sind bei den Emulsionen $0,00356$, $0,00370$, bei der Milch $0,00058$, $0,00017$. Diese Differenzen überschreiten allerdings die Grenzen der Beobachtungsfehler.

Ich selbst habe Bestimmungen an ganz frischer Milch mit dem Pyknometer, mit dem Glastropfen an der hydrostatischen Waage und mit einem guten Scalenaräometer, an welchem die Hundertheile des specifischen Gewichtes abgelesen, die Tausendtheile aber noch sehr gut geschätzt werden konnten.

Die Ergebnisse war folgende:

I. Versuch.

Aräometer	1,0300
Glastropfen	1,0306
Pyknometer	1,0296

Bei diesem ersten Versuche wurde aus Versehen die noch warme Milch in das Pyknometer gefüllt, in den spätern Versuchen aber immer auf die Temperatur des gewogenen Wassers abgekühlt. (15° C.)

II. Versuch.

Aräometer	1,0300
Pyknometer	1,0306

III. Versuch.

Aräometer	1,0300
Pyknometer	1,0306

Es drängte sich mir bei diesen Bestimmungen die Ueberzeugung auf, das bei der Milch die etwa vorkommenden Differenzen doch zu klein seyen, um darauf sichere Schlüsse zu bauen. Ich machte mich also zunächst an die experimentelle Beantwortung der Frage: *Haben überhaupt suspendirte Körperchen einen Einfluss auf die Aräometerangabe?*

Gepulverter Gyps wurde in Wasser aufgeführt, und diese Flüssigkeit wurde mit dem Aräometer untersucht.

I. Versuch.

Specifisches Gewicht der frisch aufgeführten

Flüssigkeit	1,030
do. der halb geklärten	1,020
do. der ganz klaren	1,003

II. Versuch.

mit derselben Flüssigkeit am folgenden Tage angestellt:

aufgeführt	1,030
halb geklärt	1,020
ganz geklärt	1,003

Hieraus ist zu ersehen, daß die suspendirten Gypstheilchen einen sehr bedeutenden Einfluss auf die Aräometerangabe äußern, indem die entstehende Gypslösung bloß ein Gewicht von 1,003 zeigt.

Ein weiterer Versuch war folgender. Eine Lösung von

essigsaurom Blei vom specifischen Gewichte 1,195 wurde mit verdünnter Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1,225 zu gleichen Theilen rasch zusammengührt.

Verhielt sich das sofort ausgeschiedene, aber noch suspendirte schwefelsaure Blei bezüglich seiner Wirkung auf das Aräometer wie gelöst, so mußte die Mischung ein Gewicht von 1,205 zeigen. Das Aräometer gab 1,214, welche Differenz entschieden der Contraction zugeschrieben werden kann. Die geklärte Flüssigkeit zeigte 1,122, die wieder aufgeführte 1,214. Dieser Versuch kann bereits als ein quantitativer angesehen werden. Es geht aus demselben mit höchster Wahrscheinlichkeit hervor, daß das feinvertheilte Blei wie gelöstes Blei auf das Aräometer wirkt.

In 83 Grm. Wasser wurden 5 Grm. schwefelsauren Bleies vom specifischen Gewicht 6,2 zerrührt. Das Gewicht war:

nach der Rechnung 1,050

nach der Beobachtung 1,050

Wurden noch 83 Grm. Wasser zugesetzt, so war

das berechnete Gewicht 1,031

das beobachtete Gewicht 1,030

Soweit meine Beobachtung reicht, wirken fein vertheilte suspendirte Körper auf das Aräometer selbst quantitativ gerade so wie gelöste.

Unmittelbar klar ist, daß diese Wirkung von dem Grade der Vertheilung nicht unabhängig seyn kann. Eine Bleikugel einfach in eine Flüssigkeit geworfen, kann nicht so wirken, wie fein vertheiltes Blei. Die Frage stellt sich also jetzt so: Wie hängt die Wirkung der Körper auf das Aräometer von der Feinheit der Vertheilung ab? Die Frage in dieser Fassung experimentell zu beantworten ist mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden. Es ist allerdings leicht in eine Mischung von Alkohol und Wasser eine bedeutende Anzahl von Oeltropfen bestimmter Größe zu bringen. Man läßt einfach Oelstrahlen von bestimmter Dicke einfließen, welche nach dem Plateau'schen Gesetz ¹⁾ in Tropfen von bestimmter Größe zerfallen. Allein

1) Plateau, *sur les liquides sans pesanteur. Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, T. 33. — Mach, *Compend. d. Physik*. S. 82.

wenn die Alkoholmischung und das Oel von nahezu gleichem specifischen Gewicht sind, so ergeben sich für das Aräometer sehr geringe Differenzen. In jedem andern Falle aber sinken etwas größere Tropfen rasch zu Boden oder steigen rasch auf. Auch ist es schwer, bei der Manipulation mit der Flüssigkeit die Tropfen nicht zu zerstören. Ich muß demnach die Absicht, den Einfluß der Vertheilung experimentell zu untersuchen, vorläufig aufgeben. Vielleicht würde man brauchbarere Experimentirflüssigkeiten erzielen, wenn man Strahlen von geschmolzenem Kolophonium in kaltes Wasser eintreiben würde.

Um die angefangenen Versuche nicht ganz unbenutzt zu lassen, wurden einige Emulsionen von Alkohol und Oel mit Hülfe einer kleinen Spritze hergestellt und untersucht.

I. Versuch.

Eine Emulsion aus 3 Volumtheilen Alkohol vom spec. Gewicht 0,805 und 1 Volum Oel vom Gewicht 0,875.

Berechnetes Gewicht der Emulsion	. .	0,820
Beobachtetes	„ „ „	. . 0,820

II. Versuch.

1 Volum Alkohol vom spec. Gewicht 0,805 und 1 Volum Oel vom Gewicht 0,875.

Berechnet		0,840
Beobachtet		0,840

III. Versuch.

1 Vol. Alkohol und 2 Vol. Oel. Specifische Gewichte wie oben.

Berechnet		0,851
Beobachtet		0,850

Die Flüssigkeit im Versuche III war sehr zähe und die Aräometerbestimmung daher weniger sicher. Die Versuche bestätigen vollständig meine frühere Ansicht. Zu bemerken ist, daß die Aräometerangaben selbst dann noch mit der Rechnung stimmten, wenn die überwiegende Anzahl der Tropfen mit freiem Auge sichtbar war.

Ich will nun versuchen, das Beobachtete theoretisch begreiflich zu machen. Es kann zunächst gefragt werden,

wie es überhaupt möglich sey, daß ein fein vertheilter specifisch schwererer oder leichterer Körper in einer Flüssigkeit so lange suspendirt bleibt. Es ist dieß offenbar die Wirkung der Bewegungswiderstände, welche die Körpertheilchen in der Flüssigkeit erfahren. Die Bewegungswiderstände sind Functionen der Geschwindigkeit. Ich versuche zwei Annahmen und setze den Widerstand einmal der ersten, dann der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional. Heiße v die Geschwindigkeit vertical abwärts gerechnet, t die Zeit, p das Gewicht der Masseneinheit des suspendirten Körpers nach Abzug des Gewichtsverlustes, q ein vom Querschnitt abhängiger Widerstandcoefficient ebenfalls auf die Masseneinheit bezogen, so haben wir für beide Fälle beziehungsweise die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{dv}{dt} + qv - p = 0$$

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} + qv^2 - p = 0$$

und beziehungsweise ihre Integrale

$$(3) \quad v = Ae^{-qt} + \frac{p}{q},$$

$$(4) \quad v + \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \frac{Ae^{2\sqrt{pq} \cdot t} - 1}{Ae^{2\sqrt{pq} \cdot t} + 1}.$$

Man sieht sofort, daß, wie auch die Constante A durch den Anfangszustand bestimmt seyn möge, sich v schon nach einer endlichen Zeit nahezu auf beziehungsweise folgende zwei Werthe zurückzieht:

$$(5) \quad v = \frac{p}{q},$$

$$(6) \quad v = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Die Bewegung des suspendirten Theilchens wird alsbald gleichförmig, die Geschwindigkeit constant. Es handelt sich nun um die Bestimmung dieser Gränze von v . Man braucht hierbei nur zu überlegen, daß wenn man einen Körper von bestimmter Form in n kleinere untereinander con-

gruente, dem ersten ähnliche Körper theilt, die Masse in andern Verhältnisse abnimmt, als der Querschnitt. Nennen wir bei einer bestimmten Masse die Werthe von v beziehungsweise k , k' , so lehrt die genannte Ueberlegung sofort, dafs für den $\frac{1}{n}$ Theil dieser Masse die Geschwindigkeiten beziehungsweise gegeben seyen durch die Gleichungen:

$$(7) \quad v = \frac{k}{\sqrt{n}}$$

$$(8) \quad v = \frac{k'}{\sqrt{n}}.$$

In jedem der beiden Fälle nimmt also die Fallgeschwindigkeit ab, wenn die suspendirte Masse kleiner wird, und sehr kleine Massen können demnach sehr langsam fallen ¹⁾.

Die Ableitung gilt aber nur für ein einzelnes in einer Flüssigkeit enthaltenes Körperchen. Enthält die Flüssigkeit eine große Menge suspendirter Theile, so müssen sie sich gegenseitig am Fallen hindern. Die Flüssigkeit, die einem Theilchen ausweicht, stößt an das andere. Das Fallen findet desto langsamer statt, je feiner die Vertheilung, je mehr das Suspendirte so zu sagen ein Sieb bildet, welches fallende Sieb die Flüssigkeit durchströmen muß. Die Fallgeschwindigkeit muß mit der Vertheilung in einem weit höhern Maafse abnehmen, als die Formeln (7), (8) besagen. Diefs *Raisonnement* wird durch die Erfahrung auffallend bestätigt. Ich bilde eine Emulsion von Alkohol (spec. Gewicht = 0,805) und Oel (spec. Gewicht = 0,875), welche sich etwa 12 Stunden als Emulsion erhält. Bringe ich aber einen Tropfen der *Emulsion* in Alkohol (vom spec. Gewicht 0,805), so fällt dieser ausnehmend rasch zu Boden, zum Beweise, dafs hier die Oeltröpfchen freier fallen können als in der Emulsion, wo sie sich gegenseitig behindern.

Wie hat man sich nun die Wirkung der suspendirten Theilchen auf das Aräometer vorzustellen?

1) Vergl. die ganz elementäre Darstellung in Mach, *Compendium der Physik* S. 45.

Man könnte zunächst meinen, daß die in der Flüssigkeit eingeschlossenen Theilchen dieselbe einfach in ein Communicationsgefäß mit unzähligen Armen verwandeln, daß also diese Theilchen sonst gar nicht auf das Aräometer wirken. Diese Ansicht ist eben die nächstliegende. Ja es scheint sogar, daß Brücke dieselbe zu der seinigen gemacht hat. Dennoch kann sie eine genauere Prüfung nicht aushalten und läßt sich schon auf bloß logischem Wege *ad absurdum* führen, abgesehen davon, daß sie durch die Erfahrung widerlegt wird.

Man denke sich eine bedeutende Menge Alkohol, in welcher etwas Oel suspendirt ist. Das Aräometer zeigt bloß den Alkohol an. Man mische nun Alkohol in eine bedeutende Quantität Oel, so giebt das Aräometer bloß das Gewicht des Oeles. Oel und Alkohol aber zu gleichen Volumtheilen zusammengemengt, müßten nach obigem Principe beide specifischen Gewichte zeigen, denn im letztern Falle ist der Alkohol so gut im Oel suspendirt, wie das Oel im Alkohol. Das obige Princip kann also kein Princip seyn.

Man könnte die Frage mit Hülfe des Princips der virtuellen Bewegung zu behandeln versuchen. Ein Aräometer befinde sich in einer Flüssigkeit, welche suspendirte Theilchen enthält. Bringen wir dem Aräometer eine sehr kleine Verschiebung bei, indem wir es einsinken lassen, so muß offenbar eine entsprechende Quantität Flüssigkeit mit allem was sie suspendirt enthält, gehoben werden. Demnach müßte das Aräometer ein mittleres specifisches Gewicht zeigen. So scheint es auf den ersten Blick. Allein die Sache ist nicht so einfach. Die suspendirten Theile hängen nur durch die Reibung mit der Flüssigkeit zusammen und diese richtet sich nach der Geschwindigkeit, welche letztere in Gleichgewichtsbetrachtungen keine Rolle spielt. Man müßte also hiernach beinahe vermuthen, daß ein Aräometer in der gedachten Flüssigkeit zwar so im Gleichgewichte ist, als ob sie rein wäre, daß es aber in der Flüssigkeit so schwingt, als ob die suspendirten Theile gelöst

wären. Die richtige Auflösung dieses Paradoxons, liegt, wie mir scheint, in der einfachen Bemerkung, daß die Frage eben niemals eine statische, sondern stets eine dynamische sey. Die suspendirten Theile sind im Fallen begriffen. Sie fallen aber weit langsamer als im leeren Raume. Sofern sie aber weit langsamer fallen, müssen sie durch die Flüssigkeit aufgehalten seyn, was nur möglich ist, indem letztere auf diese einen Druck ausübt, folglich auch selbst einen solchen erleidet. Dieser Druck muß bei einem gleichförmigen Gemenge proportional der Tiefe unter dem Niveau zunehmen.

Stellen wir uns ein cylindrisches mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß vor, in welchem eine Reihe horizontal über einander befindlicher feiner Siebe angebracht wäre. Jedes Sieb strebt zu fallen. Hierbei muß es die unterhalb befindliche Flüssigkeit zwischen sich durchpressen. Weil dieß nur langsam geschehen kann, wirkt es wie der Kolben auf die Flüssigkeit in einem Pumpenstiefel. Je tiefer die Flüssigkeitsschicht, welche wir betrachten, unter dem Niveau liegt, desto mehr Siebe hat sie zu tragen. Der hydrostatische Druck nimmt proportional der Tiefe unter dem Niveau zu. Hierzu gesellt sich der von den Sieben herührende Druck, der ebenfalls proportional ist der Tiefe unter dem Niveau. Die Druckverhältnisse gestalten sich also ganz so, wie wenn dieselbe specifisch schwerer wäre. Das eingesenkte Aräometer muß einen größeren Auftrieb zeigen. Die Flüssigkeit wird durch die suspendirten Theile in ein Communicationsgefäß verwandelt, aber in ein Communicationsgefäß und ein Röhrensystem, dessen Wände auf den Inhalt drücken. Die Flüssigkeit wird von unten nach oben durch das Röhrensystem durchgepreßt. Abgesehen von dem hydrostatischen Drucke nimmt in jedem solchen Röhrensystem die Pression in der Richtung der Strömung ab. (Vergl. Volkmann's Hämodynamik).

Es kann sich jetzt nur mehr um die quantitative Wirkung der suspendirten Theilchen handeln. Würden die Theilchen in *absoluter* Ruhe in der Flüssigkeit schweben,

so müßten sie ihren ganzen Druck äußern und wie gelöst wirken. In dem Maafse aber, als sie sich selbst und die Flüssigkeit bewegen, in dem Maafse als die Geschwindigkeitshöhe der strömenden Flüssigkeit größer wird, muß die Widerstandshöhe (der Druck) geringer werden. (Gesetz der Erhaltung der Kraft.)

Da nun in den meisten Fällen, in welchen man überhaupt experimentiren kann, die Theilchen *sehr langsam fallen*, wird man mit den gewöhnlichen Beobachtungsmitteln, ihre Wirkung so finden, als ob sie gelöst wären. Von einer Differenz zwischen Pyknometer und Aräometer kann theoretisch keine Rede seyn. Denn auch auf die Waage können die Theilchen nur in sofern wirken, als sie im Fallen gehindert sind. Woher also die Differenzen Brücke's rühren, welche doch keine Beobachtungsfehler seyn können, dieß zu entscheiden bin ich nicht in der Lage.

Experiment und Theorie führen demnach gemeinschaftlich zu dem Satze:

Fein und gleichförmig vertheilte, in einer Flüssigkeit suspendirte Theilchen afficiren das nach irgend einer Methode bestimmte specifische Gewicht und den Auftrieb desto mehr in derselben Weise wie gelöste Körper, je langsamer sie in der Flüssigkeit fallen oder steigen.

Ich schliesse diese Betrachtung in der Hoffnung, etwas zur Klärung der Frage beigetragen zu haben. Es würde mir natürlich sehr zur Befriedigung gereichen, wenn dadurch manche wichtige physiologische Untersuchungen, wie etwa die Bestimmung des specifischen Gewichtes der Blutkörperchen wieder angeregt würden. Endlich bitte ich noch um Nachsicht bei Beurtheilung meines ersten Versuches¹⁾.

1) Ich darf wohl nicht fürchten, der Gewährung dieser Bitte Eintrag zu thun, wenn ich hier an die frühere Arbeit von P. S. Girard erinnere (Siehe Annal. Bd. V (1825) S. 43), die sicher zu berücksichtigen gewesen wäre.