SUI GRUPPI CONTINUI
DI TRASFORMAZIONI CREMONIANE DEL PIANO
E SOPRA CERTI GRUPPI
DI TRASFORMAZIONI PROIETTIVE.

Nota di **Gino Fano**, in Roma.

Adunanza del 25 agosto 1895.

1. Il sig. Enriques ha dimostrato nella sua Nota: « *Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane del piano* » (*) che ogni gruppo continuo di trasformazioni birazionali piane (dipendente da un numero finito di parametri) può ridursi con un'ulteriore trasformazione birazionale (Cremoniana) a un gruppo di omografie, a un gruppo di trasformazioni quadratiche con due punti fissi, oppure a un gruppo di trasformazioni di J o n qui è r e s di un certo ordine n . E da questo risultato io ho dedotti alcuni teoremi relativi alle superficie algebriche che ammettono gruppi continui transitivi di trasformazioni proiettive in sé, e all'integrazione di talune equazioni differenziali lineari che (in un certo senso che fu a suo tempo stabilito) si possono rappresentare con curve contenute in tali superficie (**). Avendo ora nuovamente dimostrate, per queste superficie algebriche,

(*) Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5^a, vol. II, 1^o sem., pp. 468-473.

(**) Cfr. alcune mie Note inserite nei Rendiconti cit., ser. 5^a, vol. IV, 1^o sem., pp. 156, 324 e seg.

quelle stesse proprietà, senza ricorrere alla considerazione dei gruppi di trasformazioni birazionali del piano (*), mi propongo di mostrare come, inversamente, dalle proprietà stesse segua anche il risultato ottenuto dal sig. Enriques sui gruppi Cremoniani del piano (**).

Osserviamo perciò che per ogni gruppo continuo di trasformazioni birazionali del piano (dipendente da un numero finito di parametri—il che si intenderà anche sempre in seguito—) si possono costruire infiniti sistemi lineari di curve, ciascuno dei quali sia trasformato in sè da tutte le operazioni del gruppo. Basta infatti applicare ad una curva algebrica qualunque del piano tutte queste operazioni, e prendere, fra i sistemi lineari che contengono tutte le curve così ottenute (***), quello di dimensione minima, o anche il minimo fra i sistemi lineari *completi* (determinati cioè dai soli punti basi colle rispettive molteplicità) che contengono quelle stesse curve. Altri sistemi ancora possiamo costruire in modo affatto analogo, partendo da tutto un sistema (lineare o no) di curve, anzichè da una curva unica (****); di modo che, fra i sistemi lineari uniti che possiamo procurarci, ve ne saranno certo di quelli aventi una dimensione grande a piacere, e così pure di quelli in cui il passaggio di una curva per un punto generico del piano non porterà di conseguenza il passaggio della stessa curva per nessun altro punto determinato. Ma un sistema lineare di curve di dimensione ≥ 3 e soddisfacente a quest'ultima condizione rappresenta sempre una superficie razionale, riferibile biunivocamente al piano primitivo in modo che alle sue sezioni (iper)piane corrispondano le curve del sistema lineare considerato; e sopra questa superficie il gruppo proposto determinerà allora trasformazioni birazionali che muteranno in sè il sistema delle sezioni (iper)piane, dunque trasformazioni projective.

(*) Cfr. la mia Nota: *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projective in sè* (questi Rendiconti, t. X, p. 1).

(**) Cfr. a questo proposito quanto è detto in principio della mia Nota ultima cit.

(***) Qualcuno ve ne sarà certo; nell'ipotesi più sfavorevole, vi sarà almeno il sistema lineare di tutte le curve piane di ordine n , supposto che sia n appunto l'ordine della trasformata generica della curva data.

(****) Cfr. anche Enriques, l. c., pp. 468-469.

Concludiamo perciò:

Per ogni gruppo continuo ∞^k di trasformazioni Cremoniane di un piano si può costruire in infiniti modi diversi una superficie razionale con un gruppo continuo ∞^k di trasformazioni proiettive in sè, per modo che, rappresentando opportunamente questa superficie su quel piano, il gruppo proiettivo ∞^k dia luogo nel piano stesso al gruppo considerato di trasformazioni Cremoniane.

2. Ora, se questo gruppo ∞^k (nel piano o sulla superficie) è *transitivo*, noi potremo applicare il risultato ottenuto nella mia Nota prec. cit. (*), e riferire birazionalmente la superficie costruita a un nuovo piano, a una quadrica di S_3 , o a un cono razionale normale di un certo spazio S_{n+1} , in modo da avere ancora, sulla nuova superficie, un gruppo proiettivo. Se invece il gruppo ∞^k è *intransitivo*, o esso è contenuto in un gruppo più ampio e transitivo di trasformazioni proiettive della stessa superficie in sè, e allora le condizioni non saranno sostanzialmente mutate; oppure ciò non si verifica, ma allora le singole curve unite saranno esse stesse algebriche e razionali, e formeranno un fascio del pari razionale, sicchè a questo fascio risulterà applicabile il ragionamento già esposto al n° 3 della mia Nota ultima cit.

In ogni caso dunque si giunge a questo ulteriore risultato:

Dato ad arbitrio in un piano un gruppo continuo di trasformazioni Cremoniane, si può sempre riferire birazionalmente questo piano a un secondo piano, oppure a una quadrica di S_3 , o a un cono razionale normale di un certo spazio S_{n+1} , in modo che su quest'ultima superficie (nuovo piano, quadrica, o cono) il gruppo corrispondente a quello dato risulti costituito da trasformazioni proiettive.

E ora un ultimo passo. Nel primo caso — gruppo di omografie del piano — non vi è nulla da aggiungere. Ma nel secondo caso — gruppo di omografie sulla quadrica — possiamo ancora immaginare proiettata questa stessa quadrica da un suo punto sopra un piano non passante per questo punto (proiezione stereografica), con che il gruppo di omografie considerato verrà a mutarsi in un gruppo di trasformazioni

(*) Cfr. questi Rend., t. X, p. 1.

quadratiche del piano con due punti fissi (immagini delle generatrici della quadrica uscenti dal centro di proiezione) (*). Nel terzo caso infine, immaginando il cono di S_{n+1} proiettato anche su di un piano da un gruppo di $n - 1$ suoi punti posti sopra altrettante generatrici diverse, otterremo in questo piano un gruppo ∞^k ($k \leq n + 5$) di trasformazioni di Jonquières di ordine n (in generale almeno), che muteranno in sé il sistema delle curve di ordine n che hanno un dato punto $(n - 1)^{\text{plo}}$ (immagine del vertice del cono) e toccano ivi le stesse $n - 1$ rette (immagini dei piani tangenti al cono lungo le generatrici che contengono i vari centri di proiezione). E sempre questo nuovo piano potrà riferirsi birazionalmente a quello da cui siamo partiti, in modo che i due gruppi Cremoniani in essi rispettivamente considerati (il primo dei quali era affatto arbitrario) vengano a corrispondersi.

Ritroviamo così il teorema (**):

Ogni gruppo continuo di trasformazioni birazionali del piano può trasformarsi birazionalmente in uno dei tre tipi seguenti:

- 1° Gruppo ∞^8 delle omografie, e suoi sottogruppi;
- 2° Gruppo ∞^6 delle trasformazioni quadratiche che mutano in sé due fasci di raggi [ovvero: gruppo delle inversioni rispetto ai cerchi del piano (***)], e suoi sottogruppi;
- 3° Gruppo ∞^{n+5} (essendo n variabile) delle trasformazioni di Jonquières di ordine n che mutano in sé il sistema lineare ∞^{n+1} delle curve di ordine n con un dato punto $(n - 1)^{\text{plo}}$ e le relative $n - 1$ tangenti fisse, e suoi sottogruppi.

3. Colgo infine l'occasione di esser qui tornato sull'argomento, per completare qualche punto e rettificare qualche inesattezza in cui

(*) Fra le (∞^6) trasformazioni quadratiche di un piano con due certi punti fissi sono comprese naturalmente le ∞^4 trasformazioni proiettive cogli stessi punti fissi. Ci ridurremo a un gruppo di queste ultime soltanto, quando si abbia sulla quadrica un gruppo di omografie con un punto fisso (sulla superficie), e questo punto si scelga come centro di proiezione.

(**) Cfr. Enriques, l. c., p. 468.

(***) Quando i centri dei due fasci di raggi cadono precisamente nei punti ciclici.

sono incorso nella mia prima Nota: « *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè* » (*).

Anzitutto devo osservare che la frase di cui mi sono servito a p. 150 di questa Nota: « La proiettività (più generale) che ha « gli stessi punti uniti del gruppo in discorso, e che fa corrispondere fra loro due punti qualunque P e P' dello spazio S_r , muta « anche... » non è del tutto esatta, o almeno vuol essere chiarita; e tanto più volentieri adesso la chiarirò, in quanto che mi si presenterà così l'occasione di insistere sopra certe questioni, d'altronde semplicissime, relative a trasformazioni proiettive e gruppi di tali trasformazioni, delle quali ritengo non sia ancora stato fatto cenno in modo esplicito.

La frase testè riportata suppone implicitamente che una proiettività sia sempre individuata dai suoi punti, o meglio dai suoi elementi uniti, e da una coppia di punti omologhi (presi in modo generale). Nessun dubbio che ciò sussista quando i punti uniti [che supporremo per semplicità in numero finito (**)] sono tutti distinti (e quindi in numero di $r + 1$ in S_r). Ma quando questi stessi punti sono, almeno in parte, venuti a coincidere, bisogna ben precisare che cosa s'intenda per « elemento » unito. E se, come generalmente avviene, noi ci limitiamo a considerare i soli « elementi lineari » (ossia punti, e rette, piani, ecc., passanti per questi punti, ciascuno anche colla relativa molteplicità), allora quella proprietà non sussiste più. Nel piano ad es. vi sono ∞^3 (e non soltanto ∞^2) proiettività aventi un dato punto unito triplo e una data retta unita passante per questo punto; e due punti generici si corrispondono quindi in ∞^4 proiettività diverse aventi quegli stessi elementi uniti.

La stessa questione si collega anche a quest'altra. Finchè si tratta di omografie a punti uniti tutti distinti, è evidente che: *Due omografie appartenenti a una stessa piramide fondamentale (aventi cioè gli stessi elementi uniti) sono sempre permutabili fra loro.* Ma se quei punti non sono più tutti distinti, e nella piramide fondamentale si

(*) Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5^a, vol. IV, 1^o sem., pp. 149-156.

(**) E tali sono infatti sempre in qualunque spazio, il quale non sia a sua volta suddiviso in infiniti spazi inferiori uniti.

considerano i soli elementi lineari, il teorema non sussiste più. Anche i sigg. Klein e Lie, a pag. 1223 della loro prima Nota sulle curve e superficie W (*), hanno asserito che: *Les transformations linéaires qui laissent invariable un tétraèdre sont échangeables entre elles*, mentre poco prima (stessa pag.) avevano ammesso che: *Ce tétraèdre n'est pas nécessairement un tétraèdre proprement dit, mais un nombre quelconque de ces faces peuvent coïncider*. Resterebbe perciò a chiarire che cosa avviene precisamente in un tetraedro quando due o più facce di esso si fanno coincidere; e se gli Egr. AA. intendevano spingere la loro considerazione (com'è probabile) più in là dei soli elementi lineari (poichè in questo caso soltanto la loro asserzione risulterebbe esatta) non sarebbe forse stato superfluo l'accennarlo espressamente.—Astraendo per un momento dalla considerazione della piramide fondamentale, e fissandoci soltanto sulla permutabilità delle trasformazioni proiettive, possiamo riconoscere facilmente che: *Ogni proiettività (non ciclica) di uno spazio S_r , ovvero (il che fa lo stesso): Ogni gruppo continuo ∞^1 di trasformazioni proiettive [purchè non avente infiniti punti uniti (**)] appartiene a un determinato gruppo ∞^r (semplicemente transitivo) di proiettività permutabili, nel quale esiste una ed una sola operazione che fa corrispondere fra loro due punti generici dello spazio stesso S_r .*

Infatti le proiettività permutabili a quelle di un dato gruppo continuo ∞^1 (in S_r) devono trasformare in sè il sistema delle ∞^{r-1} traiettorie relative a questo gruppo. Supposto pertanto che ne esista un gruppo ∞^k dove $k \geq r-1$, vi sarà certo in quest'ultimo gruppo un sottogruppo continuo almeno ∞^{k-r+1} che trasformerà in sè una qualsiasi di quelle traiettorie. D'altra parte, nessuna curva può ammettere più di ∞^1 trasformazioni proiettive in sè fra loro permutabili; e, trattandosi qui di curve appartenenti allo spazio S_r (perchè

(*) Compt. Rend., t. LXX (1870).

(**) Le proiettività con infiniti punti uniti possono considerarsi come casi particolari di quelle che ne hanno soltanto un numero finito, e anzi in infiniti modi diversi. Corrispondentemente a questi diversi modi avremo pure vari gruppi ∞^r di omografie permutabili contenenti l'omografia o il gruppo ∞^1 proposto.

si è supposto di partire da un gruppo ∞^r con un numero finito di punti uniti), non è nemmeno possibile che per una trasformazione non identica siano uniti tutti i punti di una curva generica fra quelle ∞^{r-1} . Sarà perciò in ogni caso $k - r + 1 \leq 1$, ossia $k \leq r$. — D'altra parte tutte le omografie permutabili a un'omografia data o alle omografie di un dato gruppo (qui ∞^r) devono formare un gruppo unico (*); non vi potranno essere quindi nemmeno due diversi gruppi continui ∞^r di omografie permutabili a quelle del dato gruppo ∞^r , perchè se no il gruppo complessivo di queste omografie risulterebbe misto, mentre invece fra le schiere che concorrono a formare un gruppo misto una sola può (e deve) essere un *gruppo* continuo (**).

Che poi ogni gruppo continuo ∞^r di trasformazioni proiettive in S_r sia contenuto in (almeno) un gruppo ∞^r soddisfacente alle condizioni richieste di permutabilità, lo si prova facilmente, partendo dalle equazioni di quel gruppo, e assumendo in questo opportune funzioni dell'unico parametro come nuovi parametri indipendenti.

4. Rispetto a questi gruppi ∞^r di omografie permutabili in S_r devono essere uniti tutti gli ∞^{r-1} sistemi di ∞^{r-1} traiettorie che corrispondono ai loro vari sottogruppi ∞^1 . In particolare, ogni qual volta $\rho + 1$ degli $r + 1$ punti uniti ($1 \leq \rho \leq r$) sono venuti a coincidere, determinando così uno spazio unito S_ρ con questo solo punto unito, risulteranno del pari uniti tutti gli $\infty^{\rho-1}$ possibili sistemi di $\infty^{\rho-1}$ traiettorie dei punti di questo spazio; traiettorie che, come si vede subito integrando le relative equazioni differenziali, sono curve razionali normali di ordine ρ , aventi tutte a comune i $\rho + 1$ punti uniti infinitamente vicini (***). Ad es., in un gruppo ∞^2 di omografie piane permutabili con un solo punto unito triplo ($r = 2$) vi sono ∞^1 fasci di coniche uniti (traiettorie per i singoli sottogruppi ∞^1); e

(*) Perchè, se due operazioni sono permutabili a una terza, quest'ultima è anche permutabile al loro prodotto. Infatti da $AS = SA$, $BS = SB$, ossia $A^{-1}SA = B^{-1}SB = S$, segue $(AB)^{-1}S(AB) = B^{-1}A^{-1}SAB = B^{-1}SB = S$.

(**) Cfr. Lie: *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, p. 316.

(***) Il sig. Enriques, col quale ebbi occasione di discorrere dell'argomento, si era incontrato con me in quest'osservazione.

questi fasci costituiscono insieme una rete di coniche (del pari unita) avente tre punti basi infinitamente vicini (il sistema cioè delle coniche che hanno in un punto dato un dato cerchio osculatore) (*).

Alle omografie contenute in uno stesso di questi gruppi ∞^r si potrebbe quindi limitare esplicitamente la qualifica di « appartenenti alla stessa piramide fondamentale », osservando che ogni qual volta $\rho + 1$ punti uniti sono venuti a coincidere in un sol punto, risultano del pari uniti, nell'intorno di questo punto, non solo un elemento (infinitesimale) lineare, ma anche uno di secondo, uno di terzo, ... uno di ρ^{simo} ordine (determinati tutti da quelle certe traiettorie razionali di ordine ρ), e assumendo pertanto questi stessi elementi come facenti parte tutti della piramide fondamentale (degenerare). [Nell'esempio cit. per $r = 2$ è unito precisamente un elemento infinitesimale di 2° ordine, e quindi appunto la rete delle coniche (mutuamente osculatrici) che contengono quest'elemento]. *In questo senso soltanto* due omografie appartenenti alla stessa piramide fondamentale saranno sempre permutabili, e *un'omografia sarà sempre individuata dalla sua piramide fondamentale (ossia dai suoi elementi uniti dei vari ordini) e da una coppia di punti omologhi presi in modo generale.*

Nella mia frase cit. di pag. 150 sarà dunque opportuno mutare la parola « punti » in quella « elementi », e intendere quest'ultima nel senso più generale testè precisato.

5. In secondo luogo, dal teorema enunciato a pag. 152: *I soli gruppi continui proiettivi...* vanno escluse le superficie W che da un S_{r-4} unito del loro spazio (S_r) si proiettano in conì oppure (in un certo caso) in quadriche dello spazio ordinario. Infatti [riferendomi alla nota (1) di pag. 151] è vero bensì che, per avere (in S_3) l'equazione di una superficie W algebrica, dobbiamo porre una relazione lineare (a coefficienti in parte almeno arbitrari) tra sole funzioni algebriche o sole funzioni logaritmiche delle coordinate, carat-

(*) Cfr. pure, nel caso di $\rho = 3$, la Memoria del Prof. G. Pittarelli: *I gruppi continui proiettivi semplicemente infiniti*, ecc. (Annali di Mat., ser. 2^a, t. XXII); § 2, n° 5 (pp. 24-25).

terizzate sempre dal comportarsi additivamente rispetto alle operazioni del gruppo ∞^2 che si considera e che dà luogo a quella certa superficie W ; ma questa condizione può esser soddisfatta anche quando si presentino insieme funzioni dell'una e dell'altra specie (funzioni algebriche cioè, e funzioni logaritmiche), purchè soltanto le une oppure soltanto le altre compaiano effettivamente in quella relazione lineare (alle altre si dia cioè il coefficiente zero). Nel caso di omografie con un punto unito doppio o triplo avremo però equazioni che si potranno ridurre a contenere *tre* sole delle quattro coordinate omogenee; le nostre superficie saranno dunque coni; coni W di ordine qualunque nel primo caso, del tipo:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = \text{cost.},$$

dove $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ (le α essendo razionali); coni quadrici nel secondo caso, formanti un fascio del tipo:

$$x_2^2 - x_1 x_3 = C x_1^2.$$

Ma nel caso di *due punti uniti doppi*, scelto opportunamente il sistema di coordinate, come funzioni che si comportano additivamente rispetto alle operazioni da considerarsi, si potranno assumere le seguenti:

$$\log x_1, \quad \frac{x_2}{x_1}, \quad \log x_3, \quad \frac{x_4}{x_3};$$

e allora è chiaro che vi sarà qualche gruppo ∞^2 , quello p. e. di equazioni:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, & x'_3 &= \rho x_3 \\ x'_2 &= x_2 + \alpha x_1, & x'_4 &= \rho(x_4 + \alpha x_3) \end{aligned}$$

(ρ e α essendo i due parametri), per il quale risulteranno unite ∞^1 superficie del tipo:

$$A \frac{x_2}{x_1} + B \frac{x_4}{x_3} = C;$$

nel nostro caso precisamente le superficie :

$$\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_4}{x_3} = C,$$

ossia tutto un fascio di quadriche, la cui equazione può scriversi sotto la forma :

$$\lambda(x_2 x_3 - x_1 x_4) + \mu x_1 x_3 = 0$$

dove $\frac{\lambda}{\mu}$ è il parametro variabile; queste quadriche si toccano lungo la generatrice $x_1 = x_3 = 0$, e hanno ancora a comune le altre due generatrici (di sistema opposto alla prima) $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = x_4 = 0$. — Le quadriche si presentano dunque come superficie W tanto nel caso di quattro punti uniti distinti, quanto nel caso in cui questi punti coincidono a due a due (*).

Nel teorema cit. di p. 152 vanno dunque escluse le superficie W le cui proiezioni in S_3 danno luogo a questi casi speciali (**).

6. Sullo stesso teorema, nel quale ora ho introdotta questa restrizione, è basata anche (per quanto si riferisce alle superficie W) la dimostrazione del teorema successivo: *Ogni superficie algebrica*

(*) In quest'ultimo caso, in uno (soltanto) dei due sistemi di rette viene subordinato un gruppo ∞^1 di proiettività paraboliche. — Potrebbe però anche venir subordinato un gruppo parabolico in tutti due i sistemi di rette; ma allora un'omografia generale del gruppo ∞^2 ammetterebbe tutta una retta luogo di punti uniti, e un'altra retta inviluppo di piani uniti; l'una e l'altra variabile nel fascio delle due (sole) generatrici unite.

(**) Questi tre sono infatti i soli casi possibili di superficie W che appartengono allo spazio S_3 e corrispondono a gruppi ∞^2 coi punti uniti in numero finito, ma non tutti distinti (e perciò in numero di quattro) nè tutti coincidenti. Che se poi ogni omografia del gruppo ∞^2 avesse infiniti punti uniti (variabili anche da un sottogruppo ∞^1 all'altro), non si avrebbero (all'infuori dei piani) altre superficie W , che quadriche, e queste nel caso considerato alla fine della nota prec. In questo stesso caso il determinante caratteristico di un'omografia qualunque del gruppo ammetterebbe *una sola radice quadrupla*, che ne annullerebbe tutti i minori di 3° ordine, e potrebbe diventare, per omografie particolari, radice doppia anche di questi ultimi determinanti.

con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè è razionale (l. c., pp. 152-153). Si può tuttavia riconoscere facilmente che quest'ultima proposizione (della quale già ci è occorso di far uso nella Nota ultima inserita in questi Rendiconti) rimane vera in ogni caso.—Le superficie per le quali la dimostrazione data non rimane più valida si possono tutte proiettare in un cono razionale o in una quadrica dello spazio ordinario, di modo che, se questa proiezione fosse in ogni caso *semplice* (e perciò *univoca*), la loro razionalità risulterebbe ancora evidente; invece, per stare nell'ipotesi più generale, bisogna ammettere che questa stessa proiezione possa riescire comunque multipla (*). — Ma noi daremo qui del teorema una dimostrazione valida per ogni superficie W , ossia per ogni superficie con un gruppo transitivo ∞^2 di trasformazioni proiettive in sè fra loro permutabili. Noi dimostreremo precisamente che una tal superficie contiene sempre un fascio razionale di curve razionali; condizione che, per un teorema dovuto al sig. Noether, è appunto sufficiente per concluderne la razionalità della superficie stessa (**).

Sia data infatti una superficie W , che supporremo appartenere a uno spazio S_r ($r \geq 3$). Il gruppo ∞^2 di trasformazioni proiettive relativo a questa superficie ammetterà certo (almeno) un punto unito fisso e una retta (non luogo di punti uniti fissi) pure fissa e uscente da

(*) Ed ecco subito un esempio di superficie W che si proietta doppiamente in S_3 . — Una rigata razionale normale di S_3 con ∞^1 coniche direttrici si può considerare come superficie W per un gruppo ∞^2 di omografie a 6 punti uniti distinti, quattro dei quali cadono su di essa, nelle intersezioni di una determinata coppia di generatrici con una determinata coppia di direttrici coniche. E dalla (sola) retta unita non incidente ad essa questa superficie si proietta appunto in una quadrica doppia di S_3 , sulla quale rimane determinato per proiezione un gruppo ∞^2 di omografie con quattro rette unite (due per sistema). Le ∞^1 rette di uno dei due sistemi sono rispettivamente proiezioni di altrettante coppie di generatrici della rigata normale di 4° ordine; quelle dell'altro sistema sono, ciascuna contata due volte, proiezioni delle ∞^1 coniche della stessa rigata. In questo caso i punti uniti (sei in S_3 , quattro in S_3) sono tutti distinti; ma possiamo farli coincidere a due a due facendo avvicinare indefinitamente le due coniche unite sulla rigata normale.

(**) Cfr. la Mem.: *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Math. Ann., Bd. 3).

questo punto. Su questa retta il gruppo ∞^2 proposto non potrà subordinare che un gruppo ∞^1 di trasformazioni [perchè su di una punteggiata non si hanno gruppi ∞^2 di trasformazioni—proiettive, e anche non proiettive—fra loro permutabili (*)]; vi è dunque in quel gruppo ∞^2 un sottogruppo ∞^1 per cui sono uniti tutti i punti della retta considerata, e quindi tutti gli S_{r-1} di un certo fascio (α); saranno quindi unite, per lo stesso sottogruppo ∞^1 , le curve d'intersezione di questi S_{r-1} colla superficie proposta. In altri termini, queste stesse curve (o parti di esse) saranno le *trajettorie* del sottogruppo ∞^1 ; trajettorie che saranno certo *algebriche*, e quindi anche *razionali*. Vi è dunque sulla superficie proposta un fascio (β) di curve razionali. Dico ora che questo fascio è esso stesso razionale. Ciò è evidente se una curva generica di esso costituisce l'intersezione completa della superficie proposta con un S_{r-1} del fascio (α) (a meno, eventualmente, di una parte fissa). In ogni altro caso, questi stessi S_{r-1} determineranno nel fascio (β), considerato come ente ∞^1 , un'involuzione razionale (di grado > 1) unita rispetto alle ∞^1 trasformazioni che il gruppo proiettivo ∞^2 subordina in (β) medesimo; questo fascio sarà dunque un ente algebrico ∞^1 , con ∞^1 trasformazioni birazionali in sé che lasciano fissa un'involuzione razionale su di esso; sarà dunque certo razionale, come si voleva dimostrare (**).

(*) Cfr. ad es. Lie: op. cit., vol. III, p. 6.

(**) Questa Nota era già pronta per la stampa, quando nei Compt. Rend. de l'Ac. des Sc. (seduta del 29 luglio 1895) furono pubblicati alcuni risultati ottenuti dai sigg. Castelnuovo e Enriques sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni *birazionali* in sé; risultati che completano quelli già ottenuti precedentemente dal Picard (Journ. de Math., 1889; Compt. Rend., marzo 1895; questi Rend., giugno 1895). — Un gruppo di trasformazioni *birazionali* sopra una superficie equivale a un gruppo di trasformazioni *proiettive* ogni qual volta vi sia su di essa un sistema lineare di curve, semplice e almeno ∞^3 , unito rispetto a tutte le operazioni del gruppo; ma questo non avviene, naturalmente, che in casi particolari. Così appunto una superficie, la quale ammetta un gruppo ∞^2 di trasformazioni proiettive permutabili, è sempre razionale, mentre invece non lo è, in generale, se queste trasformazioni sono puramente birazionali, e non riducibili a proiettive. In quest'ultimo caso, approfondito in particolar modo dal Picard (superficie *iperellittiche*), il gruppo ∞^2 non contiene in generale sottogruppi ∞^1 algebrici.

7. Non ho bisogno poi di aggiungere che il ragionamento di pp. 154-155, nel quale ancora si parla di punti uniti tutti distinti o tutti coincidenti, è basato unicamente sul fatto, che deve sempre presentarsi uno di questi due casi estremi quando si tratta di gruppi ∞^1 *algebrici* (aventi cioè per traiettorie curve *algebriche*, e perciò *razionali*), ed è quindi affatto indipendente dal teorema di p. 152. Va ricordato soltanto che, nel caso di omografie con punti uniti multipli, il fatto di avere a comune questi punti e i diversi spazi uniti non porta ancora di conseguenza che queste omografie siano fra loro permutabili; ciò avviene tuttavia nel caso di *gruppi algebrici* ∞^2 *di tali omografie*, vale a dire: *Se una superficie algebrica ammette un gruppo transitivo* ∞^2 *di trasformazioni proiettive in sè ad elementi (lineari) uniti fissi, queste trasformazioni saranno fra loro permutabili, e la superficie sarà perciò una così detta superficie* W . Basta provarlo nel caso dei sottogruppi ∞^1 *algebrici* (perchè, se vi fosse un sottogruppo ∞^1 *trascendente*, la superficie ammetterebbe certo un gruppo ∞^2 di trasformazioni proiettive permutabili, e sarebbe perciò una W), e quindi (prescindendo dal caso ovvio dei punti uniti tutti distinti) nel caso di un solo punto unito $(r+1)^{pl}$ in S_r (poichè il caso di ∞^1 punti e ∞^1 spazi S_{r-1} uniti *fissi* condurrebbe a superficie contenute in spazi minori). Aggiungiamo che questo stesso teorema si può anche supporre vero per gli spazi inferiori a S_r , perchè è vero per $r=2$ [nel piano, infatti, come risulta subito dalla composizione del gruppo ∞^3 delle omografie con un dato punto e una data retta come elementi uniti tripli, ogni sottogruppo ∞^2 di tali omografie si compone di operazioni a due a due permutabili (*)].—Indicato pertanto

(*) Supposto che la retta unita sia la retta all'infinito, e che il punto unito sia il punto all'infinito dell'asse y , il gruppo ∞^3 da considerarsi si potrebbe ritenere generato dalle tre trasformazioni infinitesime:

$$X_1 f = q, \quad X_2 f = p, \quad X_3 f = xq,$$

dove $p = \frac{\partial f}{\partial x}$; $q = \frac{\partial f}{\partial y}$. La composizione di questo gruppo è data dalle equazioni:

$$(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_1$$

(cfr. Lie-Scheffers: *Vorlesungen über continuirliche Gruppen*, ecc., p. 571); ed è

con P il punto unito $(r + 1)^{p^1_0}$, e con (α) l'unico S_{r-1} unito (che passerà per questo punto), dovremo ancora distinguere due casi, secondo che il gruppo proposto subordina in (α) un gruppo anche ∞^2 , oppure soltanto ∞^1 . Nel primo caso le operazioni subordinate in (α) si potranno supporre a due a due permutabili, e da questo si trae facilmente che sono tali anche quelle in S_r . Nel secondo caso il gruppo proposto contiene quello ∞^1 delle omologie (speciali) $P(\alpha)$; e queste particolari operazioni sono permutabili a *tutte* quelle che hanno i dati elementi uniti colle relative molteplicità.

Pegli (Riviera di Ponente), luglio 1895.

GINO FANO.

pure noto (Lie: *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 716) che un gruppo ∞^3 avente questa composizione non contiene alcun sottogruppo ∞^2 *non invariante*; ma ne contiene ∞^1 di invarianti, determinati dalla trasformazione $X_1 f$ con una qualunque delle $\lambda X_2 f + \mu X_3 f$, e questi si compongono tutti di operazioni a due a due permutabili.