Über besondere symmetrische Punktsysteme zweiten Grades und Poncelet'sche Vierecke.

Von Karl Schober in Innsbruck.

Wenn in zwei conlocalen m - n -deutigen Elementensystemen $m = n$ wird, so bilden sie bekanntlich nach Weyr¹⁾ ein symmetrisches Elementensystem n^{ten} Grades²⁾, worin jedem Elemente n andere desselben Systems entsprechen.

Im Folgenden wird ein kleiner Beitrag zur Theorie der in dieser Weise definierten symmetrischen Elementensysteme geliefert; damit soll einerseits gezeigt werden, wie sich manches Bekannte von einem anderen Gesichtspunkte aus behandeln lässt, andererseits dürften die gefundenen Resultate auch einiges Neue enthalten.

Wir wollen nämlich diejenigen speciellen Punktsysteme zweiten Grades betrachten, welche auf einer Curve zweiter Ordnung durch Strahleninvolutionen ausgeschnitten werden, deren Scheitel nicht auf der Curve liegen.

1. Die Strahleninvolution werde zunächst als eine rechtwinklige vorausgesetzt.

Es sei C der gegebene Kegelschnitt und S der Scheitel der Involution J . Irgend zwei entsprechende Strahlen a und a' derselben schneiden C in den Punktepaaren A_1, A_2 , bzw. A_1', A_2' . Jedem der Schnittpunkte eines Strahles entsprechen die beiden

¹⁾ Die Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde (m - n -deutigen und symmetrischen Elementensysteme) ist bekanntlich von dem verstorbenen Professor Dr. Emil Weyr zu hoher Vollkommenheit entwickelt und mit viel Eleganz von ihm und später in analoger Weise auch von anderen*) in der Curventheorie verwertet worden. Von seinen zahlreichen dieses Gebiet betreffenden Arbeiten seien hier nur die fundamentalen Erstlingsarbeiten namentlich hervorgehoben: „Theorie der mehrdeutigen geom. Elementargebilde etc.“ Leipzig, 1869. — „Über algebraische Curven“ - Sitzungsberichte d. königl. b. Ges. d. W., Prag, 1869. — „Über Punktsysteme auf rationalen Curven.“ Ibid., 1873. — „Beiträge zur Curventheorie.“ Wien, 1880.

²⁾ Symmetrische oder involutorische Correspondenz $[n]$ nach Sturm, der sich wiederholt auf Weyr beruft. Vergl. R. Sturm. „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.“ I. Theil, Leipzig, 1892, pag. 16 ff.

*) So z. B. in neuester Zeit von W. Binder, „Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung.“ Leipzig, 1896.

Schnittpunkte des zu ihm normalen Strahles; es constituieren so mit die Schnittpunkte aller einander entsprechenden Strahlen von J auf C ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades σ , dessen Elemente sich zu Quadrupeln gruppieren.¹⁾ Die Directionscurve desselben ist ein Kegelschnitt Γ ; dieser berührt die Seiten der einfachen Vierecke, deren Ecken Quadrupel zusammengehöriger Punkte sind, und hat den Scheitel S der Strahleninvolution J zum Brennpunkte, denn die Diagonalen jedes solchen Viereckes sind zwei conjugierte und als ein zusammengehöriges Strahlenpaar von J auch zueinander normale Polaren von Γ .

Damit ist auf kurzem Wege ein schon von Poncelet²⁾ herstammender, jedoch auf wesentlich andere Art abgeleiteter Satz bewiesen worden, den wir folgendermaßen ausdrücken wollen:

Alle Sehnen eines Kegelschnittes C , welche aus einem beliebigen Punkte S seiner Ebene unter rechtem Winkel erscheinen, hüllen einen Kegelschnitt Γ ein, der jenen Punkt zum Brennpunkte hat.³⁾

2. Obwohl Γ durch eines der oben genannten Vierecke bereits vollkommen bestimmt ist, soll doch noch die directe Construction der Hauptachse besprochen werden.

Da jedes dem Directionskegelschnitte Γ umgeschriebene Viereck gleichzeitig dem Kegelschnitte C eingeschrieben ist, so ist S ein Eckpunkt und die Verbindungsgerade s der Schnittpunkte der Gegenseiten des Viereckes die gegenüberliegende Seite des den beiden Kegelschnitten C und Γ gemeinsamen Polardreieckes und, da S ein Brennpunkt von Γ ist, weiter s die entsprechende Directrix des letzteren. Es ist somit die Hauptachse von Γ normal zur Polaren des Punktes S in Bezug auf C .

Da für den Kegelschnitt C die Richtung von s conjugiert ist derjenigen des durch S gehenden Durchmessers UT , somit der dem letzteren conjugierte VW parallel s sein muss, so ist (unabhängig von s) die Hauptachse von Γ auch normal zu demjenigen Durchmesser von C , der dem durch S gehenden conjugiert ist.

Um die Scheitel von Γ zu erhalten, ermitteln wir dasjenige C ein- und Γ umgeschriebene Viereck, dessen eine Gegenseitenpaar zu s parallel ist; dies letztere steht auf der Hauptachse normal und schneidet auf ihr die Scheitel aus. Die Ecken dieses Viereckes sind diejenigen zwei Punktepaare, welche dem Punktsystem σ und der Involution gemeinsam sind, die auf C durch die zu s oder zum Durchmesser VW parallelen Secanten bestimmt

¹⁾ Symmetrische Correspondenz [2]. Man kann auch sagen, in der durch das Strahlenbüschel S auf C erzeugten Involution werden die Punktepaare in bestimmter Weise einander als entsprechend zugeordnet.

²⁾ „Traité des propriétés proj. des figures.“ Paris 1822, pag. 288.

³⁾ Vergl., diesen Satz betreffend, Salmon-Fiedler, „Analyt. Geometrie der Kegelschnitte.“ 5. Aufl., pag. 743, und O. Richter in „Zeitschrift f. Math. und Phys.“ 36. Jahrg., pag. 49.

ist. Diese zwei Punktpaare sind offenbar die Schnittpunkte der Normalstrahlen der Strahleninvolution, durch welche die zuletzt genannte Punktinvolution aus S projiciert wird, mit C .

Auf eine andere, in ihrer Ausführung einfachere Art können die Ecken jenes Viereckes auch folgendermaßen erhalten werden. In der durch den Kegelschnitt C auf s bestimmten Involution ist der Schnittpunkt der convergenten Seiten des in Rede stehenden Viereckes das Centrum O , da der entsprechende Punkt als Schnittpunkt der zu s parallelen Gegenseiten im Unendlichen liegt; dasselbe ist aber auch der Schnittpunkt des zu s conjugierten Durchmessers von C mit s . Wird nun um O als Mittelpunkt der Kreis beschrieben, welcher durch S geht, so schneidet dieser s in zwei Punkten, deren Verbindungsgeraden mit S aufeinander normal stehen und auf C die Ecken des verlangten Viereckes ausschneiden.

Noch eine andere Ermittlung der Hauptachse von Γ ist später in Art. 12 besprochen.

3. Alle durch Quadrupel zusammengehöriger Punkte unseres Systems σ auf C bestimmten Vierecke sind dem Kegelschnitte C eingeschrieben und gleichzeitig dem Directionskegelschnitte Γ umgeschrieben; sie sind demnach Poncelet'sche Polygone. Die bekannten Sätze¹⁾ über solche Polygone sind hier und weiter unten für den vorliegenden besonderen Fall ohneweiters evident.

Die Berührungspunkte je zweier Gegenseiten eines solchen Viereckes mit Γ ergeben sich als die Schnittpunkte der Normalen, die im Punkte S auf die Verbindungsgerade derselben mit dem auf s gelegenen Schnittpunkt X der betreffenden Gegenseiten errichtet wird, mit den letzteren.

4. Wir wollen nun das Punktsystem σ und seine Directionscurve Γ näher untersuchen. Die Art desselben, bzw. seine Eigenschaften, ferner die Gestalt der Directionscurve Γ und ihre Beziehungen zum Fundamentalkegelschnitt C sind von der Lage des Scheitels S der Strahleninvolution J in Bezug auf C und der Beschaffenheit von J abhängig.

Zunächst ist sofort klar, dass σ keine reellen sich selbst entsprechenden Punkte oder Coincidenzen²⁾ enthalten kann, weil eine rechtwinklige Strahleninvolution elliptisch ist, also keine reellen Doppelstrahlen besitzt; daher haben C und Γ auch keine gemeinschaftlichen Tangenten.

5. Der Scheitel S der Strahleninvolution J liege innerhalb C .

Dann enthält, weil keine reellen Tangenten aus S an C möglich sind, σ keine reellen Doppelpunkte³⁾, somit auch

¹⁾ Zu den zahlreichen bekannten Arbeiten über Poncelet'sche Polygone kam jüngst als beachtenswert hinzu: G. Kohn, „Über räumliche Poncelet'sche Polygone“, Sitzungsberichte der k. Ak. d. W., Bd. CVI, 1897.

²⁾ Nach Weyr „Doppelpunkte erster Art.“

³⁾ Nach Weyr „Doppelpunkte zweiter Art.“

keine reellen Verzweigungspunkte; daher können C und Γ in diesem Falle einander nicht schneiden. Daraus folgt weiter, dass Γ innerhalb C liegen und eine Ellipse muss sein, wenn C eine Ellipse, Parabel oder spitzwinklige Hyperbel ist, hingegen eine Hyperbel, wenn C eine stumpfwinklige Hyperbel ist. Dass bei der Hyperbel zwei Fälle zu unterscheiden sind, hat darin seinen Grund, dass auf der spitzwinkligen Hyperbel das System σ solche Quadrupel zusammengehöriger Punkte enthalten muss, welche auf einem und demselben Curvenaste liegen, so dass die entsprechenden Γ umgeschriebene Vierecke innerhalb des nämlichen Astes geschlossen sind, was bei einer stumpfwinkligen Hyperbel niemals der Fall sein kann; dort liegen vielmehr stets ein oder zwei Punkte auf dem andern Ast. Ein dritter möglicher Fall, die gleichseitige Hyperbel betreffend, wird weiter unten im Art. 10 besprochen.

Liegt S auf einer Achse von C , so fällt mit derselben die Hauptachse von Γ zusammen; ihre Endpunkte werden durch die Punkte von σ bestimmt, welche von den unter 45° gegen die Achse geneigten Strahlen von J auf C ausgeschnitten werden. Dies gilt natürlich auch für den Fall, dass S außerhalb C liegt, was später nicht mehr berührt werden soll.

Fällt S mit einem Brennpunkte von C zusammen, dann haben Γ und C diesen Brennpunkt und die entsprechende Directrix gemeinsam und sind einander für den Brennpunkt als Centrum und die Directrix als Achse in zweifacher Art collinear.

Ist C eine Ellipse und fällt S mit dem Mittelpunkte derselben zusammen, so ist s mit der unendlich fernen Geraden identisch. Dann wird Γ ein mit der Ellipse concentrischer Kreis, und alle Poncelet'schen Vierecke werden Parallelogramme, sämmtlich Rhomben bis auf ein Quadrat. Sind a und b die Halbachsen der Ellipse C , so ist der Radius des Kreises Γ

$$\rho = \frac{a b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Wenn C ein Kreis und S ein beliebiger innerhalb desselben gelegener Punkt ist, dann ist Γ eine Ellipse, deren Hauptachse in den durch S gehenden Durchmesser des Kreises fällt, und deren Scheitel durch die gegen diesen Durchmesser unter 45° geneigten Strahlen der Involution J bestimmt sind. Ist r der Radius des Kreises C und $2e$ die Entfernung seines Mittelpunktes von S ($2e < r$), so ergibt die Rechnung für die halbe Hauptachse der Ellipse Γ den Wert

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{2(r^2 - 2e^2)}$$

und lehrt auch, dass der Mittelpunkt des Kreises der zweite Brennpunkt von Γ ist.

Fällt endlich S mit dem Mittelpunkte des Kreises C zusammen, so ist Γ ein mit C concentrischer Kreis mit dem Radius

$$\rho = \frac{r}{2} \sqrt{2}.$$

Die vorangehenden speciellen Fälle liefern noch eine Reihe metrischer Relationen, auf die jedoch hier nicht weiter eingegangen wird.

6. Der Scheitel S der Strahleninvolution J liege außerhalb C .

Dann wird durch J ein Punktsystem σ auf C offenbar nur dann bestimmt werden können, oder es wird möglich sein, dass zwei einander entsprechende Strahlen von J gleichzeitig C schneiden, wenn S zwischen C und dem Orte K der Punkte liegt, aus denen an C zueinander normale Tangenten gezogen werden können, also bei der Ellipse innerhalb, bei der spitzwinkligen Hyperbel außerhalb des bekannten mit C concentrischen Kreises K und bei der Parabel zwischen Directrix und Curve. Auf der stumpfwinkligen Hyperbel hingegen, für welche K imaginär ist, wird unter allen Umständen durch J ein System σ erzeugt.

In diesem Falle enthält σ auf C zwei reelle Doppelpunkte und vier reelle Verzweigungspunkte und zwar sind die ersteren die Berührungspunkte T_1 und T_2 der Tangenten t_1 und t_2 , welche aus S an C gelegt werden können, und die letzteren die Schnittpunkte V_1, V_2 und V_3, V_4 der Normalstrahlen t_1' und t_2' , welche den beiden Tangenten t_1, t_2 in J entsprechen, mit C . Die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte mit den entsprechenden Verzweigungspunkten T_1 mit V_1, V_2 und T_2 mit V_3, V_4 sind Tangenten der Directionscurve Γ und die Verzweigungspunkte ihre Berührungspunkte. Es schneiden somit Γ und C einander in vier reellen Punkten.

Mit Rücksicht auf die Entstehung und das Wesen der Doppelpunkte eines symmetrischen Punktsystems ergibt sich für unser specielles System σ , dass jeder der beiden Doppelpunkte T_1 und T_2 doppelt zu zählen ist, da durch jeden derselben zwei Tangenten von Γ hindurchgehen. Ihre Verbindungsgerade ist die dem Brennpunkte S entsprechende Directrix s von Γ .

Während in dem früheren Falle, wo S innerhalb C liegt, jeder Punkt von C ein Element des Systems σ sein muss, ist dies hier nicht möglich, sondern es besitzt C in diesem Falle parasitische Theile, deren Punkte dem System σ nicht angehören können; dies sind offenbar diejenigen Bogen von C , welche innerhalb Γ liegen. Reelle Elemente von σ enthalten nur die außerhalb Γ gelegenen Theile von C ; dieselben werden von zwei zusammengehörigen Verzweigungspunkten begrenzt und enthalten den nicht entsprechenden Doppelpunkt.

7. Zwischen den Tangenten von Γ in den Verzweigungspunkten V_1, V_2, V_3, V_4 existiert eine interessante Beziehung, welche wert sein dürfte, etwas eingehender besprochen zu werden.

Diese vier Tangenten $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ bilden ein vollständiges Vierseit, das die Doppelpunkte T_1 und T_2 zu Gegenecken hat, und dessen andere zwei Gegeneckenpaare X_1, X_2 und Y_1, Y_2 auf

je einem Strahle x , bezw. y , der Involution J liegen müssen. Denn ist, um für das Paar X_1, X_2 den Nachweis zu liefern, G der Schnittpunkt des Strahles t_1' von J , welcher auf C die Verzweigungspunkte V_1, V_2 ausschneidet, mit s , so bilden die Punkte S, V_1, G, V_2 eine harmonische Reihe, deren Projection aus T_1 auf den durch X_1 gehenden Strahl x von J die harmonische Reihe S, X_1, X, X_2 ist, darin X der Schnittpunkt von x mit s . In analoger Weise wird durch Projection der auf t_2' gelegenen harmonischen Reihe S, V_3, H, V_4 aus T_2 auf x die harmonische Reihe S, X_1, X, X_2' erhalten; darin muss offenbar der Punkt X_2' mit dem früheren X_2 , dem Schnittpunkte der Tangenten τ_2 und τ_4 identisch sein. Ebenso bilden auf y die Punkte S, Y_1, Y, Y_2 eine harmonische Reihe, worin Y der Schnittpunkt von y mit s ist.

Aus dieser Beziehung der Gegeneckenpaare X_1, X_2 und Y_1, Y_2 des oben genannten Tangentenvierseites von Γ zum Punkte S und seiner Polaren s in Bezug auf C folgt, dass jedem der einfachen Vierecke $X_1 T_1 X_2 T_2$ und $Y_1 T_1 Y_2 T_2$ ein Kegelschnitt C_1' , bezw. C_2' umgeschrieben werden kann, welcher der Fundamentalkegelschnitt C in den beiden Doppelpunkten T_1 und T_2 des Systems σ berührt. C_1' und C_2' sind somit zwei einander doppelt-berührende Kegelschnitte mit S und s als gemeinsamem Pol und gemeinsamer Polaren.

Beachten wir, dass jede der oben genannten harmonischen Reihen auf x und y aus der anderen durch Projicieren aus T_1 , bezw. T_2 erhalten wird, so erkennen wir C_1' und C_2' als zwei einander conjugierte¹⁾ oder harmonisch zugeordnete²⁾ Kegelschnitte für S als Centrum und s als Achse der Conjunction.

Bekanntlich gibt es unendlich viele andere Kegelschnitte, deren jeder den beiden conjugierten Kegelschnitten C_1' und C_2' gleichzeitig conjugiert ist und dieselben in denjenigen zwei Punktepaaren doppelt berührt, welche auf zwei entsprechenden Strahlen der durch C_1' und C_2' in S bestimmten Strahleninvolution liegen. Zu diesen unendlich vielen Kegelschnitten gehört insbesondere auch derjenige C_3' , welcher C_1' in X_1, X_2 und C_2' in Y_1, Y_2 berührt. Derselbe ist somit dem dritten in dem vollständigen Vierseit der Tangenten $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ von Γ enthaltenen einfachen Vierecke der Gegenecken X_1, Y_2, X_2, Y_1 umgeschrieben; seine gemeinsamen Tangentenpaare x_1, x_2 mit C_1' und y_1, y_2 mit C_2' schneiden einander in X , bezw. Y . Das Dreieck SXY ist offenbar das den drei paarweise conjugierten Kegelschnitten gemeinsame Polardreieck; dasselbe muss identisch sein mit dem Polardreieck, welches dem Fundamentalkegelschnitt C und dem Directionskegelschnitt Γ gemeinsam ist. Denn das gemeinsame Polardreieck von C und Γ muss als Diagonaldreieck des vollständigen Viereckes $V_1 V_2 V_3 V_4$ der Schnittpunkte von C und Γ zusammenfallen mit dem Diagonal-

¹⁾ Wiener Chr., „Darstellende Geometrie,“ I. Theil, pag. 315 ff.

²⁾ Steiner-Schröter, „Theorie der Kegelschnitte etc.,“ 2. Aufl., pag. 383 ff.

dreiseit des vollständigen Vierseites der Tangenten von Γ in jenen vier Punkten, also unseres Tangentenvierseites $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4$; das ist aber nach dem Vorausgehenden das Dreiseit $s y x$ oder das Dreieck SXY .

Diese Eigenschaft steht übrigens in innigstem Zusammenhange mit einer Beziehung zwischen dem Kegelschnitt Γ und jedem der drei einander conjugierten C_1', C_2', C_3' .

8. Aus den vorangegangenen Erörterungen ist nämlich ersichtlich, dass die drei in dem vollständigen Vierseit $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4$ (der Tangenten von Γ in den Verzweigungspunkten des Systems σ) enthaltenen einfachen Vierecke $X_1 T_1' X_2 T_2', Y_1 T_1' Y_2 T_2', X_1 Y_1 X_2 Y_2$ der Gegeneckenpaare entsprechend den Kegelschnitten C_1', C_2', C_3' eingeschrieben und gleichzeitig Γ umgeschrieben sind; dieselben stellen somit für die Kegelschnittpaare $\Gamma C_1', \Gamma C_2', \Gamma C_3'$ Poncelet'sche Vierecke vor.¹⁾

Nach einem bekannten Poncelet'schen Satze sind durch diese Kegelschnittpaare weiter drei Gruppen von unendlich vielen Vierecken bestimmt, welche Γ umgeschrieben und gleichzeitig je einem der C_1', C_2', C_3' eingeschrieben sind. Unter allen Poncelet'schen Vierecken jeder solchen Gruppe ist das entsprechende von den drei oben genannten ein besonderes, nämlich von der Art, dass seine Ecken ein Quadrupel harmonischer Punkte des zugehörigen Kegelschnittes bilden. Dies erhellt aus den Erörterungen des vorigen Artikels, wonach beispielsweise das Quadrupel $T_1' X_1 T_2' X_2$ auf C_1' durch Projicieren der harmonischen Reihe $SX_1 XX_2$ aus T_1' erhalten wird, und hat uns ja dazu geführt, C_1', C_2', C_3' als drei harmonisch conjugierte Kegelschnitte zu erkennen.

9. Der Directionskegelschnitt Γ des symmetrischen Punktsystems σ bestimmt auf jedem der drei Kegelschnitte C_1', C_2', C_3' ebenfalls ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades, dessen Elemente sich zu Quadrupeln gruppieren und die Ecken der entsprechenden Poncelet'schen Vierecke sind. Die Diagonalen aller einer Gruppe angehörigen Vierecke schneiden einander in einem Eckpunkte des allen Kegelschnitten gemeinsamen Polardreieckes SXY , was sich sofort aus der Betrachtung des in dieser Gruppe vorkommenden Viereckes des harmonischen Quadrupels ergibt, dessen Diagonalen zwei Seiten jenes Polardreieckes sind; daraus folgt weiter, dass jedes dieser drei Systeme auch als Schnitt des bezüglichen Kegelschnittes mit einem involutorischen Strahlenbüschel

¹⁾ Jeder der drei einem der genannten Poncelet'schen Vierecke umgeschriebenen Kegelschnitte C_1', C_2', C_3' ist gleichzeitig einem einfachen Vierseit $(x_1 t_1 x_2 t_2, y_1 t_1 y_2 t_2, x_1 y_1 x_2 y_2)$ eingeschrieben, und zwar werden die letzteren gebildet von je zwei Gegenseitenpaaren des vollständigen Viereckes, in dessen Ecken sich je drei gemeinsame Tangenten der C_1', C_2', C_3' schneiden. Dieses vollständige Viereck ist dem oben wiederholt genannten vollständigen Tangentenvierseit conjugiert in Bezug auf jeden der drei Kegelschnitte, woraus eine Reihe bekannter Eigenschaften der conjugierten Kegelschnitte folgt, deren wichtigste wohl die ist, dass jeder sich selbst conjugiert ist in Bezug auf die beiden andern. Vergl. Wiener und Steiner-Schröter, l. c.

(der Diagonalenpaare) erhalten wird, dessen Scheitel der entsprechende (innerhalb des Kegelschnittes gelegene) Eckpunkt des Dreieckes SXY ist.

Zwischen diesen drei neuen Systemen, ebenso zwischen ihnen und dem ursprünglichen System σ besteht eine Reihe von Beziehungen, welche naturgemäß in dem Zusammenhange ihrer Trägerkegelschnitte untereinander und mit dem Directionskegelschnitte Γ wurzeln.¹⁾ Doch wollen wir an dieser Stelle nicht weiter darauf eingehen, sondern nur noch erwähnen, dass die drei neuen Systeme keine Verzweigungspunkte, somit auch keine Doppelpunkte aufweisen, dass aber zwei derselben und zwar jene auf C_1' und C_2' Coincidenzen besitzen, nämlich die Berührungspunkte der reellen gemeinschaftlichen Tangenten derselben mit Γ . Die zwei Paare von Berührungssehn, welche durch X , bzw. Y , gehen müssen, stellen dann mit den zugehörigen Tangenten für C_1' , bzw. C_2' , je zwei degenerierte Poncelet'sche Vierecke vor, worin sowohl für den betreffenden Kegelschnitt als auch für Γ die Berührungssehne doppelt zählt. Das dritte System, jenes auf C_3' , enthält keinerlei singuläre Elemente, ist also von ähnlicher Art wie das in Art. 5 besprochene; die dasselbe erzeugende Strahleninvolution ist conlocal mit derjenigen, welche σ auf C bestimmt. Während in diesem System, bzw. für seinen Trägerkegelschnitt C_3' ebenso wie für den Fundamentalkegelschnitt C jede beliebige Tangente von Γ als Anfansseite eines zu bildenden Poncelet'schen Viereckes gewählt werden kann, ist dies für C_1' und C_2' nicht möglich; denn für diese Fälle besitzt Γ zwischen den Berührungspunkten der gemeinschaftlichen Tangenten mit C_1' und C_2' parasitische Theile, deren Tangenten C_1' , bzw. C_2' , nicht in reellen Punkten schneiden.

Fassen wir nun die wichtigsten Resultate zusammen, die sich aus den Entwicklungen der letzten Artikel ergeben, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

Die Tangenten, welche in den vier Verzweigungspunkten eines auf einem Kegelschnitte C durch eine rechtwinklige Strahleninvolution²⁾ mit außerhalb der Curve liegendem Scheitel erzeugten symmetrischen Punktsystems zweiten Grades an den Directionskegelschnitt Γ desselben gezogen werden können, bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Gegeneckenpaare

¹⁾ Ist z. B. C_1' der mit C in Bezug auf die beiden Tangenten t_1 und t_2 aus S gleichartig liegende Kegelschnitt, so wird auf demselben durch die Involution J ein symmetrisches Punktsystem σ' ausgeschnitten, das mit σ auf C die Doppelpunkte T_1 und T_2 gemeinsam hat und mit ihm für S als Centrum und s als Achse collinear ist. Daraus ergibt sich weiter, dass die Directionscurve Γ' von σ' collinear sein muss mit Γ , ebenso auch die hier auftretenden harmonisch conjugierten Kegelschnitte entsprechend mit den früheren u. s. w.

²⁾ Es sei schon hier bemerkt, dass dieser Satz auch in dem allgemeinen Falle gilt, wenn die Strahleninvolution J nicht rechtwinklig, sondern eine beliebige (ellipt. oder hyperb.) ist, worin die Tangenten t_1 , t_2 von C zwei beliebige Strahlen und t_1' , t_2' die ihnen entsprechenden sind.

zu je zweien auf drei Kegelschnitten C_1', C_2', C_3' liegen, von denen zwei, C_1', C_2' , den Fundamentalkegelschnitt C in den Doppelpunkten des Punktsystems als dem einen Gegeneckenpaare und den dritten, C_3' , in den beiden übrigen Gegeneckenpaaren des Vierseites berühren. Diese drei Kegelschnitte C_1', C_2', C_3' bilden ein Tripel (reeller) conjugierter Kegelschnitte, deren gemeinsames Polardreieck mit jenem der beiden Kegelschnitte C und Γ identisch ist; jeder von ihnen bestimmt (wie auch C) mit dem Directionskegelschnitte Γ eine Gruppe von unendlich vielen Poncelet'schen Vierecken, unter denen diejenigen drei, welche einem und demselben (dem oben genannten) Tangentenvierseit von Γ angehören, Ecken besitzen, die auf dem entsprechenden der umgeschriebenen Kegelschnitte C_1', C_2', C_3' je ein harmonisches Quadrupel bilden.

10. Was die Gestalt des Directionskegelschnittes Γ in dem Falle betrifft, wo S außerhalb C liegt, so folgt schon aus Art. 6, dass Γ eine Hyperbel sein wird, wenn C eine Ellipse, Parabel oder spitzwinklige Hyperbel ist, hingegen eine Ellipse, wenn C eine stumpfwinklige Hyperbel ist; das letztere kann auch daraus geschlossen werden, dass in diesem Falle niemals zwei Gegenseiten eines Γ umgeschriebenen einfachen Vierseites durch s getrennt werden können.

Da die gleichseitige Hyperbel den Übergang von der spitzwinkligen zur stumpfwinkligen bildet, darf wohl angenommen werden, dass für dieselbe der Directionskegelschnitt Γ in entsprechender Weise den Übergang von der Ellipse zur Hyperbel bilden, also eine Parabel sein wird und zwar sowohl, wenn der Punkt S innerhalb als auch wenn er außerhalb C liegt.

Direct folgt dies daraus, dass die Parallelen durch S zu den Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel zwei einander entsprechende Strahlen der Rechtwinkelinvolution J sind, weshalb die beiden unendlich fernen Punkte der Hyperbel zwei entsprechende Elemente von σ bilden; daher ist die unendlich ferne Gerade als die Verbindungslinie jener zwei Punkte eine Tangente des Directionskegelschnittes Γ und dieser somit eine Parabel.

Es ist auch ohneweiteres einleuchtend, dass die Verbindungsgerade der im Endlichen gelegenen zwei Schnittpunkte der Hyperbel mit den zu den Asymptoten parallelen Strahlen der Involution J als Gegenseite der unendlich fernen Geraden im entsprechenden Poncelet'schen Viereck die Scheiteltangente der Parabel sein muss, dass ferner die Gegenseiten aller hier auftretenden Poncelet'schen Vierecke zu einander normal sind, denn ihre Schnittpunkte liegen auf s , der Directrix der Parabel.¹⁾ Das Letztere erhellt auch daraus, dass

¹⁾ Deshalb sind auch, wenn S außerhalb C liegt, die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte mit den entsprechenden Verzweigungspunkten zueinander normal.

je drei von den Punkten eines Quadrupels des auf der gleichseitigen Hyperbel liegenden Systems σ die Ecken eines Dreieckes bilden, dessen Höhenschnittpunkt der vierte ist; in diesen Dreiecken sind die beiden einander entsprechenden Strahlen von J und je zwei Gegenseiten des durch jene bestimmten, der Hyperbel eingeschriebenen einfachen Viereckes je eine Seite und die zugehörige Höhe, ferner ist S einer der drei Höhenfußpunkte.

Sind in irgend einem solchen Dreiecke neben S , dem Scheitel der das System σ erzeugenden Involution J , S' und S'' die beiden anderen, auf s gelegenen Höhenfußpunkte, so kann jeder derselben als der Scheitel einer rechtwinkligen Strahleninvolution J' , bzw. J'' , betrachtet werden, welche auf C ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades σ' , bzw. σ'' , erzeugt, welche beide mit dem ursprünglichen System σ ein Quadrupel, nämlich das von den Ecken und dem Höhenschnittpunkte jenes Dreieckes gebildete, gemeinsam haben. Daraus ergibt sich eine interessante Beziehung zwischen den entsprechenden drei Parabeln, womit wir uns an anderem Orte eingehender befassen wollen.

Aus den weiter oben stehenden Erörterungen dieses Artikels folgt noch ein (zum Theil in anderer Form Bekanntes enthaltender) Satz über Dreiecke, welche einer gleichseitigen Hyperbel eingeschrieben sind:

Werden einer gleichseitigen Hyperbel Dreiecke eingeschrieben, die einen nicht auf der Curve gelegenen Punkt S als gemeinsamen Höhenfußpunkt besitzen, so liegen die Paare der anderen Höhenfußpunkte S' , S'' alle auf einer Geraden s , welche die Polare des gemeinsamen Höhenfußpunktes in Bezug auf die Hyperbel ist. Die nicht durch S gehenden Seiten und Höhen aller jener Dreiecke hüllen eine Parabel ein, welche S zum Brennpunkte und s zur Directrix hat.

11. In dem Grenzfall, wo der Scheitel S der Rechtwinkelinvolution J auf dem Orte K der Punkte liegt, aus denen an C zwei zueinander normale Tangenten gezogen werden können, reducirt sich σ auf die beiden Berührungspunkte derselben, in denen Doppelpunkte und Verzweigungspunkte zusammenfallen, und Γ auf die doppelt zu zählende Polare s von S .

Der Fall endlich, wo S auf C selbst liegt, führt zu keinem Punktsystem σ , sondern nur zu einer Involution i auf C . Wenn wir ihm dennoch an dieser Stelle einige Aufmerksamkeit schenken, so sei dies mit Rücksicht auf die große Einfachheit gestattet, mit der aus ihm etliche Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel abgeleitet werden können, von denen manche weniger oder nicht bekannt sein dürften, während andere sonst auf einem von diesem verschiedenen Wege erhalten werden.¹⁾

¹⁾ Vergl. bezüglich mehrerer Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel auch E. Czuber, „Über die einem Kegelschnitte umgeschriebenen Kreisvierecke“ im Archiv für Math. u. Phys., II. R., 9. Thl., pag. 103 ff.

Eine rechtwinklige Strahleninvolution J , deren Scheitel S auf einem Kegelschnitt C liegt, schneidet auf diesem eine Involution i aus, deren Centrum N bekanntlich ¹⁾ der Schnittpunkt der Normalen n von C im Punkte S mit demjenigen Durchmesser d_n ist, der zu dem durch S gehenden d_s in Bezug auf die Achsen symmetrisch liegt. Hiebei können wir auch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der Involution i als diejenigen Sehnen von C betrachten, welche von S aus unter rechtem Winkel erscheinen, oder als die Hypotenusen derjenigen rechtwinkligen Dreiecke, welche C eingeschrieben sind und in S den Scheitel des rechten Winkels haben.

Ist nun C eine gleichseitige Hyperbel, so fällt für jede beliebige Wahl des Punktes S das Centrum N der Involution i mit dem unendlich fernen Punkte der Normale n zusammen, weil das der Hyperbel eingeschriebene rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten zu den Asymptoten parallel sind, die unendlich ferne Gerade zur Hypotenuse hat; das Büschel N der Sehnen, welche entsprechende Punkte von i verbinden, ist somit in diesem Falle ein Parallelstrahlenbüschel. Daraus ergibt sich der Satz:

Alle Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel, welche von irgend einem ihrer Punkte unter rechtem Winkel erscheinen, sind parallel zur Normalen in diesem Punkte.

Da die Normalen einer Hyperbel nur zu reellen Durchmessern parallel sein können, sind unter den parallelen Sehnen auch nur solche von diesen Richtungen verstanden. Unter ihnen befindet sich auch ein Durchmesser d_n , der zu dem durch S gehenden d_s in Bezug auf die Achsen symmetrisch liegt; daraus folgt:

Normale und Durchmesser für einen beliebigen Punkt der gleichseitigen Hyperbel sind gegen die Achsen unter gleichen aber entgegengesetzt bezeichneten Winkeln geneigt; und daraus weiter:

Die Subnormale für jeden Punkt der gleichseitigen Hyperbel ist gleich der Abscisse.

Aus der durch die Parallelverschiebung der Sehnen hervorgerufenen Drehung des rechten Winkels um S ist zu erkennen:

Aus einem Punkte einer gleichseitigen Hyperbel erscheinen solche Bogen derselben, welche zwischen beliebigen zwei, zur Normalen jenes Punktes parallelen Sehnen liegen, unter gleichen Winkeln.

Da die Normale n' in S' , dem zweiten Endpunkte des durch S gehenden Durchmessers d_s , parallel ist zu jener n in S , so werden offenbar alle oben genannten parallelen Sehnen auch von S' aus unter rechtem Winkel gesehen. Wir können somit sagen:

Der über einer (zu einem reellen Durchmesser parallelen) Sehne als Durchmesser beschriebene Kreis schneidet die gleichseitige Hyperbel in zwei Punkten, in denen die Normalen parallel sind zu

¹⁾ Poncelet, „Traité des propriétés etc.“, pag. 280.
Steiner, „Gesammelte Werke“, 2. Bd., pag. 432.

jener Sehne. Diese beiden Punkte sind die Endpunkte desjenigen Durchmessers, der gegen die Achsen unter gleichen aber entgegengesetzt bezeichneten Winkeln geneigt ist wie die Sehne; es sind somit die Halbierungsgeraden der von Sehne und Durchmesser gebildeten Winkel der Achsenrichtungen.

Alle Kreise, welche durch die Endpunkte S, S' eines Durchmessers der gleichseitigen Hyperbel gehen, bilden ein Büschel, dessen Centrale conjugiert ist der Richtung der zu den Normalen der Curve in S und S' parallelen Chordalen, welche die Kreise des Büschels mit der Hyperbel bestimmen.

Daraus ergibt sich weiter durch Umkehrung:

Die Kreise eines Büschels werden von ihren zu irgend einer Richtung parallelen Durchmessern in Punkten einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten, für welche die beiden Scheitel S und S' des Kreisbüschels Endpunkte eines Durchmessers d_0 sind. Die Halbierungsgeraden der Winkel, welche der dem kleinsten Kreise angehörige d_n jener Durchmesser mit der Chordale des Büschels bildet, sind die Achsen, jene der Winkel, welche der genannte Durchmesser mit der Centrale des Büschels bildet, die Asymptoten der Hyperbel.¹⁾

Die voranstehenden Sätze können noch weiter specialisiert werden, indem man die Punkte S und S' in die beiden Scheitel der Hyperbel verlegt; auf diese Weise erhält man Folgendes:

Alle Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel, welche von den Scheiteln aus unter rechtem Winkel erscheinen, sind parallel zur Hauptachse.²⁾

Die zwischen zwei zur Hauptachse parallelen Sehnen liegenden Bogen einer gleichseitigen Hyperbel werden von ihren Scheiteln aus unter gleichen Winkeln gesehen u. a. m.

Dass einige der obenstehenden Sätze ohneweiters zur Construction der gleichseitigen Hyperbel, ebenso auch zur Construction von Normalen und Tangenten benützt werden können, ist augenscheinlich und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

12. Nach den Erörterungen des Art. 1 ist der Directionskegelschnitt Γ unseres auf C liegenden Punktsystems σ durch irgend ein Quadrupel $A_1, A_2; A_1', A_2'$ zusammengehöriger Punkte vollkommen bestimmt, da noch S als Brennpunkt hinzutritt. Legen wir durch diese vier Punkte einen beliebigen anderen Kegelschnitt C' , so ist klar, dass das durch die rechtwinklige Strahleninvolution J auf C' erzeugte Punktsystem σ' denselben Directionskegelschnitt Γ wie σ auf C besitzen muss, da derselbe bereits durch das auch auf C' liegende Quadrupel $A_1, A_2; A_1', A_2'$ bestimmt ist.

¹⁾ Vergl. E. Czuber, l. c., pag. 107.

²⁾ Vergl. diesbezüglich W. Fiedler, „Darstell. Geometrie“, 3. Aufl., 1. Thl., pag. 197, wo die gleichseitige Hyperbel durch involutorische Collineation aus dem Kreise mit einem Punkte desselben als Centrum und dem auf dem zugehörigen Radius normalen Durchmesser als Gegenachse seines Systems erhalten wird.

Mit Rücksicht darauf, dass durch ein solches Quadrupel ein Kegelschnittbüschel festgelegt ist, erhalten wir somit den folgenden Satz:

Eine rechtwinklige Strahleninvolution erzeugt auf allen Kegelschnitten eines Büschels, dessen Scheitel vier auf zwei entsprechenden Strahlen der Involution paarweise gelegene Punkte sind, symmetrische Punktsysteme zweiten Grades, welche einen gemeinsamen Directionskegelschnitt besitzen; derselbe ist dem durch die vier Scheitel des Büschels bestimmten einfachen Vierecke eingeschrieben, worin keine zwei aufeinanderfolgende Ecken auf einem Strahle jener Involution liegen, und hat den Schnittpunkt der Diagonalen desselben zum Brennpunkte.

Ein Kegelschnittbüschel, dessen sämtliche Scheitel reell sind und eine beliebige gegenseitige Lage besitzen, enthält bekanntlich stets eine gleichseitige Hyperbel. Diese ist in dem vorliegenden Falle keine eigentliche Hyperbel, sondern eine degenerierte und besteht aus den beiden aufeinander normalen Diagonalen des vorhin genannten einfachen Viereckes der Scheitel; Γ ist hiebei eine Ellipse oder Hyperbel. Sind jedoch die Scheitel so gelegen, dass jeder der Höhenschnittpunkt des von den drei übrigen gebildeten Dreieckes ist, so sind bekanntlich alle Kegelschnitte des betreffenden Büschels gleichseitige Hyperbeln, und Γ ist dann, was uns schon der vorige Artikel gelehrt hat, eine Parabel.

Zu den Kegelschnitten des durch irgend ein Quadrupel von σ bestimmten Büschels gehören ferner noch die zwei degenerierten, welche aus den Gegenseitenpaaren des oben bezeichneten einfachen Viereckes bestehen. Auf jedem derselben erzeugt die Rechtwinkelinvolution J zwei involutorische Punktreihen; die Verbindungsgeraden entsprechender, d. h. auf zwei zueinander normalen Strahlen von J gelegener, Punkte derselben hüllen einen Kegelschnitt ein, der offenbar wieder Γ ist.¹⁾ Jeder dieser zwei degenerierten Kegelschnitte des Büschels kann zu einer einfachen Ermittlung des zweiten Brennpunktes und der Achsen von Γ benützt werden. Ist nämlich X der Schnittpunkt zweier Gegenseiten γ_1 und γ_2 des Viereckes, so sind nach Früherem die Berührungspunkte Δ_1 und Δ_2 derselben mit Γ ihre Schnittpunkte mit der Normalen, die in S auf SX errichtet wird; sind ferner G_1 und G_2 die Gegenpunkte des Brennpunktes S in Bezug auf γ_1 und γ_2 , so schneiden einander die Geraden $G_1\Delta_1$ und $G_2\Delta_2$ im zweiten Brennpunkte F , und FG_1 , sowie FG_2 ist die Länge der Hauptachse.

¹⁾ Dies führt zu dem bekannten Satze, wonach die von zwei festen Tangenten eines Kegelschnittes auf einer beweglichen Tangente begrenzte Strecke von einem Brennpunkte aus unter constantem Winkel erscheint, der in diesem Falle, wo der Schnittpunkt der beiden festen Tangenten auf der dem Brennpunkt entsprechenden Directrix liegt, ein Rechter ist.

Wenn wir in den beiden Punktinvolutionen, von denen irgend zwei einander entsprechende Strahlen der Rechtwinkelinvolution J von allen Kegelschnitten eines durch ein Quadrupel zusammengehöriger Punkte des Systems σ bestimmten Büschels geschnitten werden, diejenigen Paare einander als entsprechend zuordnen, welche auf demselben Kegelschnitt liegen, so erhalten wir auf jenen zwei Strahlen auch ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades¹⁾, dessen Directionscurve ebenfalls Γ ist. Diese zusammengehörigen Punktepaare der beiden Involutionen sind aber die Gegeneckenpaare derjenigen durch Γ und die einzelnen Kegelschnitte des Büschels bestimmten Poncelet'schen Vierecke, deren Diagonalen in dieselben zwei zueinander normalen Geraden fallen.

Am Schlusse dieser Betrachtung sei noch kurz darauf hingewiesen, dass es, nachdem durch jedes der auf C gelegenen Quadrupel von σ ein Kegelschnittbüschel festgelegt wird, unendlich viele solcher Büschel gibt, deren jedes mit der Rechtwinkelinvolution J unendlich viele symmetrische Punktsysteme zweiten Grades bestimmt, welche sämmtlich Γ als gemeinschaftlichen Directionskegelschnitt besitzen.

Die Anzahl der unendlich vielen Gruppen von je unendlich vielen Poncelet'schen Vierecken, welche durch die einzelnen Kegelschnitte eines und desselben Büschels mit Γ bestimmt werden, wird aber durch jene unendlich vielen Büschel nicht vermehrt.

Dies kann schon aus der Mannigfaltigkeit des Punktes in der Ebene geschlossen werden, ist aber auch einleuchtend, wenn man die sämmtlichen hier auftretenden Vierecke so ordnet, dass alle diejenigen (unendlich vielen), deren Diagonalen in zwei entsprechende Strahlen von J fallen, zu einer Gruppe vereinigt werden, wie dies oben geschehen ist; solche Gruppen gibt es mit den Strahlenpaaren von J unendlich viele.

Jedes der hier in Betracht kommenden Γ umgeschriebenen Vierecke muss einer solchen Gruppe angehören; denn ist A_1 irgend ein außerhalb Γ gelegener Punkt der Ebene, welcher als Ausgangspunkt zur Bildung eines solchen Viereckes gewählt wird, a der Strahl, der ihn mit S verbindet, und a' der darauf normale Strahl von J , so schneiden die beiden Tangenten aus A_1 von Γ auf a' die Punkte A_1' und A_2' aus, und die zweiten Tangenten aus diesen Punkten an Γ schneiden einander auf a im vierten Eckpunkte A_2 des Viereckes.

13. Die Strahleninvolution J sei eine beliebig elliptische.

Dann sind die Eigenschaften der bei verschiedenen Lagen des Scheitels S durch J auf C bestimmten symmetrischen Punktsysteme σ von jenen der bisher betrachteten, welche durch eine Rechtwinkelinvolution erzeugt wurden, wenig verschieden.

¹⁾ Oder zwei projectivische Involutionen.

Da die elliptische aus der rechtwinkligen Strahleninvolution durch Projicieren erhalten werden kann, so gelten diejenigen der früheren Sätze, welche nur von projectivischen Eigenschaften handeln, unverändert auch hier im allgemeineren Falle, so insbesondere jener in Art. 9 über das Tripel conjugierter Kegelschnitte für C als Fundamentalkegelschnitt. Andere erfordern nur eine geringfügige Umänderung; so wird hier der Directionskegelschnitt Γ eine Parabel werden, wenn C eine Hyperbel ist, deren Asymptoten zu zwei entsprechenden Strahlen von J parallel sind.

Ein wesentlicher Unterschied gegen früher besteht offenbar darin, dass S und s wohl dem gemeinsamen Polardreieck von C und Γ als Ecke und Gegenseite angehören, jedoch nicht Brennpunkt und entsprechende Directrix von Γ sind. Dies ist die Ursache der vorhin erwähnten Veränderung gewisser früheren Sätze; darauf näher einzugehen ist wohl nicht nöthig.

Nur der specielle Fall soll hier berührt werden, der eintritt, wenn der Scheitel S der elliptischen Strahleninvolution J mit dem Mittelpunkt von C zusammenfällt.

Dann ist jedes durch ein Quadrupel zusammengehöriger Punkte von σ bestimmte Poncelet'sche Viereck, das C ein- und Γ umgeschrieben ist, ein Parallelogramm; die Diagonalen desselben sind zwei einander entsprechende Strahlen von J und bilden ein Paar conjugierter Durchmesser des Directionskegelschnittes Γ . Derselbe ist offenbar eine Ellipse, deren Achsen mit den Normalstrahlen der Involution J zusammenfallen.

Da die Directionskegelschnitte Γ aller auf (unter obiger Voraussetzung) beliebig gewählten Kegelschnitten C erzeugten Punktsysteme σ dieselbe Involution conjugierter Durchmesser, nämlich J , besitzen, können wir sagen:

Eine elliptische Strahleninvolution schneidet auf allen mit ihr concentrischen Kegelschnitten symmetrische Punktsysteme zweiten Grades aus, deren Directionskegelschnitte coachsiale und ähnliche Ellipsen sind.

Wird schließlich — als speciellster Fall — C ein Kreis, so gehen die C ein- und Γ umgeschriebenen Parallelogramme in Rechtecke über und der Directionskegelschnitt Γ in jene Ellipse, für welche der Kreis C der Ort der Punkte mit zueinander normalen Tangenten ist.¹⁾

¹⁾ Die Achsenlängen dieser Ellipse Γ sind durch dasjenige C ein- und Γ umgeschriebene Rechteck bestimmt, dessen Seiten zu den Achsen von Γ parallel sind; die Diagonalen desselben sind demnach die den kleinsten Winkel miteinander einschließenden Strahlen von J , fallen also mit den zu den Achsen symmetrisch gelegenen conjugierten Durchmessern von Γ zusammen.

Die Ermittlung jener zwei Strahlen von J lässt sich mit der Bestimmung der Normalstrahlen zum kürzesten Verfahren vereinigen, indem man in einem beliebigen durch den Scheitel S von J gelegten Kreis, auf dem J eine Involution i mit dem Centrum N ausschneidet, die Endpunkte des durch N gehenden Durchmessers und der zu demselben normalen durch N gehenden Sehne mit S verbindet.

14. Die Strahleninvolution J sei eine hyperbolische.

Da je zwei entsprechende Strahlen von J durch die Doppelstrahlen d_1 und d_2 getrennt werden, so ist klar, dass eine hyperbolische Strahleninvolution J auf einem Kegelschnitt C nur dann ein reelles Punktsystem σ erzeugen kann, wenn mindestens einer der beiden Doppelstrahlen von C geschnitten wird; in diesen Schnittpunkten fallen offenbar je zwei einander entsprechende Punkte von σ zusammen, sie sind also sich selbst entsprechende oder Coincidenzpunkte von σ . Es ist wohl ohneweiters einleuchtend, dass die Tangenten von C in diesen Punkten auch Tangenten des Directionskegelschnittes Γ sein müssen.

Im Folgenden sollen nun die hauptsächlichsten der aus den verschiedenen Lagen des Fundamentalkegelschnittes C gegen J resultierenden Fälle kurz besprochen werden.

15. Der Scheitel S von J liege innerhalb C .

In diesem Falle werden beide Doppelstrahlen d_1 und d_2 der Involution J von C in den Punktepaaaren $D_1 D'_1$ und $D_2 D'_2$ geschnitten, so dass also sämtliche der vier möglichen Coincidenzpunkte von σ reell sind. Hingegen treten, da kein Strahl von J Tangente von C sein kann, in σ keine reellen Doppelpunkte und somit auch keine reellen Verzweigungspunkte auf; daher können C und Γ einander nicht schneiden.

Zu den ausgezeichneten Tangenten des Directionskegelschnittes Γ gehören nebst den Tangenten $\delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2$ von C in den Coincidenzpunkten D_1, D'_1, D_2, D'_2 auch noch die Doppelstrahlen d_1 und d_2 von J , was aus Folgendem erhellt.

Ein durch irgend ein Quadrupel zusammengehöriger Punkte von σ bestimmtes C ein- und Γ ungeschriebenes Viereck degeneriert, wenn zwei einander entsprechende (nicht auf demselben Strahl von J gelegene) Punkte sich in einem Coincidenzpunkte vereinigen, in den als Tangente von Γ offenbar doppelt zu zählenden entsprechenden Doppelstrahl und die Tangenten von C in den dazu gehörigen zwei Coincidenzpunkten.

Es liefern somit im vorliegenden Falle (und auch in dem späteren, wo S außerhalb C liegt und beide Doppelstrahlen geschnitten werden) zwei degenerierte Poncelet'sche Vierecke die zwei Tangententripel d_1, δ_1, δ'_1 und d_2, δ_2, δ'_2 , welche sich zu einem Brianchon'schen Sechseit vereinigen, durch das Γ mehr als hinreichend bestimmt ist.

Da S und s wieder wie früher Ecke und Gegenseite des C und Γ gemeinsamen Polardreieckes bilden, so sind die Schnittpunkte I und II von s mit den Doppelstrahlen d_1 und d_2 die Berührungspunkte der letzteren mit dem Directionskegelschnitte Γ . Die gemeinsame Polare s von S in Bezug auf C und Γ ist offenbar bereits durch das Viereck der Coincidenzpunkte bestimmt, und es

bildet S mit jedem der beiden Berührungspunkte I und II auf Γ und den auf dem entsprechenden Doppelstrahl gelegenen zwei Coincidenzpunkten je eine harmonische Reihe.

C und Γ bestimmen eine Kegelschnittschar mit den reellen Grundtangenten $\delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2$; daraus und aus dem Zusammenhange dieser zwei besonderen Kegelschnitte der Schar ergeben sich einige interessante Beziehungen, auf die jedoch hier nicht weiter eingegangen sondern bloß hingewiesen werden soll.¹⁾

Wenn C eine Hyperbel ist, deren Asymptoten zu zwei einander entsprechenden Strahlen von J parallel sind, fallen zwei Punkte des durch dieses Strahlenpaar erzeugten Quadrupels von σ mit den unendlich fernen Punkten von C zusammen; die unendlich ferne Gerade ist somit eine Tangente des Directionskegelschnittes Γ und dieser selbst eine Parabel.

Sind die Asymptoten der Hyperbel C zu den Doppelstrahlen d_1 und d_2 von J parallel, dann sind zwei Coincidenzpunkte von σ mit den unendlich fernen Punkten von C identisch, so dass die Asymptoten von C Tangenten von Γ sind. Die gemeinsame Polare s von S ist parallel zur Verbindungsgeraden der beiden im Endlichen gelegenen Coincidenzpunkte, und diese selbst halbieren die Strecken zwischen S und den Berührungspunkten I , bzw. II , der Doppelstrahlen d_1 und d_2 mit Γ , denn die ihnen in Bezug auf S und I , bzw. S und II , conjugierten Punkte liegen im Unendlichen.

Fällt der Scheitel S der hyperbolischen Strahleninvolution J mit dem Mittelpunkt von C zusammen, wobei es gleichgiltig bleibt, ob C eine Ellipse oder Hyperbel ist, ob also S innerhalb oder außerhalb C liegt, so erhalten wir in analoger Weise wie in dem Falle, wo J elliptisch ist, als Poncelet'sche Vierecke Parallelogramme, deren Diagonalen je zwei entsprechende Strahlen von J sind und conjugierte Durchmesser von Γ bilden. Γ selbst ist eine Hyperbel, deren Achsen mit den Normalstrahlen von J zusammenfallen.

Da in diesem Falle s mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt, die Berührungspunkte I und II der Doppelstrahlen d_1 und d_2 von J mit Γ somit die unendlich fernen Punkte dieser Geraden sind, so bilden die Doppelstrahlen von J die Asymptoten der Directionskegelschnitte aller auf diese Weise erzeugten symmetrischen Punktsysteme, so dass wir sagen können:

Eine hyperbolische Strahleninvolution schneidet auf allen mit ihr concentrischen Kegelschnitten

¹⁾ So bilden beispielsweise die Tangenten von C in den vier Coincidenzpunkten mit jedem der drei Gegenseitenpaare des durch dieselben bestimmten vollständigen Viereckes je ein Brianchon'sches Sechseck, worin die Schnittpunkte des betreffenden Paares von Gegenseiten mit der nicht durch ihren Schnittpunkt gehenden Seite des Diagonaleckreieckes die Berührungspunkte des zugehörigen Kegelschnittes mit jenen Seiten sind.

Jeder Diagonaleckpunkt des vollständigen Viereckes der Coincidenzpunkte ist der Scheitel einer hyperbolischen Strahleninvolution, welche die in diesem Diagonaleckpunkte sich schneidenden Gegenseiten des Viereckes zu Doppelstrahlen hat und auf C ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades erzeugt, das den entsprechenden der genannten drei Kegelschnitte als Directionskegelschnitt besitzt.

symmetrische Punktsysteme zweiten Grades aus, deren Directionskegelschnitte coachsiale und ähnliche Hyperbeln sind.

Ist endlich C ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit S zusammenfällt, so gehen die durch die Quadrupel zusammengehöriger Punkte von σ bestimmten Poncelet'schen Vierecke in Rechtecke und der Directionskegelschnitt Γ in diejenige Hyperbel über, für welche die Doppelstrahlen der Involution J die Asymptoten bilden und der Kreis C der Ort der Punkte mit zueinander normalen Tangenten ist.

16. Der Scheitel S von J liege außerhalb C .

Setzen wir zunächst voraus, dass C von beiden Doppelstrahlen d_1 und d_2 der Involution J geschnitten werde, so haben wir den Fall vor uns, dass alle singulären Elemente des Punktsystems σ reell sind: vier Coincidenzpunkte $D_1, D'_1; D_2, D'_2$ (die Schnittpunkte der Doppelstrahlen d_1, d_2 mit C), zwei Doppelpunkte T_1, T_2 (die Berührungspunkte der Tangenten t_1, t_2 aus S an C) und vier Verzweigungspunkte $V_1, V_2; V_3, V_4$ (die Schnittpunkte der den Tangenten t_1, t_2 in der Involution J entsprechenden Strahlen t'_1, t'_2 mit C); hierbei sind die Doppelpunkte T_1, T_2 doppelt zu zählen, da sich in jedem die Tangenten von Γ in den zwei auf demselben Strahl von J gelegenen Verzweigungspunkten treffen.

Infolge der reellen Verzweigungspunkte schneiden hier C und Γ einander in vier reellen Punkten.

Für die Bestimmung des Directionskegelschnittes Γ liefern die singulären Elemente von σ schon überzählige Stücke und zwar die Verzweigungspunkte und deren Verbindungsgeraden mit den entsprechenden Doppelpunkten vier Punkte sammt den dazu gehörigen Tangenten und die Tangenten von C in den Coincidenzpunkten vier weitere Tangenten; außerdem sind noch die beiden Doppelstrahlen von J Tangenten von Γ und ihre Schnittpunkte mit der Polaren s von S die Berührungspunkte derselben.

Beachtenswert ist, dass das C und Γ gemeinsam umschriebene Vierseit der Tangenten $\delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2$ von C in den Coincidenzpunkten und das Γ umschriebene Vierseit der Tangenten $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ von Γ in den Verzweigungspunkten ein gemeinsames Diagonaldreiseit oder die vollständigen Vierecke der Coincidenzpunkte D_1, D'_1, D_2, D'_2 und der Verzweigungspunkte V_1, V_2, V_3, V_4 ein gemeinsames Diagonaldreieck besitzen.

In der That, ist SXX' das Diagonaldreieck des Viereckes D_1, D'_1, D_2, D'_2 , so ist auf Grund einer Eigenschaft der quadratischen Involutionen leicht einzusehen, dass die nicht durch S gehenden Paare von Gegenseiten des Viereckes V_1, V_2, V_3, V_4 sich in X und X' auf s schneiden müssen.

Da nämlich t_1, t'_1 und t_2, t'_2 in der Strahleninvolution J einander entsprechende Strahlen und d_1, d_2 die Doppelstrahlen sind, so gehören bekanntlich auch die Strahlenpaare $t_1, t_2; t'_1, t'_2; d_1, d_2$ einer anderen Involution an. Die Doppelstrahlen dieser letzteren, sind offenbar die durch S gehenden Seiten x und x' des Diagonaldreieckes SXX' , denn sie trennen als conjugierte Geraden in Bezug auf C t_1 und t_2 und als durch S gehende Seiten des Diagonaldreieckes die durch denselben Punkt gehenden Seiten d_1 und d_2 des Viereckes $D_1 D'_1 D_2 D'_2$ harmonisch, und somit als Doppelstrahlen von J' auch in gleicher Weise das dritte Strahlenpaar t'_1, t'_2 von J' , welche die durch S gehenden Gegenseiten des Viereckes $V_1 V_2 V_3 V_4$ sind.

Aus dieser Betrachtung erhellt auch, dass x und x' zwei entsprechende Strahlen der Involution J sind.

Auf die Bedeutung der Diagonalecken X und X' und der sich in ihnen schneidenden Gegenseitenpaare der Vierecke kommen wir am Schlusse nochmals zu sprechen; es soll hier nur bemerkt werden, dass X, X' und S' als Brianchon'sche Punkte in aus den zehn wiederholt genannten Tangenten von Γ gebildeten Brianchon'schen Sechsecken auftreten, und dass durch sie insbesondere die Geraden hindurchgehen, auf denen paarweise die Berührungspunkte gleichartiger (derselben Gruppe angehöriger) Tangenten mit C und mit Γ liegen.

Die Erörterungen der Artikel 7, 8 und 9 und der Schlussatz über das Tripel conjugierter Kegelschnitte, welches durch das Tangentenvierseit $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4$ bestimmt ist, gelten in vollem Umfange auch für den vorliegenden Fall der hyperbolischen Involution.

17. In dem besonderen Falle, wo nur einer der beiden Doppelstrahlen der Involution J den Kegelschnitt C schneidet, enthält das entsprechende Punktsystem σ nur je zwei reelle Coincidenz- und Verzweigungspunkte, während die andern zwei imaginär sind; hingegen sind wie früher beide Doppelpunkte und die Berührungspunkte beider Doppelstrahlen mit Γ reell. Die beiden reellen Verzweigungspunkte zerlegen C in zwei Theile, wovon derjenige, auf dem der diesen Verzweigungspunkten entsprechende Doppelpunkt liegt, durchwegs Quadrupel reeller Punkte von σ enthält, die also je vier Tangenten von Γ liefern, während der andere Theil parastisch ist; derselbe liefert, da ein Punktepaar oder beide eines jeden Quadrupels imaginär sind, keine Tangenten von Γ , er liegt innerhalb Γ .

Wenn C von dem einen Doppelstrahl d_1 der Involution J geschnitten und von dem andern d_2 berührt wird, so sind sämmtliche singulären Punkte von σ reell; es fallen jedoch in dem Berührungspunkte von d_2 mit C zwei Coincidenzpunkte und zwei Verzweigungspunkte mit einem Doppelpunkte von σ und dem Berührungspunkte von d_2 mit Γ zusammen. C und Γ durchschneiden einander in den beiden getrennten Verzweigungspunkten und berühren einander in

dem gemeinsamen Berührungspunkte mit d_2 . Der den Berührungspunkt enthaltende Theil von C zwischen den Verzweigungspunkten liegt innerhalb Γ , ist somit parasitisch.

Berührt C beide Doppelstrahlen, so reducirt sich das Punktsystem σ auf die zwei Berührungspunkte; in jedem derselben vereinigen sich wie vorhin in dem einen die singulären Elemente. Γ degeneriert hier in die beiden Doppelstrahlen von J .

18. Zum Schlusse soll noch der Fall besprochen werden, der sich ergibt, wenn C zwei einander entsprechende Strahlen e und e' der hyperbolischen Involution J berührt.

Die Berührungspunkte derselben sind die beiden Doppelpunkte T_1, T_2 des Punktsystems σ ; mit ihnen fallen die Paare der nicht entsprechenden Verzweigungspunkte, V_3, V_4 , bzw. V_1, V_2 , zusammen. Da einer der beiden Doppelstrahlen, z. B. d_1 , von C geschnitten werden muss, so ist das auf diesem gelegene Paar der Coincidenzpunkte D_1, D'_1 reell, jenes auf d_2 hingegen imaginär.

Jedes zwischen e und e' und in demselben Winkelraum mit d_1 gelegene Strahlenpaar a, a' der Involution J schneidet auf C ein Quadrupel reeller zusammengehöriger Punkte $A_1, A_2; A'_1, A'_2$ von σ aus. Ihre Verbindungsgeraden $A_1 A'_2, A_2 A'_1; A_1 A'_1, A_2 A'_2$, welche Tangenten von Γ sein müssen, gehen paarweise durch die Schnittpunkte I, II der Doppelstrahlen d_1, d_2 von J mit der Polaren s des Scheitels S von J in Bezug auf C .

Dies erhellt daraus, dass je vier zusammengehörige Punkte von σ die Ecken eines vollständigen Viereckes bilden, dessen Diagonalseiten die Doppelstrahlen d_1 und d_2 der Involution J und die Polare s von S in Bezug auf C sind. Es ist somit das Polardreieck $SIII$ von C das gemeinsame Diagonaldreieck aller jener Vierecke; daher gehen die Paare aller Gegenseiten, die nicht mit entsprechenden Strahlen von J zusammenfallen, durch die Diagonalecken I und II . In der letzteren treffen einander offenbar auch die Tangenten von C in den Coincidenzpunkten C_1 und C'_1 .

Aus dem Voranstehenden folgt nun, dass der Directionskegelschnitt Γ in diesem Falle in das Paar der Schnittpunkte I und II der Doppelstrahlen von J mit s degeneriert.

Es ist daraus ferner zu erkennen, dass das durch die gegebene hyperbolische Strahleninvolution J auf C erzeugte Punktsystem σ noch zwei weitere hyperbolische Strahleninvolutionen J_I und J_{II} mit den Scheiteln I und II bestimmt, deren entsprechende Strahlen die zweiten und dritten (nicht durch S gehenden) Gegenseitenpaare der von den einzelnen Quadrupeln von σ gebildeten vollständigen Vierecke sind.¹⁾

¹⁾ Eine Vergleichung der obigen Erörterungen mit jenen in Art. 16 lässt die Übereinstimmung der hier gegebenen Involution J mit der dort aus der gegebenen J abgeleiteten J' erkennen, wobei an die Stelle der dortigen Strahlen x, x' und d_1, d_2 nun die Doppelstrahlen d_1, d_2 , bzw. das Strahlenpaar e, e' treten und an die Stelle von Γ nun C ; dann sind die Diagonaldreiecke SXX' und $SIII$ und insbesondere auch die früheren Diagonalecken X und X' mit den jetzigen I und II identisch.

Diese drei hyperbolischen Strahleninvolutionen J , J_I , J_{II} , deren Scheitel die Ecken und deren Doppelstrahlen die Seiten des Polardreieckes SIH (im allgemeinen eines beliebigen Polardreieckes) des Kegelschnittes C sind, müssen offenbar projectivisch sein.

Je zwei derselben haben einen Doppelstrahl entsprechend gemein, liegen somit perspectivisch¹⁾, während dem zweiten Doppelstrahl der einen die Tangenten von C aus dem Scheitel der andern entsprechen C .

Je zwei von den drei Involutionen erzeugen den Kegelschnitt C .

¹⁾ Je zwei können auch als projectivische Strahleninvolutionen zweiten Grades in reducirter Lage erster Ordnung bezeichnet werden. Der gemeinschaftliche Doppelstrahl ist als ein Theil des Erzeugnisses zu betrachten. Vgl. Weyr, „Beiträge zur Curvenlehre“, pag. 50 und 52.