6. *Induktion von schwingenden Zylindern;* *von Johann Kern.*

(Auszug aus der Züricher Inaugural-Dissertation.)

Einleitung.

Läßt man aus leitenden Materialien bestehende Körper in einem homogenen Magnetfelde Schwingungen um eine zur Richtung des Feldes senkrechte Achse ausführen, so werden in ihnen Ströme induziert, die eine Wärmeentwicklung und damit eine Dämpfung der schwingenden Bewegung zur Folge haben. Kennt man diese Dämpfung, so läßt sich aus ihrer Größe, wenn das Feld zur Zeit $t = 0$ und einige andere leicht zu messende Konstanten bekannt sind, die Leitfähigkeit bestimmen. Einige zu dem Problem der Leitfähigkeitsbestimmung aus Dämpfungsbeobachtungen gehörige Rechnungen möchte ich hier mitteilen. Natürlich ist eine rechnerische Behandlung nur dann ausführbar, wenn man sich auf geometrisch einfache Körper beschränkt. Für die Kugel wurde die Frage von H. Hertz ¹⁾ gelöst, doch ist die Kugelform für eine praktische Verwertung der Methode weniger geeignet, als z. B. die Zylinderform, die mir zudem durch meine Versuchsbedingungen vorgeschrieben war. Ich habe daher in folgendem die Berechnung für den theoretisch weniger einfachen Fall des Zylinders ausgeführt.

Eine exakte Lösung des Systems der hier auftretenden Differentialgleichungen wäre wohl kaum möglich, doch führt ein Annäherungsverfahren vollständig zum Ziele. Dasselbe besteht in folgendem:

Wir nehmen in erster Näherung das Magnetfeld, in dem der Zylinder schwingt (Feldstärke = $\mathfrak{S}_1$) als konstant an und berechnen aus ihm ein erstes zur Strömung gehöriges Feld $\mathfrak{G}_1$. Nun berechnen wir aus diesem Felde ein neues magnetisches Feld $\mathfrak{S}_1'$ und erhalten, indem wir zu $\mathfrak{S}_1$ das Feld $\mathfrak{S}_1'$ super-

1) H. Hertz, Ges. Werke 1.

materiellen Punktes bedeutet; in den Gleichungen sind rationale Lorentz-Heaviside¹⁾ Einheiten benutzt.

Die Glieder

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

sind wegen des quasistationären Charakters des Vorganges verschwindend klein; $1/c \operatorname{rot}[\mathfrak{E} \mathfrak{v}]$ ist von derselben Größenordnung²⁾; wir können daher diese Glieder vernachlässigen. Schließlich ist $\mathfrak{v} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$, weil wir die Abwesenheit wahrer Ladungen voraussetzen wollen.

Die Gleichungen des Problems sind nunmehr:

$$(3) \quad \operatorname{rot} \left[\mathfrak{H} \frac{\mathfrak{v}}{c} \right] = - \operatorname{rot} \mathfrak{E},$$

$$(4) \quad \frac{1}{c} \sigma \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

$$(5) \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0,$$

$$(6) \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Haben wir aus diesen Gleichungen $\mathfrak{E}$ berechnet, so gibt uns die Gleichung

$$(7) \quad W = \iiint \sigma \mathfrak{E}^2 dv$$

(über das Volumen des Zylinders integriert) die Joulesche Wärme.

Schließlich gibt uns der Energiesatz³⁾:

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\Theta \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(F \frac{\varphi^2}{2} \right) + e \dot{\varphi}^2 + W = 0$$

oder in anderer Form:

$$(9) \quad \dot{\varphi} + \frac{e}{\Theta} \dot{\varphi} + \frac{W}{\Theta} \frac{1}{\varphi} + \frac{F}{\Theta} \varphi = 0$$

die Gleichung der Bewegung des Zylinders.

In diese Gleichung tritt W als eine Funktion von $\dot{\varphi}$ ein, die erst dann bekannt wäre, wenn wir das gesamte vorliegende

1) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften V, 13 (7).

2) Übrigens ist dieses Glied gemäß der Lorentzschen Theorie tatsächlich durch $1/c [\mathfrak{H} \mathfrak{v}]$ zu ersetzen und $\mathfrak{H}$ ist wegen $\varepsilon = 1$ gleich 0.

3) Das Glied, das die magnetische Energie enthält, ist als verschwindend klein gegenüber $d/dt(\Theta \dot{\varphi}^2/2)$ vernachlässigt.

System simultaner Differentialgleichungen gelöst hätten, was besonders dadurch erschwert würde, daß $\mathfrak{S}$ in (3) als unbekannte Funktion anzusetzen ist. Deshalb setzen wir im Sinne des in der Einleitung auseinandergesetzten Näherungsverfahrens $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$, d. i. gleich dem Werte des Feldes zur Zeit $t = 0$.¹⁾ Dann können wir aus (3) $\mathfrak{E}$ finden, und zwar wird es sich als proportional w ($\dot{\varphi} = w$) ergeben; dadurch wird $W \sim Q w^2$ und (9) geht in eine Gleichung der Form $\ddot{y} + A\dot{y} + By = 0$ über. Die Konstante Q hängt von σ , $\mathfrak{S}$ und den Dimensionen des Körpers ab. *Ihre Berechnung ist der Zweck unserer Darstellung.*

In erster Näherung lauten nunmehr die Gleichungen des Problems:

$$(10) \quad \text{rot} \left[\mathfrak{S} \frac{v}{c} \right] = - \text{rot} \mathfrak{E},$$

$$(11) \quad \text{div} \mathfrak{E} = 0,$$

$$(12) \quad \text{div} \mathfrak{S} = 0,$$

$$(13) \quad W = \iiint \sigma \mathfrak{E}^2 dv = Q w^2,$$

$$(14) \quad \ddot{\varphi} + \frac{e + Q}{\Theta} \dot{\varphi} + \frac{E}{\Theta} \varphi = 0.$$

Aus (10) ergibt sich:

$$\text{rot} \left\{ \left[\mathfrak{S} \frac{v}{c} \right] + \mathfrak{E} \right\} = 0,$$

daher:

$$(15) \quad \mathfrak{E} = - \left[\mathfrak{S} \frac{v}{c} \right] - \text{grad } V,$$

worin V ein skalares Potential bedeutet.

Wir können diesen so gewonnenen Ausdruck für $\mathfrak{E}$ dahin interpretieren, daß zur „eingepprägten elektrischen Kraft“ $\mathfrak{E}$, die vorhanden wäre, wenn die rotierende leitende Masse unendliche Ausdehnung hätte, eine durch die Größe und Gestalt des Körpers „aufgezwungene Kraft“ $\mathfrak{E}^*$ hinzutritt, die aus einem Potential ableitbar ist.

Im Außenraume ist $v = 0$ und $\text{div} \mathfrak{E}_a = 0$, also genügt $V = V_a$ dort der Laplaceschen Gleichung: $\Delta V = 0$.

1) Der verwendete Index bezieht sich auf den Grad der Näherung, in Zukunft werden wir einfach $\mathfrak{S}$ schreiben und darunter das in erster Näherung als homogen und zeitlich konstant angenommene Feld verstehen.

Im *Innenraume* ist wegen (4) zunächst $\operatorname{div} \mathfrak{E}_z = 0$, daher

$$\Delta V = -\operatorname{div} \left[\mathfrak{S} \frac{v}{c} \right].$$

Nun ist:

$$\operatorname{div} \left[\mathfrak{S} \frac{v}{c} \right] = \left(\frac{v}{c} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{S} \right) = \left(\mathfrak{S} \operatorname{rot} \frac{v}{c} \right).$$

Da aber wegen der Konstanz von $\mathfrak{S}$, $\operatorname{rot} \mathfrak{S} = 0$ ist, und da $\mathfrak{S}$ auf $\operatorname{rot} v/c$ senkrecht steht, also $\left(\mathfrak{S} \operatorname{rot} \frac{v}{c} \right) = 0$ ist, verschwindet auch hier das rechte Glied, so daß also V im ganzen Raume der Gleichung:

$$\Delta V = 0$$

genügt.

Grenzbedingungen.

Aus (4) folgt für einen Übergang aus einem Medium 1 in ein Medium 2

$$i_{n_1} + i_{n_2} = \sigma_i \mathfrak{E}_{n_1} + \sigma_a \mathfrak{E}_{n_2} = 0,$$

wenn wir mit n die Normale zur Grenzfläche bezeichnen; daher wegen $\sigma_a = 0$:

$$\mathfrak{E}_{n_1} = 0$$

oder

$$\operatorname{grad}_n V = - \left[\mathfrak{S} \frac{v}{c} \right]_n.$$

Hierzu ergibt sich noch aus (3) als zweite Grenzbedingung:

$$V_i = V_a.$$

V hat also die Gleichung:

$$(16) \quad \Delta V = 0$$

mit den Grenzbedingungen:

$$(17) \quad \operatorname{grad}_n V = - \left[\mathfrak{S} \frac{v}{c} \right]_n.$$

$$(18) \quad V_i = V_a$$

zu erfüllen. Diese Bedingungen gelten übrigens, wie aus der Art ihrer Ableitung hervorgeht, ganz allgemein.

§ 2. Lösung für das Potential des Zylinders.

Die Gleichung $\Delta V = 0$ in Zylinderkoordinaten ist:

$$(19) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

Gleichung (17) liefert und zwei Grenzbedingungen, und zwar zunächst an der Mantelfläche des Zylinders:

$$\left[\S \frac{v}{c} \right]_n = \left[\S \frac{v}{c} \right]_t = 0,$$

daher

$$(20) \quad \frac{\partial V}{\partial r}_{(r=a)} = 0.$$

An der oberen und unteren Grenzfläche des Zylinders können wir (17) auch schreiben:

$$\text{grad}_z V = - \left[\S \frac{v}{c} \right]_z.$$

Nun ist

$$\left[\S \frac{v}{c} \right]_z = \frac{H w r \cos \vartheta}{c},$$

daher geht (17) über in:

$$(21) \quad \frac{\partial V}{\partial x}_{(x=\pm h)} = - \frac{H w r \cos \vartheta}{c}.$$

Die Gleichung (21) legt den Ansatz:

$$V = \varphi(r, Z) \cdot \cos \vartheta$$

nahe, durch den ϑ eliminiert wird und das Problem sich auf die Bestimmung einer Funktion $\varphi(r, z)$ reduziert, die der Gleichung

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

mit den Grenzbedingungen:

$$(23) \quad \varphi_i = \varphi_a,$$

$$(24) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r}_{(r=a)} = 0,$$

$$(24) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}_{(x=\pm h)} = - \frac{H w r}{c}$$

genügen muß.

Für φ machen wir in üblicher Weise den Ansatz:

$$\varphi = R(r) \cdot Z(z),$$

wo R nur Funktion von r , und Z nur Funktion von z ist und

erhalten als Lösung für das Potential φ im Innern des Zylinders (den Index lassen wir von jetzt an weg) unter Rücksicht darauf, daß $\partial \varphi / \partial z$ für $Z = \pm h$ seinen Wert nicht ändern darf.

$$(26) \quad \varphi = A J_1(\alpha r) \sin(\alpha z)^{1)}$$

In diesen Ausdruck für φ treten noch zwei unbestimmte Konstanten auf, die wir durch die Gleichung (24), (25) bestimmen müssen. Zunächst liefert (24):

$$J_1'(\alpha a) = 0.$$

Setzen wir $\alpha a = W$, also $\alpha = W/a$, so geht unsere Gleichung über in $J_1'(W) = 0$.

Jede Wurzel der Gleichung:

$$J_1'(W) = 0$$

befriedigt (24) und daher ist

$$\alpha = \frac{W_n}{a} \quad (n \text{ von } 1 \text{ bis } \infty).$$

Wenn wir die n^{te} Wurzel (deren ja bekanntlich unendlich viel vorhanden sind) mit W_n bezeichnen.

Dies in (26) eingesetzt ergibt:

$$(27) \quad \varphi = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n J_1\left(W_n \frac{r}{a}\right) \sin\left(W_n \frac{z}{a}\right)$$

als allgemeine Lösung für φ . In ihr sind nun noch die A_n so zu bestimmen, daß auch (25) befriedigt wird.

Wir schreiben (25) in der Form

$$(28) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{W_n}{a} J_1\left(W_n \frac{r}{a}\right) \cos\left(W_n \frac{h}{a}\right) = -\frac{a H w}{c} \frac{r}{a}.$$

1) Hierin bedeutet $J_1(\alpha r)$ die Besselsche Funktion erster Ordnung des Arguments (αr) , die durch die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{r} y' + \left(\alpha^2 - \frac{1}{r^2}\right) y = 0$$

definiert ist. Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln p. 166. Leipzig, Teubner. 1913.

Nun läßt sich aber $r/a = x$ in einer Reihe nach $J_1(W_n x)$ entwickeln, da die Funktionen $\sqrt{x} J_1(W_n x)$ ein orthogonales Funktionensystem bilden.¹⁾

Schreiben wir dieselbe:

$$(29) \quad \frac{r}{a} = \sum_1^{\infty} a_n J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right).$$

so soll nach (26)

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{W_n}{a} J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right) \mathfrak{Cof} \left(W_n \frac{h}{a} \right) = - \frac{a H w}{c} \sum_1^{\infty} a_n J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right)$$

für jeden beliebigen Wert von $r \leq a$ erfüllt sein. Also haben wir A_n zu bestimmen durch die Formel:

$$(30) \quad A_n = - \frac{a^3 H w}{c} \frac{1}{W_n \mathfrak{Cof} \left(W_n \frac{h}{a} \right)} \cdot a_n.$$

Durch Multiplikation der Reihe (27) mit $\frac{r}{a} J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right)$ und

1) Der Beweis ist ganz analog dem in Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der Physik I § 83 für J_0 gegeben.

Setzt man nämlich

$$J_1(W_n x) = J_n^- = X^{-1/2} Z_n^-,$$

so erhält man durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Differentialgleichung für J_n^- die Gleichung:

$$Z_n^- + \left(W_n^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{x^2} \right) Z_n^- = 0$$

und ebenso:

$$Z_m^- + \left(W_m^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} \right) Z_m^- = 0.$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit Z_m^- der zweiten mit Z_n^- ergibt:

$$Z_m^- Z_n^- - Z_m^- Z_n^- = (W_n^2 - W_m^2) Z_m^- Z_n^-$$

und hieraus durch Integration beider Seiten:

$$[Z_m^- Z_n'^- - Z_m'^- Z_n^-]_0^1 = (W_n^2 - W_m^2) \int_0^1 Z_m^- Z_n^- dx.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist an beiden Grenzen = 0, womit die Orthogonalität des Funktionensystems $\sqrt{x} J_1(W_n x)$ bewiesen ist.

Integration über x zwischen 0 und a verschwinden in bekannter Weise alle a_m ($m \neq n$) und es ergibt sich:

$$a_n = \frac{\int_0^1 x^2 J_1(W_n x) dx}{\int_0^1 x J_1^2(W_n x) dx}.$$

Die Integrale sind auswertbar ¹⁾ und ergeben für a_n :

$$a_n = \frac{2}{(W_n^2 - 1) J_1(W_n)}$$

und damit nach (28):

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n &= - \frac{2 \alpha^2 H w}{e} \frac{1}{\mathfrak{E}_0 \left(W_n \frac{h}{a} \right)} \frac{1}{W_n (W_n^2 - 1) J_1(W_n)} \\ &= A_n = - \frac{2 \alpha^2 H w}{e} \frac{1}{\mathfrak{E}_0 \left(W_n \frac{h}{a} \right)} B_n. \end{aligned} \right.$$

1) Die Formel

$$J_1 = J_0 - \frac{1}{x} J_1$$

(vgl. E. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, p. 165, 11) ergibt für $J_1'(W_n) = 0$ die Beziehung

$$J_0(W_n) = \frac{1}{W_n} J_1(W_n).$$

Ebenso ergibt

$$J_0(W_n) + J_2(W_n) = \frac{2}{W_n} J_1(W_n)$$

(E. Jahnke-Emde p. 165, 10) die Beziehung

$$J_2 = \frac{1}{W_n} J_1 = J_0.$$

Mittels dieser Beziehungen erhält man (E. Jahnke-Emde p. 165, 12):

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 J_1(W_n x) dx &= \frac{J_1(W_n)}{W_n^2}, \\ \int_0^1 x J_1^2(W_n x) dx &= \frac{J_1^2(W_n)}{2} \frac{(W_n^2 - 1)}{W_n^2}. \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$(32) \quad B_n = \frac{1}{W_n (W_n^2 - 1) J_1(W_n)}.$$

Demnach ist schließlich:

$$(33) \quad V = -\frac{2 a^2 H w}{c} \cos \vartheta \sum_1^{\infty} B_n J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right) \frac{\operatorname{Sin} \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\operatorname{Cos} \left(W_n \frac{h}{a} \right)}.$$

Aus dieser Darstellung für V ergeben sich nach (15) für die Feldstärken die Formeln:

$$(34) \quad \mathfrak{E}_r = \frac{2 a H w}{c} \cos \vartheta \sum_1^{\infty} B_n W_n J_1' \left(W_n \frac{r}{a} \right) \frac{\operatorname{Sin} \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\operatorname{Cos} \left(W_n \frac{h}{a} \right)},$$

$$(35) \quad \mathfrak{E}_\vartheta = -\frac{2 a H w}{c} \sin \vartheta \sum_1^{\infty} B_n W_n \frac{J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right)}{W_n \frac{r}{a}} \frac{\operatorname{Sin} \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\operatorname{Cos} \left(W_n \frac{h}{a} \right)},$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= -\frac{H w r \cos \vartheta}{c} \\ &+ \frac{2 a H w \cos \vartheta}{c} \sum_1^{\infty} B_n W_n J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right) \frac{\operatorname{Cos} \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\operatorname{Cos} \left(W_n \frac{h}{a} \right)}, \end{aligned} \right.$$

wenn man berücksichtigt, daß

$$\left[\mathfrak{H} \frac{v}{c} \right]_r = 0, \quad \left[\mathfrak{H} \frac{v}{c} \right]_\vartheta = 0, \quad \left[\mathfrak{H} \frac{v}{c} \right]_z = \frac{H w r \cos \vartheta}{c}$$

ist.

§ 3. Berechnung der Jouleschen Wärme und der Dämpfungskonstante.

Nach Formel (13) ist

$$W = \iiint \sigma \mathfrak{E}^2 dv = \sigma \iiint \{ \mathfrak{E}_r^2 + \mathfrak{E}_\vartheta^2 + \mathfrak{E}_z^2 \} dv.$$

Setzen wir aus (30), (31), (32) für $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{E}_\vartheta$, $\mathfrak{E}_z$ ihre Werte ein, so erhalten wir für W die Formel:

$$\begin{aligned}
 W = & \sigma \int_0^a \int_0^{2\pi+h} \int_r \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot dz \\
 & \left\{ \left(\frac{2 a H w}{c} \right)^2 \cos^2 \vartheta \sum_1^\infty \sum_1^\infty B_m B_n W_m W_n \right. \\
 & \frac{\mathfrak{S} \sin \left(W_m \frac{z}{a} \right) \cdot \mathfrak{S} \sin \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_m \frac{h}{a} \right) \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_n \frac{h}{a} \right)} J_r \left(W_m \frac{r}{a} \right) J_r' \left(W_n \frac{r}{a} \right) \\
 & + \left(\frac{2 a H w}{c} \right)^2 \sin^2 \vartheta \sum_1^\infty \sum_1^\infty B_m B_n W_m W_n \\
 & \frac{\mathfrak{S} \sin \left(W_m \frac{z}{a} \right) \mathfrak{S} \sin \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_m \frac{h}{a} \right) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_n \frac{h}{a} \right)} \cdot \frac{J_1 \left(W_m \frac{r}{a} \right)}{\left(W_m \frac{r}{a} \right)} \cdot \frac{J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right)}{\left(W_n \frac{r}{a} \right)} \\
 & + \frac{H^2 w^2 r^2 \cos^2 \vartheta}{c^2} - \\
 & - \frac{4 H^2 w^2 a}{c^2} \cos^2 \vartheta \sum_1^\infty B_n W_n \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_n \frac{h}{a} \right)} r J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right) \\
 & + \left(\frac{2 a H w}{c} \right)^2 \cos^2 \vartheta \sum_1^\infty \sum_1^\infty B_m B_n W_m W_n \\
 & \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_m \frac{z}{a} \right) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_m \frac{h}{a} \right) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_n \frac{h}{a} \right)} J_1 \left(W_m \frac{r}{a} \right) J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right), \\
 & \left. \right\}
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

welche sich indessen bedeutend vereinfachen läßt.

Wir behandeln zuerst die hier auftretenden Doppelsummen die wir der Reihe nach mit S_1 , S_2 , S_3 bezeichnen wollen. Nach Ausführung der Integration über ϑ heben wir den Faktor $\left(\frac{2 a H w}{c} \right)^2 \pi$ heraus und führen die Integration über r und z unter den Summenzeichen aus. Dann schreiben sich die Doppelsummen:

$$\begin{aligned}
& S_1 + S_2 + S_3 \\
= & \sum_1^\infty \sum_1^\infty B_m B_n W_m W_n \int_{-h}^{+h} \frac{\mathfrak{E} \sin \left(W_m \frac{z}{a} \right) \mathfrak{E} \sin \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_m \frac{h}{a} \right) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_n \frac{h}{a} \right)} dz \\
& \int_0^a \left\{ J_1' \left(W_m \frac{r}{a} \right) J_1' \left(W_n \frac{r}{a} \right) + J_1 \frac{\left(W_m \frac{r}{a} \left(J_1' \right) W_n \frac{r}{a} \right)}{W_m \left(\frac{r}{a} \right) W_n \left(\frac{r}{a} \right)} \right\} r \cdot dr \\
& + \sum_1^\infty \sum_1^\infty B_m B_n W_m W_n \int_{-h}^{-h} \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_m \frac{z}{a} \right) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_m \frac{h}{a} \right) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(W_n \frac{h}{a} \right)} dz \\
& \int_0^a J_1 \left(W_m \frac{r}{a} \right) J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right) r dr.
\end{aligned}$$

Schreiben wir das erste Integral in der Form:

$$\begin{aligned}
\int_0^a r J_1' \left(W_m \frac{r}{a} \right) J_1' \left(W_n \frac{r}{a} \right) dr \\
= a^2 \int_0^1 \varrho J_1' (W_m \varrho) J_1' (W_n \varrho) d\varrho
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Abkürzung $\varrho = r/a$ und integrieren partiell, so erhalten wir

$$\int_0^a = \left[\frac{a^2}{W_n} J_1 (W_n \varrho) J_1' (W_m \varrho) \cdot \varrho \right]_0^1 - \frac{a^2}{W_n} \int_0^1 J_1 (W_n \varrho) \frac{d}{d\varrho} [\varrho J_1' (W_m \varrho)].$$

Das erste Glied ist an beiden Grenzen = 0 und verschwindet daher.¹⁾ Es ist also

$$\int_0^a = - \frac{a^2}{W_n} \int_0^1 J_1 (W_n \varrho) [W_m \varrho J_1'' (W_m \varrho) + J_1' (W_m \varrho)] d\varrho.$$

Nun ist aber $J_1 (W_m \varrho)$ definiert durch die Differentialgleichung:

$$J_1'' (W_m \varrho) + \frac{1}{\varrho} J_1' (W_m \varrho) + \left(1 - \frac{1}{W_m^2 \varrho^2} \right) J_1 (W_m \varrho) = 0^2)$$

1) Für $\varrho = 0$, wird $[\] = 0$, für $\varrho = 1$ wird $J_1' (W_n \varrho) = 0$.

2) Bei den hier vorkommenden Differentialquotienten ist nach dem Argument differenziert.

oder

$$W_m \varrho J_1''(W_m \varrho) + J_1'(W_m \varrho) = \frac{1}{W_m \varrho} J_1(W_m \varrho) - W_m \varrho J_1(W_m \varrho),$$

so daß wir schließlich erhalten

$$\begin{aligned} & \int_0^a r J_1' \left(W_m \frac{r}{a} \right) J_1' \left(W_n \frac{r}{a} \right) dr \\ &= - \int_0^a r \frac{J_1 \left(W_m \frac{r}{a} \right) J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right)}{\left(W_m \frac{r}{a} \right) \left(W_n \frac{r}{a} \right)} dr \\ & \quad + \frac{W_m}{W_n} \int_0^a r J_1 \left(W_m \frac{r}{a} \right) J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right) dr. \end{aligned}$$

Setzen wir nun diese Ausdrücke in die erste Doppelsumme ein, so bleibt von dem in ihr vorkommenden Integral nur

$$\frac{W_m}{W_n} \int_0^a r J_1 \left(W_m \frac{r}{a} \right) J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right) dr$$

übrig und dies verschwindet wegen der Orthogonalität des Funktionssystems $\sqrt{x} J_1(W_n x)$ für $m \neq n$. Das gleiche gilt natürlich auch von dem in der zweiten Doppelsumme vorkommenden Integral und daher wird, indem wir beide Summen zusammenziehen:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= \sum_1^\infty B_n^2 W_n^2 \int_{-a}^{+h} \frac{\Im \left(2 W_n \frac{z}{a} \right)}{\Im \left(W_n \frac{h}{a} \right)} dz \int_0^a r J_1^2 \left(W_n \frac{r}{a} \right) r dr \\ &= S_1 + S_2 + S_3 = 2 a^3 \sum_1^\infty B_n^2 W_n \Im \left(W_n \frac{h}{a} \right) \int_0^1 \varrho J_1^2(W_n \varrho) d. \end{aligned}$$

Führen wir die Integration aus (vgl. p. 468 Anm.) und setzen für B_n aus (31) seinen Wert ein, so ergibt sich:

$$S_1 + S_2 + S_3 = a^3 \sum_1^\infty \frac{\Im \left(W_n \frac{h}{a} \right)}{W_n^3 (W_n^2 - 1)}.$$

Wir haben nun noch die in (37) auftretende einfache Summe zu integrieren.

Die Integration über z und r ergibt (vgl. p. 468 Anm.)

$$\begin{aligned} \iint \Sigma &= \sum_1^{\infty} B_n W_n \int_{-a}^{+h} \frac{\Im \left(W_n \frac{z}{a} \right)}{\Im \left(W_n \frac{h}{a} \right)} dz \int_1^a r^2 J_1 \left(W_n \frac{r}{a} \right) dr \\ &= 2 a^4 \sum_1^{\infty} \frac{\Im \left(W_n \frac{h}{a} \right)}{W_n^3 (W_n^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir schließlich als Ausdruck für W :

$$(38) \quad W = \frac{\sigma H^2 \pi w^2}{c^2} \left[\frac{a^4 h}{2} - 4 a^5 \sum_1^{\infty} \frac{\Im \left(W_n \frac{h}{a} \right)}{W_n^3 (W_n^2 - 1)} \right] = Q w^3.$$

Die Dämpfungskonstante D (der durch das Magnetfeld bewirkten Dämpfung) ergibt sich aus (14):

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} D = \frac{Q}{2 \Theta} &= \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\delta} \frac{H^2}{c^2} \left[1 - 8 \frac{a}{h} \sum_1^{\infty} \frac{\Im \left(W_n \frac{h}{a} \right)}{W_n^3 (W_n^2 - 1)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\delta} \frac{H^2}{c^2} \cdot C \left(\frac{h}{a} \right), \end{aligned} \right.$$

worin C eine von h/a abhängige Konstante bedeutet.

§ 4. Diskussion der Formel für die Dämpfungskonstante.

Wir wollen hier zunächst die Konstante $C(h/a)$ betrachten. Es ist nach (39)

$$(40) \quad C \left(\frac{h}{a} \right) = 1 - 8 \frac{a}{h} \sum_1^{\infty} \frac{\Im \left(W_n \frac{h}{a} \right)}{W_n^3 (W_n^2 - 1)}.$$

Wir sehen, daß die Dämpfung eine Funktion h/a ist, also, daß ähnliche Zylinder dieselbe Dämpfung ergeben müssen.¹⁾

1) Das Resultat, daß die Dämpfung eine bloße Gestaltsfunktion ist, gilt bei dem der Rechnung zugrunde gelegten Grade der Näherung für beliebige Körper. Für die Kugel besagt es natürlich, daß die Dämpfung unabhängig vom Radius ist.

Wir wollen zwei Grenzfälle untersuchen, nämlich den eines *langen Zylinders* und den einer *dünnen Platte*.

Im ersten Falle wird $h/a = \infty$ und

$$(41) \quad C\left(\frac{h}{a}\right) = 1. \\ \left(\frac{h}{a} = \infty\right)$$

Im zweiten Falle wird $h/a = 0$ und

$$(42) \quad C\left(\frac{h}{a}\right) = 1 - 8 \sum_1^{\infty} \frac{1}{W_n^2 (W_n^2 - 1)} = 0.^{1)}$$

Für $0 < h/a < \infty$ gilt die Formel (40).

1) Der Wert von

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{W_n^2 (W_n^2 - 1)}$$

ist $1/8$, wie sich folgendermaßen zeigen läßt:

Es ist (vgl. [32] und p. 468 Anm.)

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{1}{W_n^2 (W_n^2 - 1)} &= \sum_1^{\infty} B_n W_n \int_0^1 x^2 J_1(W_n x) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx \sum_1^{\infty} B_n W_n J_1(W_n x). \end{aligned}$$

Setzt man nun für B_n

$$B_n = \frac{1}{2 W_n} \frac{\int_0^1 x^2 J_1(W_n x) dx}{\int_0^1 x J_1^2(W_n x) dx},$$

so wird

$$S = \int_0^1 x^2 dx \sum_1^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 x^2 J_1(W_n x) dx}{\int_0^1 x J_1^2(W_n x) dx}.$$

Andererseits gibt aber die Entwicklung von $x^{3/2}$ mittels des orthogonalen Funktionssystems: $\sqrt{x} J_1(W_n x)$

Die in ihr vorkommende Reihe

$$\sum_1^{\infty} \frac{\mathfrak{I}_0\left(W_n \frac{h}{a}\right)}{W_n^3 (W_n^2 - 1)}$$

konvergiert äußerst schnell und für die in der Praxis vorkommenden Zylinderformen, für die im allgemeinen $\frac{h}{a} > \frac{1}{4}$ sein dürfte, genügt es vollkommen, die beiden ersten Glieder derselben zu benutzen. Der hier begangene Fehler ist, wie aus beistehender Tabelle ersichtlich, $< \frac{1}{10^4}$.

Tabelle 1.¹⁾

n	W_n	W_n^3	$W_n^2 - 1$
1	1,8411	6,241	2,2396
2	5,33	152	27,41
3	8,54	621	71,9
4	11,7	1620	136
5	14,9	3240	221

$$x^{3/8} = \sum_1^{\infty} \frac{\int_0^1 x^2 J_1(W_n x) dx}{\int_1^{\infty} x J_1^2(W_n x) dx} \sqrt{x} J_1(W_n x),$$

daher ist

$$S = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx \cdot x = \frac{1}{8}.$$

1) Die Werte in dieser Tabelle sind Gray u. Mathews: „A treatise on Bessel Functions“ entnommen. In den zur Verfügung stehenden Tabellen sind jedoch die Wurzeln nur auf zwei Stellen ausgerechnet. Diese Genauigkeit genügt für alle W_n ($n > 1$) aber für die erste Wurzel war es angezeigt, eine Stelle mehr derselben zu berechnen. Dies geschah nach der folgenden Methode:

Setzt man den Wert von $W_n = 1,84 + \varepsilon$, so gibt die Taylorsche Entwicklung:

$$J_1'(1,84 + \varepsilon) = J_1'(1,84) + \varepsilon J_1''(1,84) = 0$$

und

Die Formel (40) ergibt dann mittels der aus der Tab. 1 entnommenen Werte die zu praktischen Zwecken ausreichende Formel:

$$(43) C\left(\frac{h}{a}\right) = 1 - \frac{a}{h} \left[0,5364 \cdot \mathfrak{Zg}\left(W_1 \frac{h}{a}\right) + 0,0019 \cdot \mathfrak{Zg}\left(W_2 \frac{h}{a}\right) \right].$$

Für einige häufig vorkommende Zylinderformen sind die Werte von

$$\mathfrak{Zg}\left(W_1 \frac{h}{a}\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Zg}\left(W_2 \frac{h}{a}\right)$$

aus Tabelle 2 zu entnehmen:

Tabelle 2.

$\frac{h}{a}$	$\mathfrak{Zg}\left(W_1 \frac{h}{a}\right)$	$\mathfrak{Zg}\left(W_2 \frac{h}{a}\right)$
$\frac{1}{4}$	0,430	0,87
$\frac{1}{3}$	0,546	0,94
$\frac{1}{2}$	0,726	0,99
$\frac{3}{4}$	0,880	1
1	0,951	1
$\frac{5}{4}$	0,980	1
$\frac{3}{2}$	0,992	1
$\frac{7}{4}$	1	1
2	1	1

Vermittelst dieser Werte wurde Tab. 3 für die zugehörigen Werte von $C(h/a)$ berechnet.

$$\varepsilon = - \frac{J_1'}{J_1''}.$$

Berücksichtigt man, daß

$$- J_1'' = \frac{1}{x} J_1' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) J_1$$

und

$$J_1' = J_0 - \frac{1}{x} J_1$$

ist, so erhält man:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{\left(\frac{J_0}{J_1}\right) - \frac{1}{x^2}}.$$

Setzt man für x seinen Wert $x = 1,84$ und für $J_0(1,84)$ und $J_1(1,84)$ ihre aus den Tabellen zu entnehmenden Werte, so ergibt die obige Formel:

$$\varepsilon = 0,0011.$$

Tabelle 3.

$\frac{h}{a}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	3
$C\left(\frac{h}{a}\right)$	0,0706	0,115	0,2173	0,3681	0,488	0,5779	0,644	0,6924	0,7309	0,8206

Die nachstehende Fig. 2 zeigt den Verlauf der Funktion.

Fig. 2.

Sie nähert sich von 0 ansteigend asymptotisch ihrem Maximum $C(\infty) = 1$. Je mehr der Zylinder abgeschnitten wird, um so mehr kommt das Störungsglied

$$8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im g\left(W_n \frac{h}{a}\right)}{W_n^3 (W_n^2 - 1)},$$

das dem Felde durch die Grundflächen aufgezwungen wird, zur Geltung.

§ 5. Experimentelle Prüfung der Formel für die Dämpfungskonstante.

a) Plan der Untersuchung. Versuchsanordnung.

Die hier theoretisch untersuchte Methode zur Bestimmung der Leitfähigkeit aus Dämpfungsbeobachtungen wurde von Hrn. R. H. Weber (Wied. Ann. **68**. p. 705. 1899) experimentell geprüft und zur Untersuchung der Leitfähigkeit von Zink-Kupfer-Legierungen verwendet. Hr. Weber benutzt zu seiner Untersuchung eine auf Grund gewisser vereinfachender Annahmen — er betrachtet Zylinder, deren Höhe sehr groß gegen ihren Radius ist — abgeleitete Formel $D = \text{const. } \sigma / \delta \cdot r$, die

sich unter Berücksichtigung der von ihm verwendeten biflaren Aufhängung als Spezialfall meiner Formel ergibt. Ich konnte mich daher darauf beschränken, nur zwei Punkte experimentell zu verifizieren, nämlich:

1. Die Bewegung verläuft als eine gedämpfte Schwingung, wie sie durch eine Differentialgleichung von der Form

$$\ddot{y} + A\dot{y} + By = 0$$

beschrieben wird.

2. Die Dämpfung D ist proportional $C(h/a)$.

Der erste von ihnen soll die Beschränkung auf die erste Näherung (vgl. das eingangs auseinandergesetzte Verfahren der sukzessiven Approximation) rechtfertigen; der zweite aber das Charakteristische meiner Formel, d. i. das Auftreten der Gestaltsfunktion $C(h/a)$ bei endlichen Zylindern bestätigen.

Ich gebe nun eine Beschreibung der Versuchsanordnung.

Zur Erzeugung des Feldes § wurde ein Solenoid mit hohlem Messingkern verwendet (vgl. Fig. 3).

Fig. 3.

Durch das feine Loch A hing der Versuchszylinder C in das Innere desselben. Der Zylinder war in einem dünnen Messingfaden suspendiert und konnte mittels der Schraube B tordiert werden. War dies geschehen, so führte er Schwingungen um seine Gleichgewichtslage aus. Die Amplituden derselben wurden auf bekannte Weise mittels Spiegelablesung gemessen. Die Dämpfung D ergab sich dann, sobald die

Schwingungszeit T gemessen war, auf folgende Weise: Die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \frac{Q+q}{2\Theta} \dot{y} + \frac{F}{\Theta} y = 0$$

ist:

$$(44) \quad y = e^{-\frac{Q+q}{2\Theta} t} \sin \sqrt{\frac{F}{\Theta}} \cdot t.$$

Nun wurden die Amplituden zu zwei um n ganze Perioden auseinanderliegenden Zeiten abgelesen. Bezeichnet man sie mit Φ_0 und Φ_n , die Schwingungszeit mit T , so ergibt die Formel (44)

$$(45) \quad \frac{Q+q}{2\Theta} = \frac{\ln \cdot \Phi_n - \ln \cdot \Phi_0}{nT}.$$

Um die hier mit D bezeichnete Größe zu erhalten, wurde zuerst die Dämpfung bei Vorhandensein eines Magnetfeldes bestimmt und von ihr dann die ohne Feld auftretende Dämpfung — eben die Luftdämpfung — subtrahiert. Die letztere brauchte natürlich nur für jeden Zylinder ein für allemal bestimmt zu werden.

Zur Verwendung kamen die vier Zylinderformen, die in Fig. 4 skizziert sind.

Das Material der Zylinder I, I', II und III, war von der hiesigen Elektrizitätsgesellschaft bezogenes Kupfer, das von Zylinder IV Zink. Das Verhältnis von Höhe und Radius war für

Fig. 4.

Zylinder I und I' $h/a = \frac{1}{3}$, für Zylinder II und IV $h/a = 1$ und für Zylinder III $h/a = \frac{3}{2}$.

Die absoluten Maße der Zylinder waren so bestimmt, daß alle bei nicht zu großen Gewichtsunterschieden ungefähr dasselbe Trägheitsmoment besaßen, so daß bei allen derselbe Faden verwendet werden konnte und die Schwingungszeiten ungefähr gleich waren.

Der durch das Solenoid gesandte Strom wurde gemessen und das Feld $\mathfrak{H}$ proportional der Stromstärke angesetzt.

b) Versuche zur Prüfung der zwei Punkte.

Ich gebe nun die Resultate der Versuche, die zur Verifikation der einzelnen Punkte des in a) skizzierten Planes gemacht wurden.

1. Hierzu ist es genügend, festzustellen, daß die aus den folgenden Beobachtungsergebnissen ersichtlichen Werte von

$$\frac{\log \Phi_n - \log \Phi_m}{m - n}$$

für jeden Zylinder nicht voneinander abweichen. Die Abweichung überschreitet (mit einer Ausnahme) nirgends 1 Proz. Hierdurch ist erwiesen, daß eine Kurve, in der die Logarithmen von Φ als Ordinanten, T als Abszissen aufgetragen sind, als gerade Linie verlaufen muß. Die nachstehende Fig. 5

Fig. 5.

zeigt überdies einige derartige bei verschiedenen Feldern aufgenommene Dämpfungskurven, die, wie ersichtlich, als Gerade verlaufen, deren Richtungstangente die Größe der jedesmaligen Dämpfung angibt.¹⁾ Punkt 1 kann daher wohl als durch das Experiment bestätigt erachtet werden.

1) Die diesen Kurven zugrunde liegenden Beobachtungen wurden am Anfang der Untersuchung nicht an Zylindern, sondern Kugeln vorgenommen. Bei einer Ablesung nach jeder Schwingung, wie sie hier gemacht wurde, ist es natürlich unvermeidlich (die Schwingungsdauer war etwa 7''), daß sich Beobachtungsfehler einschleichen. Bei den späteren Beobachtungen wurde, wie schon erwähnt, von fünf zu fünf Schwingungen abgelesen.

2. Die Verifikation von Punkt 2 zerfiel in zwei Teile.
 α) Zunächst sollte nachgewiesen werden, daß zwei ähnliche Zylinder die gleiche Dämpfung ergeben. Hierzu dienten die beiden in Gewicht und Größe wesentlich verschiedenen, aber ähnlichen Zylinder I und I'.

Die Beobachtungsergebnisse waren folgende:

Zylinder I bei Strom 1,2 Amp.:

$$KD = 29,01.$$

Zylinder I' bei Strom 1,2 Amp.:

$$KD = 28,74.$$

Hierin ist der auch im folgenden überall auftretende Zahlenfaktor $K = (\log \cdot e \cdot 10^4)$; er kommt dadurch in alle Beobachtungen, da die Logarithmen in Tab. 1 Briggsche Logarithmen sind.

Die Resultate stimmen, wie man sieht, bis auf 1 Proz. überein. Die Abweichung findet ihren Grund außer in einem später zu erörternden Umstand in kleinen Konstruktionsfehlern der Zylinder (0,1 mm bedeutet schon 1 Proz.), sowie darin, daß bei dem größeren Zylinder, der schon beinahe die ganze Breite des Hohlraumes ausfüllte, das Feld nicht mehr als vollkommen homogen angenommen werden darf. Aus dem letzteren Grund wurde auch in den folgenden Rechnungen die Beobachtung am kleineren Zylinder als die richtige angesehen.

β) Es wurden zwei Punkte der Kurve 2 verifiziert. Hierzu wurde mittels der Zylinder I, II und III das Verhältnis $D_{1/2}/D_1$ und $D_{3/2}/D_{1/2}$ experimentell bestimmt und gesehen, inwieweit dieser Quotient mit den theoretisch aus Tabelle 3 berechneten Quotienten $C_{(1)}/C_{(1/2)}$ und $C_{(3/2)}/C_{(1/2)}$ übereinstimmte.

Als Quotienten ergaben sich:

Experimentell	Theoretisch
$\frac{D_1}{D_{1/2}} = 1,36$	$\frac{C_{(1)}}{C_{(1/2)}} = 1,33$
$\frac{D_{3/2}}{D_{1/2}} = 5,61,$	$\frac{C_{(3/2)}}{C_{(1/2)}} = 5,58$

Die Abweichung des experimentellen vom theoretisch zu erwartenden Resultat ist also das erste Mal 2 Proz., das zweite Mal 0,6 Proz.

Die größere Abweichung des ersten Resultates findet dadurch ihre Erklärung, daß Zylinder II, wie sich später herausstellte, nicht frei von magnetischen Eigenschaften war. Dies bewirkte eine jedesmalige Verschiebung des Nullpunktes beim Einschalten des Feldes. Hierdurch finden auch die Abweichungen der beobachteten Quotienten

$$\frac{\log \Phi_0 - \log \Phi_s}{5}$$

voneinander ihre Erklärung, die bei diesem Zylinder einmal sogar 2 Proz. erreichen.

Unter Berücksichtigung der Resultate von (α) und (β) können wir also auch Punkt 2 als verifiziert betrachten.

§ 6. Verwendbarkeit der Methode zur Messung der Temperaturabhängigkeit von σ .

Der zur Untersuchung verwendete Apparat war zu absolut einwandfreien Messungen der Temperaturabhängigkeit von σ nicht geeignet, immerhin jedoch dürfte ein Grad der Genauigkeit erzielt worden sein, der die Brauchbarkeit der Methode für diese Art von Messungen zur Genüge erweist.

Um eine möglichst konstante Temperatur zu erzielen, wurde der Apparat durch Umhüllung mit Watte vom Außenraum isoliert. Hierauf wurde ein Strom von ungefähr 2 Amp. durch das Solenoid geschickt. Als die Temperatur der Luft in der Höhlung des Solenoids auf 84° gestiegen war, wurde der Strom so lange variiert, bis ein stationärer Zustand eingetreten war (was bei einer Stromstärke von 1,07 Amp. der Fall war). Auf dieser Temperatur wurde dann der Apparat für mehrere Stunden belassen und dann die Dämpfung untersucht. Auf dieselbe Weise wurde die Dämpfung bei 54° gemessen. (Hier trat ein stationärer Zustand bei 0,7 Amp. ein.) Natürlich waren in beiden Fällen kleine Temperaturschwankungen nicht zu vermeiden, sowie ein Temperaturgefälle zwischen Luft und Zylinder wahrscheinlich.

Zur Messung wurde Zylinder II verwendet.

Die Ergebnisse der Beobachtung waren:

Temperatur	Stromstärke	$K D$
84	1,2	103,8
84	1	72,54
84	0,8	46,61
54	0,8	50,2
54	1	78,01

Bildet man den Quotienten, der bei 54° und bei 84° beobachteten Dämpfungen, so ergibt sich für die bei $0,8$ Amp. gemessenen Werte: $1,08 \cdot 4$.

Für die bei 1 Amp. gemessenen Werte von $D: 1,08 \cdot 6$ im Mittel also $1,08 \cdot 5$.

Zum Schluß wurde die Leitfähigkeit der verwendeten Materialien aus den Beobachtungsergebnissen berechnet. Hierzu wurde das Feld $\mathfrak{S}$ mittels der ballistischen Galvanometermethode durch Vergleich mit einer Spule von bekannter Feldstärke gemessen. Es ergab sich $\mathfrak{S}_1 = 59 \cdot 93$ Gauss (für einen Strom von 1 Amp.). Die Werte für σ ergaben sich mittels Tab. 3 für Zylinder I, I', II und III als $3,17 \cdot 10^{17}$ (in Gauss'schen Einheiten) und $1,44 \cdot 10^{17}$ für Zylinder IV.

§ 7. Zusammenfassung.

1. Die Bewegung eines um seine Achse in einem konstanten Magnetfelde schwingenden Zylinders verläuft als gedämpfte Schwingung nach der Formel

$$\varphi = e^{-(D_{\mathfrak{S}} + D_{\mathfrak{L}})t} \cdot \sin(\nu t),$$

worin $D_{\mathfrak{S}}$ die durch das Feld, $D_{\mathfrak{L}}$ die durch den Luftwiderstand hervorgerufene Dämpfung mißt.

2. Es ergibt sich $D_{\mathfrak{S}}$ als eine Funktion des äußeren Feldes, der Dichte und Leitfähigkeit des Zylinders, sowie des Verhältnisses (h/a) nach der Formel (39)

$$D_{\mathfrak{S}} = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\delta} \cdot \frac{\mathfrak{S}^2}{c^2} \cdot C \left(\frac{h}{a} \right).$$

Die Dämpfung ist also bei gleichem Material und gleichen äußeren Bedingungen eine bloße Gestaltsfunktion.

Die „Gestaltskonstante“ des Zylinders berechnet sich nach der Formel (40):

$$C\left(\frac{h}{a}\right) = 1 - 8 \frac{a}{h} \sum_1^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}_g\left(W_n \frac{h}{a}\right)}{W_n^3 (W_n^2 - 1)},$$

Für praktische Zwecke genügen zwei Glieder der Reihe, wobei der begangene Fehler unter $\frac{1}{10^4}$ bleibt und es gilt die Formel (43)

$$C\left(\frac{h}{a}\right) = 1 - \frac{a}{h} \left[0,536_4 \mathfrak{Z}_g\left(W_1 \frac{h}{a}\right) + 0,0019 \mathfrak{Z}_g\left(W_2 \frac{h}{a}\right) \right].$$

3. Die Methode ist zur Untersuchung der Leitfähigkeit als Funktion irgend einer anderen Zustandsgröße, z. B. der Temperatur, geeignet. Es wird in diesem Falle genügen, eine Kurve aufzunehmen, die D als Funktion der Temperatur gibt um damit gleichzeitig die Abhängigkeit von σ zu erhalten.¹⁾ Auch zur Untersuchung der absoluten Leitfähigkeit von Materialien, die sich nicht in die Form von Drähten bringen lassen, ist die Methode gut brauchbar.

Ich erfülle eine angenehme Pflicht, wenn ich hier Herrn Professor Kleiner, in dessen Laboratorium die experimentellen Untersuchungen ausgeführt wurden, und Herrn Professor P. Debye für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Unterstützung bei der Ausführung derselben aufrichtig danke.

1) Eine derartige Untersuchung bei tiefen Temperaturen wird gegenwärtig im hiesigen physikalischen Institut ausgeführt.

(Eingegangen 4. Juni 1913.)