SUR LA MARCHE DU CAVALIER.

Par M. **Camille Jordan**, à Paris.

Adunanza del 25 marzo 1888.

Considérons un échiquier illimité. Par le centre d'une de ses cases, menons deux axes de coordonnées parallèles aux rangées de l'échiquier; et prenons pour unité de longueur la largeur d'une case. Chacune des cases pourra être définie par les coordonnées de son centre, qui sont deux nombres entiers x, y .

Un cavalier étant posé sur la case initiale de l'échiquier, cherchons à déterminer le nombre minimum M de coups nécessaire pour l'amener sur une case donnée (m, n) .

Il résulte évidemment de la symétrie de l'échiquier que M ne change pas si l'on permute les coordonnées m, n ou si l'on change le signe de l'une d'elles. Nous pourrions donc supposer qu'on a

$$m \geq n \geq 0.$$

D'après la règle du jeu, le cavalier arriéré à une case (x, y) pourra passer au coup suivant sur l'une des huit cases

$$(x + 2, y + 1), (x + 2, y - 1), (x + 1, y + 2), (x + 1, y - 2)$$

$$(x - 2, y - 1), (x - 2, y + 1), (x - 1, y - 2), (x - 1, y + 2).$$

Nous représenterons ces huit coups possibles, dont les quatre derniers sont inverses des précédents, par

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ A^{-1} & B^{-1} & C^{-1} & D^{-1} \end{array}$$

et nous désignerons par

$$A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots$$

une suite de coups contenant α coups A , β coups B , γ coups C , etc., l'ordre de succession de ces coups n'ayant manifestement aucune influence sur le déplacement final obtenu.

La série de coups considérée doit par hypothèse faire passer le cavalier de la case (0, 0) à la case (m , n). Or aucun des coups employés n'augmente x de plus de deux unités. Le nombre des coups de la suite sera donc au moins égal à $\frac{m}{2}$, si m est pair, à $\frac{m+1}{2}$ si m est impair, et dans tous les cas au plus grand entier $E\left(\frac{m+1}{2}\right)$ contenu dans $\frac{m+1}{2}$. Nous avons donc l'inégalité

$$M \geq E\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

D'autre part, chacun des huit coups possibles accroît $x+y$ de l'un des quatre nombres ± 1 , ± 3 . Pour faire passer $x+y$ de sa valeur initiale 0 à sa valeur finale $m+n$, il faudra donc au moins μ coups, μ étant le plus petit multiple de 3 non supérieur à $m+n$; d'où l'inégalité

$$M \geq E\left(\frac{m+n+2}{3}\right).$$

Enfin, chaque coup modifiant $x+y$ d'un nombre impair, M et $m+n$ seront de même parité, d'où la congruence

$$M \equiv m+n \pmod{2}.$$

Ces préliminaires posés, deux cas seront à distinguer, suivant que $m \geq 2n$ ou $< 2n$.

PREMIER CAS : $m \geq 2n$. — Le nombre m peut être de la forme $2m'$ ou $2m' + 1$; et le nombre $m' - n$ qui ne sera pas négatif, pourra lui-même être de la forme 2λ ou $2\lambda + 1$, d'où quatre sous-cas à traiter séparément.

1° Soit $m = 2m'$, $m' - n = 2\lambda$. On aura $M \geq m'$. Mais on peut effectivement former une série de m' coups, à savoir

$$A^{m'-\lambda} B^{\lambda}$$

qui satisfasse aux conditions du problème. On aura donc dans ce cas $M = m'$.

2° Soit $m = 2m' + 1$, $m' - n = 2\lambda$. On aura $M \geq m' + 1$. Mais d'autre part la série des $m' + 1$ coups suivants

$$A^{m'-1-\lambda} B^{\lambda+1} C$$

satisfait au problème; donc $M = m' + 1$.

3° Soit $m = 2m'$, $m' - n = 2\lambda + 1$. On aura $M \geq m'$. Mais d'autre part

$$M \equiv m + n \equiv 3m' - 2\lambda - 1 \equiv m' + 1 \pmod{2}.$$

Donc $M \geq m' + 1$. D'ailleurs la série des $m' + 1$ coups

$$A^{m'-1-\lambda} B^{\lambda} C D$$

satisfait au problème; donc $M = m' + 1$.

4° Soit enfin $m = 2m' + 1$, $m' - n = 2\lambda + 1$. On aura $M \geq m' + 1$. D'autre part,

$$M \equiv m + n \equiv 3m' - 2\lambda \equiv m' \pmod{2}.$$

Donc $M \geq m' + 2$. Or la série des $m' + 2$ coups

$$A^{m'-2-\lambda} B^{\lambda+1} C^2 D$$

satisfait au problème. Donc $M = m' + 2$.

DEUXIÈME CAS : $m < 2n$. — Posons $m + n = \mu$, $m - n = \nu$. Ces deux nombres seront de même parité; d'ailleurs si l'on suppose $m = 2n - \alpha$, on aura

$$\mu = 3n - \alpha > 3(n - \alpha) > 3\nu.$$

Trois cas seront à distinguer suivant que μ sera de la forme $3\mu'$, $3\mu' + 1$ ou $3\mu' + 2$; mais on aura toujours $\mu' \geq \nu$.

1° Soit $\mu = 3\mu'$. Le nombre M sera au moins égal à μ' ; d'autre part $\nu \equiv \mu \equiv \mu' \pmod{2}$. On pourra donc écrire $\mu' - \nu = 2\lambda$. Cela posé, la série des μ' coups

$$A^{\mu'-\lambda} C^\lambda$$

satisfera au problème; car elle fera passer $x + y$ et $x - y$ de leurs valeurs initiales zéro aux valeurs finales

$$3(\mu' - \lambda) + 3\lambda = 3\mu' = \mu$$

$$\mu' - \lambda - \lambda = \mu' - 2\lambda = \nu$$

qu'elles doivent avoir. Donc on aura ici $M = \mu'$.

2° Soit $\mu = 3\mu' + 1$. On devra avoir $M \geq \mu' + 1$. D'ailleurs

$$\nu \equiv 3\mu' + 1 \equiv \mu' + 1 \pmod{2}.$$

On pourra donc poser

$$\mu' - \nu = 2\lambda + 1,$$

et l'on voit aisément que la série de $\mu' + 1$ coups

$$A^{\mu'-1-\lambda} C^{\lambda+1} B$$

satisfait à la question. Donc $M = \mu' + 1$.

3° Soit enfin $\mu = 3\mu' + 2$. On aura $M \equiv \mu' + 1$. Mais d'autre part $M \equiv \mu \equiv \mu' \pmod{2}$, donc $M \equiv \mu' + 2$. Enfin $\nu \equiv \mu \equiv \mu' \pmod{2}$, d'où $\mu' - \nu = 2\lambda$.

Cela posé, la série de $\mu' + 2$ coups

$$A^{\mu'-3-\lambda} C^{3+\lambda} B^2$$

satisfait au problème. Donc ici $M = \mu' + 2$.

Le problème que nous venons de traiter rentre comme cas particulier dans la question générale suivante :

Étant donné un système d'équations indéterminées à coefficients entiers

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = M_1 \\ (I) \quad & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = M_m \end{aligned}$$

déterminer, parmi les systèmes de solutions qu'il comporte, celle où la somme des variables x est minimum.

On sait que les solutions cherchées, en nombre infini, sont de la forme generale

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 + c_{11}t_1 + \dots + c_{1,n-m}t_{n-m} \\ &\vdots \\ x_n &= A_n + c_{n1}t_1 + \dots + c_{n,n-m}t_{n-m} \end{aligned}$$

où $(A_1, \dots, A_n)$ est une solution particulière des équations (I); $(c_{11}, \dots, c_{m1}), \dots, (c_{1, n-m}, \dots, c_{n, n-m})$ des solutions particulières, linéairement indépendantes, des mêmes équations privées de seconds membres; enfin $t_1, \dots, t_{n-m}$ des entiers arbitraires, positifs ou négatifs.

Si l'on pose en particulier $t_1 = \pm 1$, $t_2 = \dots = t_{n-m} = 0$, on obtiendra les deux solutions

$$(A_I \pm c_{II}, \dots, A_n \pm c_{nI}).$$

Comparons la somme des modules dans ces solutions et dans la solution primitive $A_1, \dots, A_n$, à laquelle elles sont contigües.

Si nous admettons que l'on ait

$$(2) \quad \text{mod } A_1 \overline{\succ} \text{mod } c_{11}, \dots, \text{mod } A_n \overline{\succ} \text{mod } c_{n1},$$

on aura en général

$$\text{mod } (A_i \pm c_{i1}) = \text{mod } A_i \pm \varepsilon_i c_{i1},$$

ε_i désignant une unité de même signe que A_i .

On aura donc

$$\sum \text{mod } (A_i \pm c_{i1}) - \sum \text{mod } A_i = \pm \sum \varepsilon_i c_{i1}.$$

Donc l'une des deux solutions donnera une somme de modules moindre que la solution primitive, à moins que l'on n'ait

$$\sum \varepsilon_i c_{i1} = 0,$$

auquel cas les trois solutions auront même somme de modules. Mais alors, soit, pour fixer les idées, A_k celle des quantités A qui a le plus petit module; sur les deux quantités $A_k \pm c_{k1}$ qui la remplacent respectivement dans les deux solutions contigües que nous considérons, il y en aura une dont ce module sera $< \text{mod } A_k$.

Donc toute solution $(A_1, \dots, A_n)$ satisfaisant aux inégalité (2) est contigüe à une autre solution dans laquelle la somme des modules est diminuée, ou cette somme restant constante, le module minimum est diminué.

En passant de cette seconde solution à sa contigüe, on diminuera de nouveau la somme des modules ou le module minimum et l'on pourra poursuivre cette réduction jusqu'à ce qu'on arrive à une solution $(B_1, \dots, B_n)$ pour laquelle l'une au moins des inégalités

$$\text{mod } B_1 \overline{\succ} \text{mod } c_{11}, \dots, \text{mod } B_n \overline{\succ} \text{mod } c_{n1}$$

cesse d'avoir lieu.

Soit, pour fixer les idées,

$$\text{mod } B_i < \text{mod } c_{ii}.$$

La solution générale des équations (1) sera

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1 + c_{11}t_1 + \dots + c_{1,n-m}t_{n-m} \\ &\vdots \\ x_n &= B_n + c_{n1}t_1 + \dots + c_{n,n-m}t_{n-m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Soit δ le plus grand commun diviseur des coefficients $c_{11}, \dots, c_{1, n-m}$.
Posons

$$\frac{c_{11}t_1 + \dots + c_{1,n-m}t_{n-m}}{\delta} = u_1.$$

On pourra déterminer $n - m - 1$ fonctions linéaires $u_2, \dots, u_{n-m}$ des variables t telles que le déterminant des fonctions $u_1, \dots, u_{n-m}$ soit égal à l'unité. Les équations qui lient les u avec les t étant résolues par rapport à ces dernières variables, permettront de les exprimer par des fonctions linéaires des u , à coefficients entiers. Substituant ces valeurs dans les équations (3) elles prendront la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1 + \delta u_1 \\ x_2 &= B_2 + d_{21} u_1 + d_{22} u_2 + \dots + d_{2,n-m} u_{n-m} \\ &\vdots \\ x_n &= B_n + d_{n1} u_1 + d_{n2} u_2 + \dots + d_{n,n-m} u_{n-m} \end{aligned}$$

où les u pourront prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives.

Posons en particulier $u_1 = 0$, $u_2 = \pm 1$, $u_3 = \dots = u_{n-m} = 0$; nous obtiendrons deux solutions nouvelles

$$(B_1, B_2 \pm d_{22}, \dots, B_n \pm d_{n2})$$

contigues à $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ par rapport à la variable u_2 .

Si l'on suppose

$$(4) \quad \text{mod } B_2 \overline{\succ} d_{22}, \dots, \text{mod } B_n \overline{\succ} d_{n2}$$

on aura, en désignant par ϵ'_i une unité de même signe que B_i ,

$$\sum \text{mod } (B_i \pm d_{i2}) - \sum \text{mod } B_i = \pm \sum_2^n \epsilon'_i d_{i2}.$$

La somme des modules sera donc diminuée dans l'une des solutions nouvelles, à moins qu'on n'ait

$$\sum \epsilon'_i d_{i2} = 0,$$

auquel cas elle restera la même dans les trois solutions. Soit alors B_k celle des quantités $B_2, \dots, B_n$ qui a le plus petit module, on pourra déterminer le double signe dans l'expression $B_k \pm d_{k2}$ de telle sorte que son module soit $< \text{mod } B_k$.

Donc toute solution satisfaisant aux inégalités (4) est contigue à une autre dans laquelle la somme des modules est diminuée, ou cette somme restant constante, le plus petit des modules des quantités $B_2, \dots, B_n$ sera diminué.

En répétant cette réduction, on arrivera, sans jamais accroître la somme des modules, à une solution où l'une au moins des inégalités (4) cessera d'avoir lieu.

Soit $(B_1, C_2, \dots, C_n)$ cette solution, et supposons pour fixer les idées

$$\text{mod } C_2 < \text{mod } d_{21}.$$

La forme générale des solutions sera

$$x_1 = B_1 + \delta u_1$$

$$x_2 = C_2 + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \dots + d_{2, n-m}u_{n-m}$$

$$\dots$$

$$x_n = C_n + d_{n1}u_1 + d_{n2}u_2 + \dots + d_{n, n-m}u_{n-m}.$$

Soit δ' le plus grand commun diviseur de $d_{22}, \dots, d_{2,n-m}$ et soient

$$v_2 = \frac{d_{22}u_2 + \dots + d_{2,n-m}u_{n-m}}{\delta'}, v_3, \dots, v_n$$

des fonctions linéaires des u , de déterminant 1.

On pourra mettre la solution générale sous la forme

$$x_1 = B_1 + \delta u_1$$

$$x_2 = C_2 + d_{21}u_1 + \delta' v_2$$

$$x_3 = C_3 + d_{31}u_1 + e_{32}v_2 + \dots + e_{3,n-m}v_{n-m}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = C_n + d_{n1}u_1 + e_{n2}v_2 + \dots + e_{n,n-m}v_{n-m}$$

et l'on pourra, comme tout à l'heure, en prenant les contigues successives de la solution $(B_1, C_2, \dots, C_n)$ par rapport à v_3 arriver à une nouvelle solution $(B_1, C_2, D_3, \dots, D_n)$ où la somme des modules ne soit pas accrue, et où l'un au moins des coefficients D , tel que D_k , satisfasse à l'inégalité

$$\text{mod } D_k < \text{mod } e_{k3}.$$

Continuant ainsi, on voit que parmi les solutions $(x_1, \dots, x_n)$ des équations proposées, où la somme des modules est minimum, il en existe nécessairement une dans laquelle $m - n$ des quantités $x_1, \dots, x_n$ ont leurs modules inférieurs à des limites fixes et indépendantes des quantités $M_1, \dots, M_m$.

Ces solutions réduites sont en nombre limité. Supposons en effet que $x_{m+1}, \dots, x_n$ aient leurs modules limités. À chacun des systèmes de valeurs en nombre limité dont ces variables sont susceptibles correspond un seul système de valeurs de $x_1, \dots, x_m$ défini par les équations (1) (lequel système devra même être rejeté s'il donne des valeurs fractionnaires).

Le minimum cherché de la somme des modules s'obtiendra donc par un nombre limité d'opérations. Il suffit en effet de déterminer cette somme dans chacune des solutions réduites et de s'arrêter à celles où cette somme est minimum.

Paris, 13 mars 1888.

J O R D A N .