SULLE FUNZIONI ABELIANE COMPLETE DI PRIMA E SECONDA SPECIE.

MEMORIA

DEL PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

1°. Siano $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$, $2n+1$ numeri reali, differenti fra loro e tali che :

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n} < a_{2n+1}.$$

Posto :

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3) \dots (x-a_{2n-1}), \quad Q(x) = A(x-a_2)(x-a_4) \dots (x-a_{2n})(x-a_{2n+1})$$

$$R(x) = P(x) Q(x).$$

essendo A un numero positivo, si denomineranno funzioni Abeliane complete di prima specie (*) gli integrali definiti :

$$K_{r,s} = \frac{1}{2} \int_{a_{2s-1}}^{a_{2s}} \frac{P(x)}{(x-a_{2r-1}) \sqrt{R(x)}} dx,$$

e funzioni Abeliane complete di seconda specie gli :

$$L_{r,s} = \frac{1}{2} \frac{Q(a_{2r-1})}{P'(a_{2r-1})} \int_{a_{2s-1}}^{a_{2s}} \frac{P(x)}{(x-a_{2r-1})^2 \sqrt{R(x)}} dx.$$

Supponendo inoltre :

$$k_{r,s} = \frac{i}{2} \int_{a_{2s}}^{a_{2s+1}} \frac{P(x)}{(x-a_{2r-1}) \sqrt{R(x)}} dx, \quad l_{r,s} = \frac{i}{2} \frac{Q(a_{2r-1})}{P'(a_{2r-1})} \int_{a_{2s}}^{a_{2s+1}} \frac{P(x)}{(x-a_{2r-1})^2 \sqrt{R(x)}} dx$$

(nelle quali $i = \sqrt{-1}$), e :

$$(1) \quad \begin{aligned} K'_{r,s} &= k_{r,s} + k_{r,s+1} + \dots + k_{r,n} \\ L'_{r,s} &= l_{r,s} + l_{r,s+1} + \dots + l_{r,n} \end{aligned}$$

(*) Jacobi — De function. duarum variabil. quadrupliciter periodicis, etc. Giorn. di Crelle. T. 13. p. 76.

Weierstrass — Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale. Programma scolast. di Braunsberg. 1849.

Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Giornale di Crelle T. 47. pag. 293. Giornale di Liouville. Tom. XIX. pag. 262.

saranno $K'_{r,s}$, $L'_{r,s}$ le funzioni Abeliane complete di prima e seconda specie a moduli completivi.

Questi integrali definiti si renderanno determinati ritenendo che allorquando x è compreso fra a_m ed a_{m+1} sia :

$$\sqrt{R(x)} = i^{m-1} \sqrt{(-1)^{m-1} R(x)}$$

in modo che la quantità sotto il segno radicale risulti sempre positiva.

Provasi facilmente che nel caso di $n = 1$, cioè delle funzioni Ellittiche, supposto

$A = \frac{1}{a_3 - a_1}$ si hanno le :

$$K_{1,1} = K, \quad K'_{1,1} = K', \quad L_{1,1} = K - E, \quad L'_{1,1} = E'$$

per cui la relazione di Legendre :

$$KE' - K'(K - E) = \frac{\pi}{2}$$

prende la forma :

$$K_{1,1} L'_{1,1} - K'_{1,1} L_{1,1} = \frac{\pi}{2}.$$

2°. Consideriamo dapprima l'integrale multiplo :

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{1,1} & L_{1,1} & . & . & . & K_{n,1} & L_{n,1} \\ k_{1,1} & l_{1,1} & . & . & . & k_{n,1} & l_{n,1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ K_{1,n} & L_{1,n} & . & . & . & K_{n,n} & L_{n,n} \\ k_{1,n} & l_{1,n} & . & . & . & k_{n,n} & l_{n,n} \end{vmatrix}$$

Indicando con A il determinante :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \alpha_{1,1} & . & . & . & a_{n,1} & \alpha_{n,1} \\ a_{1,2} & \alpha_{1,2} & . & . & . & a_{n,2} & \alpha_{n,2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{1,2n} & \alpha_{1,2n} & . & . & . & a_{n,2n} & \alpha_{n,2n} \end{vmatrix}$$

nel quale :

$$a_{r,s} = \frac{1}{x_s - a_r} \quad \alpha_{r,s} = \frac{1}{(x_s - a_r)^2}$$

si avrà; rammentando la convenzione fatta intorno ai segni dei radicali, che;

$$\Delta = \frac{Q}{2^{2n}} \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \dots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} \frac{P(x_1) P(x_2) \dots P(x_{2n})}{\sqrt{\{(-1)^n R(x_1) R(x_2) \dots R(x_{2n})\}}} A$$

essendo:

$$Q = \frac{Q(a_1) Q(a_2) \dots Q(a_{2n-1})}{P'(a_1) P'(a_2) \dots P'(a_{2n-1})}$$

Quindi ponendo:

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{2n})$$

$$P = R'(a_1) R'(a_2) \dots R'(a_{2n-1})$$

si avrà pel valore di A trovato nella nota precedente (sullo sviluppo di un determinante equazione (2)):

$$\Delta = (-1)^n \frac{P}{2^{2n}} \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \dots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} \frac{\Pi(x_1, x_2, \dots, x_{2n})}{\varphi(a_1) \varphi(a_2) \dots \varphi(a_{2n-1}) \sqrt{\{(-1)^n R(x_1) R(x_2) \dots R(x_{2n})\}}}$$

Introduciamo ora le $2n+1$ variabili $y_1, y_2 \dots y_{2n+1}$ legate alle $x_1, x_2 \dots x_{2n}$ delle equazioni:

$$y_r^2 = \frac{\varphi(a_r)}{R'(a_r)}$$

e quindi legate fra loro dalla:

$$(2) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{2n+1}^2 = 1.$$

Questa nota trasformazione (*) conduce alla relazione:

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \dots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} \frac{\Pi(x_1, x_2, \dots, x_{2n})}{\varphi(a_1) \varphi(a_2) \dots \varphi(a_{2n-1}) \sqrt{\{(-1)^n R(x_1) \dots R(x_{2n})\}}} = \frac{2^{2n}}{P} \int \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_{2n}}{y_1^2 y_3^2 \dots y_{2n-1}^2 y_{2n+1}^2}^{(2n)}$$

essendo i limiti per l'integrale multiplo del secondo membro tutti i valori positivi delle $y_1, y_2 \dots y_{2n}$ che soddisfano l'equazione (2). Se ora osserviamo essere:

$$\int \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_{2n}}{y_1^2 y_3^2 \dots y_{2n-1}^2 y_{2n+1}^2}^{(2n)} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$$

(*) Rosenhain. Über die hyperelliptischen Transcendenten. Jacobi - **Mathematische Werke**. Band II^o. pag. 308.

si avrà sostituendo che :

$$(3) \quad \Delta = \left(\frac{\pi}{2} \right)^n.$$

3°. Le trasformazioni mediante le quali abbiamo sopra ottenuto il valore del determinante Δ valgono anche a determinare quelli dei determinanti parziali :

$$(4) \quad \frac{d\Delta}{dK_{r,s}}, \quad \frac{d\Delta}{dk_{r,s}}, \quad \frac{d\Delta}{dL_{r,s}}, \quad \frac{d\Delta}{dl_{r,s}}.$$

Infatti si hanno le

$$\frac{d\Delta}{dK_{r,s}} = \frac{i^n}{2^{2n-1}} Q \int \frac{P(x_1) \dots P(x_{2s-2}) P(x_{2s}) \dots P(x_{2n})}{\sqrt{\{R(x_1) \dots R(x_{2s-2}) R(x_{2s}) \dots R(x_{2n})\}}} \frac{dA}{da_{r,2s-1}} dx_1 \dots dx_{2s-2} dx_{2s} \dots dx_{2n},$$

$$\frac{d\Delta}{dk_{r,s}} = \frac{i^{n-1}}{2^{2n-1}} Q \int \frac{P(x_1) \dots P(x_{2s-1}) P(x_{2s+1}) \dots P(x_{2n})}{\sqrt{\{R(x_1) \dots R(x_{2s-1}) R(x_{2s+1}) \dots R(x_{2n})\}}} \frac{dA}{da_{r,2s}} dx_1 \dots dx_{2s-1} dx_{2s+1} \dots dx_{2n},$$

$$\frac{d\Delta}{dL_{r,s}} = \frac{i^n}{2^{2n-1}} Q \int \frac{P(x_1) \dots P(x_{2s-2}) P(x_{2s}) \dots P(x_{2n})}{\sqrt{\{R(x_1) \dots R(x_{2s-2}) R(x_{2s}) \dots R(x_{2n})\}}} \frac{dA}{d\alpha_{r,2s-1}} dx_1 \dots dx_{2s-2} dx_{2s} \dots dx_{2n},$$

$$\frac{d\Delta}{dl_{r,s}} = \frac{i^{n-1}}{2^{2n-1}} Q \int \frac{P(x_1) \dots P(x_{2s-1}) P(x_{2s+1}) \dots P(x_{2n})}{\sqrt{\{R(x_1) \dots R(x_{2s-1}) R(x_{2s+1}) \dots R(x_{2n})\}}} \frac{dA}{d\alpha_{r,2s}} dx_1 \dots dx_{2s-1} dx_{2s+1} \dots dx_{2n},$$

ritenendo sempre le variabili $x_1, x_2 \dots$ comprese fra a_1 ed a_2 , a_2 ed a_3 etc. ; e so-

stituendo in esse per $\frac{dA}{da_{r,2s-1}}$, $\frac{dA}{da_{r,2s}}$ etc. i loro valori trovati nella nota suddetta

(equazioni (4)) giungiamo facilmente alle :

$$\frac{d\Delta}{dK_{r,s}} = -\frac{i^n}{2^{2n-1}} P \int \frac{\Pi(x_1, \dots, x_{2s-2}, x_{2s}, \dots, x_{2n})}{\Psi \sqrt{\{R(x_1) \dots R(x_{2s-2}) R(x_{2s}) \dots R(x_{2n})\}}} \left(\frac{\psi(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})} \right)'_{a_{2r-1}} dx_1 \dots dx_{2s-2} dx_{2s} \dots dx_{2n}$$

$$\frac{d\Delta}{dk_{r,s}} = \frac{i^{n-1}}{2^{2n-1}} P \int \frac{\Pi(x_1, \dots, x_{2s-1}, x_{2s+1}, \dots, x_{2n})}{\Psi \sqrt{\{R(x_1) \dots R(x_{2s-1}) R(x_{2s+1}) \dots R(x_{2n})\}}} \left(\frac{\psi(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})} \right)'_{a_{2r-1}} dx_1 \dots dx_{2s-1} dx_{2s+1} \dots dx_{2n}$$

$$\frac{d\Delta}{dL_{r,s}} = -\frac{i^n}{2^{2n-1}} \frac{P}{R'(a_{2r-1})} \int \frac{\Pi(x_1, \dots, x_{2s-2}, x_{2s}, \dots, x_{2n})}{\Psi \sqrt{\{R(x_1) \dots R(x_{2s-2}) R(x_{2s}) \dots R(x_{2n})\}}} \psi(a_{2r-1}) dx_1 \dots dx_{2s-2} dx_{2s} \dots dx_{2n}$$

$$\frac{d\Delta}{dl_{r,s}} = \frac{i^{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{P}{R'(a_{2r-1})} \int \frac{\Pi(x_1, \dots, x_{2s-1}, x_{2s+1}, \dots, x_{2n})}{\Psi \sqrt{\{R(x_1) \dots R(x_{2s-1}) R(x_{2s+1}) \dots R(x_{2n})\}}} \psi(a_{2r-1}) dx_1 \dots dx_{2s-1} dx_{2s+1} \dots dx_{2n},$$

nelle quali :

$$\Psi = \psi(a_1) \psi(a_2) \dots \psi(a_{2n-1})$$

e $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x-x_{2s-1}}$ nella prima e terza, ed $= \frac{\varphi(x)}{x-x_{2s}}$ nella seconda e quarta. Quindi

di posto :

$$S(x) = \frac{R(x)}{x-a_m}, \quad \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x-x_m}$$

la ricerca dei valori degli integrali definiti (4) riducesi a quella dei due :

$$U_m = \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \dots \int_{a_{m-1}}^{a_{m+1}} dx_{m-1} \int_{a_{m+1}}^{a_{m+2}} dx_{m+1} \dots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} dx_{2n} \frac{\Pi(x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_{2n})}{\Psi \sqrt{\{S(x_1) \dots S(x_{m-1}) S(x_{m+1}) \dots S(x_{2n})\}}} \frac{1}{\sqrt{\psi(a_m)}} \left(\frac{\psi(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})} \right)'_{a_{2r-1}}$$

$$V_m = \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \dots \int_{a_{m-1}}^{a_{m+1}} dx_{m-1} \int_{a_{m+1}}^{a_{m+2}} dx_{m+1} \dots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} dx_{2n} \frac{\Pi(x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_{2n})}{\Psi \sqrt{\{S(x_1) \dots S(x_{m-1}) S(x_{m+1}) \dots S(x_{2n})\}}} \frac{\psi(a_{2r-1})}{\sqrt{\psi(a_m)}}.$$

Se sopra questi integrali eseguiamo la prima trasformazione accennata sopra, ponendo:

$$y_1^2 = \frac{\psi(a_1)}{S'(a_1)} \dots y_{m-1}^2 = \frac{\psi(a_{m-1})}{S'(a_{m-1})}, \quad y_{m+1}^2 = \frac{\psi(a_{m+1})}{S'(a_{m+1})} \dots y_{2n+1}^2 = \frac{\psi(a_{2n+1})}{S'(a_{2n+1})},$$

ed osserviamo che dalle equazioni :

$$\frac{\psi(a_1)}{R'(a_1)} + \frac{\psi(a_2)}{R'(a_2)} + \dots + \frac{\psi(a_{2n+1})}{R'(a_{2n+1})} = 0, \quad \frac{dy_s^2}{da_{2r-1}} = - \frac{y_s^2}{a_{2r-1} - a_s}$$

si deducono le due :

$$\frac{\psi(a_m)}{R'(a_m)} = s_1 y_1^2 + \dots + s_{m-1} y_{m-1}^2 + s_{m+1} y_{m+1}^2 + \dots + s_{2n+1} y_{2n+1}^2$$

$$\left(\frac{\psi(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})} \right)'_{a_{2r-1}} = \frac{S'(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})} \left\{ h_1 y_1^2 + \dots + h_{m-1} y_{m-1}^2 + h_{m+1} y_{m+1}^2 + \dots + h_{2n+1} y_{2n+1}^2 \right\}$$

nelle quali :

$$s_p = \frac{1}{a_m - a_p}, \quad h_p = \frac{1}{a_{2r-1} - a_p}, \quad h_{2r-1} = \left(\log \cdot \frac{S'(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})} \right)'_{a_{2r-1}}$$

potremo sugli integrali così trasformati operare una seconda trasformazione, della quale diede varj esempj Jacobi al Capo IV^o. della sua memoria « De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis etc. (*). Perciò daremo qui soltanto i risultati dell'integrazione, non presentando essa difficoltà dopo le considerazioni superiori.

4^o. Questi risultati, posti sotto la forma più opportuna per le conseguenze che vogliamo dedurne, sono i seguenti:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta}{dK_{r,s}} - \frac{d\Delta}{dK_{r,s-1}} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} l_{r,s-1}, \quad \frac{d\Delta}{dL_{r,s}} - \frac{d\Delta}{dL_{r,s-1}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} k_{r,s-1} \\ \frac{d\Delta}{dk_{r,s}} - \frac{d\Delta}{dk_{r,s-1}} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} L_{r,s}, \quad \frac{d\Delta}{dl_{r,s}} - \frac{d\Delta}{dl_{r,s-1}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} K_{r,s} \end{array} \right.$$

Indichiamo ora con ∇ il determinante

$$\begin{vmatrix} K_{1,1} & L_{1,1} & \dots & K_{n,1} & L_{n,1} \\ K'_{1,1} & L'_{1,1} & \dots & K'_{n,1} & L'_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{1,n} & L_{1,n} & \dots & K_{n,n} & L_{n,n} \\ K'_{1,n} & L'_{1,n} & \dots & K'_{n,n} & L'_{n,n} \end{vmatrix}$$

si otterranno facilmente per le (1) le relazioni:

$$\nabla = \Delta, \quad \frac{d\nabla}{dK_{r,s}} = \frac{d\Delta}{dK_{r,s}}, \quad \frac{d\nabla}{dL_{r,s}} = \frac{d\Delta}{dL_{r,s}}$$

$$\frac{d\nabla}{dK'_{r,1}} + \frac{d\nabla}{dK'_{r,2}} + \dots + \frac{d\nabla}{dK'_{r,s}} = \frac{d\Delta}{dk_{r,s}}, \quad \frac{d\nabla}{dL'_{r,1}} + \frac{d\nabla}{dL'_{r,2}} + \dots + \frac{d\nabla}{dL'_{r,s}} = \frac{d\Delta}{dl_{r,s}}$$

quindi dalle equazioni (3) (5) si dedurranno le:

$$(6) \quad \nabla = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$$

$$\frac{d\nabla}{dK_{r,s}} - \frac{d\nabla}{dK_{r,s-1}} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} l_{r,s-1}, \quad \frac{d\nabla}{dL_{r,s}} - \frac{d\nabla}{dL_{r,s-1}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} k_{r,s-1}$$

(*) Giornale di Crelle. Tom. 12. pag. 60.

$$(7) \quad \frac{d\varphi}{dK'_{r,s}} = - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} L_{r,s}, \quad \frac{d\varphi}{dL'_{r,s}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} K_{r,s};$$

e siccome alle due penultime, essendo per le (1) :

$$\begin{aligned} l_{r,s-1} &= L'_{r,s-1} - L'_{r,s} \\ k_{r,s-1} &= K'_{r,s-1} - K'_{r,s}, \end{aligned}$$

si ponno sostituire le :

$$\frac{d\varphi}{dK_{r,s}} - \frac{d\varphi}{dK_{r,s-1}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (L'_{r,s} - L'_{r,s-1}), \quad \frac{d\varphi}{dL_{r,s}} - \frac{d\varphi}{dL_{r,s-1}} = - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (K'_{r,s} - K'_{r,s-1})$$

si avranno anche le :

$$(8) \quad \frac{d\varphi}{dK_{r,m}} - \frac{d\varphi}{dK_{r,i}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (L'_{r,m} - L'_{r,i}), \quad \frac{d\varphi}{dL_{r,m}} - \frac{d\varphi}{dL_{r,i}} = - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (K'_{r,m} - K'_{r,i}).$$

Le equazioni (6) (7) danno origine alla seguente :

$$\sum_1^n \left(L'_{r,s} \frac{d\varphi}{dL'_{r,s}} + K'_{r,s} \frac{d\varphi}{dK'_{r,s}} \right) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} \sum_1^n (K_{r,s} L'_{r,s} - L_{r,s} K'_{r,s}) = \varphi$$

ossia :

$$\sum_1^n (K_{r,s} L'_{r,s} - L_{r,s} K'_{r,s}) = \frac{\pi}{2}.$$

Analogamente si ottengono da quelle equazioni le

$$\sum_1^n (K_{r,s} L'_{r,m} - L_{r,s} K'_{r,m}) = 0$$

$$\sum_1^n (K_{r,s} L_{r,m} - L_{r,s} K_{r,m}) = 0$$

e dalle (6) (8) la :

$$\sum_1^n (K'_{r,s} L'_{r,m} - K'_{r,m} L'_{r,s}) = 0.$$

Sono queste le $n(2n-1)$ relazioni fra le funzioni Abelianche complete di prima e seconda specie, già dimostrate con altri principj dal sig. Weierstrass nel programma scolastico succitato e dal medesimo riportate nella memoria del T.^o 47. del giornale

di Crelle pag. 302. Ora siccome dalla prima, seconda e quarta delle equazioni superiori deducersi facilmente essere :

$$(9) \quad \frac{d\varphi}{dK_{r,s}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} L'_{r,s}, \quad \frac{d\varphi}{dL_{r,s}} = - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} K'_{r,s},$$

evidentemente queste due equazioni terranno luogo delle (7); le $n(2n-1)$ relazioni suddette si potranno ritenere quali conseguenze delle equazioni (6) (7) (9), e reciprocamente.

La considerazione di queste ultime equazioni conduce a trovare altre $n(2n-1)$ relazioni, fra le funzioni Abelianne complete, di forma differente dalle superiori del sig. Weierstrass. Infatti essendo :

$$\sum_s^n \left(K_{m,s} \frac{d\varphi}{dL_{r,s}} + K'_{m,s} \frac{d\varphi}{dL'_{r,s}} \right) = 0$$

le seconde equazioni (7), (9) danno :

$$(10) \quad \sum_s^n (K_{r,s} K'_{m,s} - K_{m,s} K'_{r,s}) = 0$$

ed analogamente :

$$(11) \quad \sum_s^n (L_{r,s} L'_{m,s} - L_{m,s} L'_{r,s}) = 0$$

oltre le quali si hanno le due :

$$\sum_s^n (K_{r,s} L'_{m,s} - K'_{r,s} L_{m,s}) = 0$$

$$\sum_s^n (K_{r,s} L'_{r,s} - K'_{r,s} L_{r,s}) = \frac{\pi}{2}.$$

Le $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni (10) sono di molta importanza essendo fra sole funzioni Abelianne complete di prima specie e le loro complete, come pure le (11) riguardo a quelle di seconda specie.

Pavia Ottobre 1857.

*