Ueber analytische Ausdrücke mit hebbaren Unstetigkeiten.

Von

ALFRED PRINGSHEIM in München.

I. Definition und erste Beispiele.

Wenn eine Function $f(x)$ der reellen Variablen x so beschaffen ist, dass die Functionswerthe auf beiden Seiten einer gewissen Stelle $x = a$ beliebig wenig von einander differiren, sobald nur x hinlänglich der Stelle a genähert wird, während $f(a)$ selbst einen Werth besitzt, der von jenen Nachbarwerthen um ein Endliches oder Unendlichgrosses abweicht, so sagt man, $f(x)$ erleide an der Stelle $x = a$ eine *hebbare* Unstetigkeit (sofern ja durch Abänderung des Functionswerthes für diese einzelne Stelle die betreffende Unstetigkeit „gehoben“ werden kann). Präciser ausgedrückt muss sich also in einem solchen Falle bei beliebig klein vorgegebenem σ eine Grösse δ so fixiren lassen, dass für

$$0 < \delta_1 \leq \delta, \quad 0 < \delta_2 \leq \delta$$

die Differenz

$$|f(a + \delta_1) - f(a + \delta_2)| < \sigma$$

wird, während

$$\left. \begin{array}{l} |f(a + \delta_1) - f(a)| \\ |f(a - \delta_2) - f(a)| \end{array} \right\} > A$$

bleibt, wo A eine positive endliche Grösse bedeutet.

Diese Definition lässt sich offenbar mutatis mutandis auch sofort auf Functionen einer complexen Variablen übertragen, wobei dann naturgemäss derartige hebbare Unstetigkeiten nicht bloss in einzelnen Punkten sondern auch längs ganzer Linien gedacht werden können.

Riemann, der wohl zuerst auf die Möglichkeit derartiger Discontinuitäten aufmerksam gemacht haben dürfte*), hat meines Wissens kein Beispiel eines analytischen Ausdruckes mit der gedachten Eigenschaft angegeben. Dass aber wirklich im Sinne der älteren Mathematiker

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse: § 10 am Ende. (Ges. Werke, S. 21).

analytische d. h. durch arithmetische Operationszeichen darstellbare Functionen dieser Gattung existiren, hat Herr Seidel dargethan, indem er den folgenden Ausdruck construirte:*)

$$(1) \quad P = \lim P_n = \lim \frac{n}{x^n + x^{-n} + n} \quad (n = \infty),$$

welcher bei reeller Variabilität des x lediglich für $x = \pm 1$ den Werth 1 annimmt, sonst aber durchweg verschwindet, also in der That an den beiden Stellen $x = \pm 1$ eine hebbare Unstetigkeit erleidet — während bei complex veränderlichem x die nämliche Art von Discontinuität allgemein für $|x| = 1$, also längs der ganzen Peripherie des Einheitskreises auftritt.

Ein noch einfacheres Beispiel liefert auch derjenige Ausdruck, von welchem Herr Du Bois-Reymond zur Erläuterung der unendlich verzögerten Reihenconvergenz ausging,**) nämlich:

$$(2) \quad S = \lim S_n = \lim \frac{nx}{1 + nx} \quad (n = \infty)$$

welcher für alle reellen und complexen x mit Ausschluss von $x = 0$ den Werth 1, dagegen für $x = 0$ den Werth 0 hat.

Von ähnlicher Natur sind ferner die folgenden beiden von mir bei anderer Gelegenheit***) aufgestellten Ausdrücke

$$(1) \quad \begin{cases} \lim \left\{ \frac{n}{x^n + n} + \frac{nx^n}{nx^n + 1} \right\} \\ \lim \left\{ \frac{x^n}{x^n + n} + \frac{1}{nx^n + 1} \right\} \end{cases} \quad (n = \infty),$$

welche längs des Einheitskreises den Werth 2, sonst durchweg den Werth 1 annehmen.†)

*) Crelle's Journal, Bd. 73, S. 304.

**) „Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen“ — Antritts-Programm etc. S. 25. — Die Reihenform für den obigen Grenzwert, nämlich

$$S = \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{vx}{1+vx} - \frac{(v-1)x}{1+(v-1)x} \right\} = \sum_1^{\infty} \frac{x}{v^2x^2 + vx(2-x) - x + 1}$$

ist für den hier vorliegenden Zweck nicht brauchbar, weil bei Annäherung des x an den Nullpunkt von der negativen Seite her, die Reihe gerade in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeitsstelle $x = 0$ in Folge des Auftretens unendlich grosser Glieder unendlich oft unbrauchbar wird.

***) Math. Ann. Bd. XXII, S. 115.

†) Bei Beschränkung der Variablen x auf das reelle Gebiet wären etwa noch als besonders einfache Ausdrücke der betrachteten Art zu nennen:

$$\lim (\cos x)^n, \quad \lim (\sin x)^n, \quad \lim \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n.$$

Schliesslich wäre hier noch, wenn man die oben gegebene Definition der hebbaren Unstetigkeit dahin erweitert, dass an den betreffenden Unstetigkeitsstellen a der Ausdruck $f(a)$ eventuell auch unbestimmt werden darf, das Quadrat der von Herrn Weierstrass mitgetheilten Tannery'schen Function, nämlich

$$\lim \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^2 *$$

anzuführen, ein Ausdruck, welcher im allgemeinen den Werth 1 repräsentirt, längs des Einheitskreises unbestimmt wird.

Allen diesen Ausdrücken sind zweierlei charakteristische Merkmale gemeinsam, durch welche sie sich von den in der Analysis zumeist vorkommenden Functionalausdrücken unterscheiden, nämlich:

- 1) Sie besitzen mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen durchweg *constante* Werthe.
- 2) Sie haben die Form von expliciten Grenzwerten, welche ausser von der Variablen x von einem ins Unendliche wachsenden Parameter n abhängen.

Nun könnte man freilich ad 1) durch multiplicative oder additive Verbindung dieser Ausdrücke mit einer beliebig veränderlichen, an der betreffenden Stelle stetigen Function $\varphi(x)$ jene hebbare Unstetigkeit auch ohne weiteres auf irgendwie veränderliche Functionen übertragen: immerhin würde aber bei derartigen Combinationen — wie $P \cdot \varphi(x)$, $\varphi(x) + S$ — die hebbare Unstetigkeit nicht als ein wesentliches und untrennbares Ingrediens des veränderlichen Bestandtheiles der Function, sondern als eine rein äusserlich damit verbundene Zuthat erscheinen.

Ad 2) wäre zu bemerken, dass man jeden der obigen Grenzwerte auch in die analytisch üblichere Form einer convergirenden unendlichen Reihe umsetzen könnte, wie man ja jeden beliebigen Grenzwert $G = \lim G_n$ folgendermassen umformen kann:

$$G = G_x + \sum_{x}^{\infty} (G_{x+1} - G_x)$$

(worauf auch Herr Seidel a. a. O. ausdrücklich aufmerksam macht): indessen würde eine Reihe dieser Form immer nur einen sehr *speciellen* Reihentypus repräsentiren, nämlich denjenigen, welcher durch die Existenz einer rationalen Summatrix charakterisirt ist, wobei also die Summe der ersten n Glieder als rationale Function von n darstellbar ist.**)

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1881. S. 218.

**) Dass die betreffenden Reihen für den Fall einer complexen Variablen x — gerade so wie die Reihe für den Ausdruck (2) oben für negative x — in

Nach alledem müssen die obigen Ausdrücke den Eindruck ganz specieller ad hoc construirter Beispiele machen, welche die Möglichkeit hebbarer Discontinuitäten allenfalls wie ein ganz exceptionelles analytisches Curiosum erscheinen lassen, schwerlich aber die Vermuthung erwecken, dass das Auftreten der gedachten Erscheinung ein überaus häufiges ist, und dass unzählige — um mit Jacobi zu reden — „vernünftige“ Functionen solche Unstetigkeiten besitzen. Dass das letztere nun wirklich der Fall ist, soll die folgende Betrachtung lehren: es wird sich dabei zeigen, dass in der Theorie der Functionen einer reellen Variablen — und von solchen soll im folgenden durchweg nur die Rede sein — die hebbaren Unstetigkeiten ganz und garnichts ungewöhnliches sind, dass sie beispielsweise noch weit häufiger auftreten, als die sprunghaften Veränderungen, welche seit der Entdeckung der Fourier'schen Reihen Jedermann geläufig geworden sind. Die ungleichmässige Convergenz, welche die Ursache jener *sprunghaften* Aenderungen bildet, erzeugt nämlich noch viel öfter *hebbare* Unstetigkeiten: insbesondere wird sich ergeben, dass *jede* bedingt convergirende Reihe die Bildung von unendlich vielen Functionen mit der verlangten Eigenschaft ermöglicht.

II. Unbedingt convergirende Reihen mit einer Stelle bedingter Convergenz.

Es werde mit $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, . . . eine unendliche Folge von Functionen der reellen Variablen x bezeichnet, welche innerhalb eines gewissen Intervalles $x_0 < x < x_1$ stetig sind. Ist sodann die Reihe

$$S(x) = \sum_0^{\infty} \varphi_n(x)$$

für dieses Intervall im allgemeinen *unbedingt*, nur für eine gewisse Stelle a desselben *bedingt*, aber *gleichmässig* convergent, so stellt die Summe $S(x)$ eine für das ganze Intervall, insbesondere auch für $x=a$ stetige Function von x dar. Werden jetzt die Glieder der obigen Reihe irgendwie umgestellt, so wird bei geeigneter Wahl der neuen Anordnung an der Stelle a , wo die Reihe nur bedingt convergirt, jede beliebige Summe hervorgebracht werden können, während für das ganze übrige Intervall — auch in der beiderseitigen unmittelbaren Nachbarschaft der Stelle a — die Summe der Reihe in keiner Weise alterirt wird. Es wird somit die Summe der gehörig umgeordneten Reihe eine

der unmittelbaren Nähe der Unstetigkeitsstelle bzw. Unstetigkeitslinie unendlich oft versagen, habe ich bereits früher gelegentlich der Betrachtung der Ausdrücke (3) betont: a. a. O. S. 116.

Function darstellen, welche an der Stelle a eine hebbare Unstetigkeit von beliebig vorzuschreibender Grösse besitzt.

Von diesem allgemeinen Principe mache ich nun die folgende Anwendung. Es sei $\sum_0^{\infty} c_v$ eine bedingt convergirende Reihe, $f(x)$ eine von der reellen Veränderlichen x abhängige Function (die übrigens auch complexe Werthe annehmen darf). Ferner besitze der absolute Betrag von $f(x)$ an irgend einer Stelle $x = a$, an welcher $f(x)$ als stetig vorausgesetzt wird, ein Maximum, sodass also innerhalb eines gewissen die Stelle a enthaltenden Intervalles $x = x_0$ bis $x = x_1$ $\left| \frac{f(x)}{f(a)} \right|$ durchweg < 1 , nur für $x = a$ gerade $= 1$ wird. Alsdann ist die Reihe

$$S(x) = \sum_0^{\infty} c_v \left\{ \frac{f(x)}{f(a)} \right\}^v$$

für das Intervall $x_0 \dots x_1$ *unbedingt* convergent mit einziger Ausnahme der Stelle $x = a$, wo sie in $\sum c_v$ übergeht und also der Voraussetzung gemäss nur bedingt convergirt. Es stellt somit $S(x)$ als Summe einer convergenten Potenzreihe in $f(x)$ innerhalb jenes Intervalles — und zwar nach dem Abel-Dirichlet'schen Stetigkeitssatze einschliesslich der Stelle $x = a$ — eine stetige Function von $f(x)$ und folglich, soweit $f(x)$ selbst stetig, eine solche von x dar: letzteres gilt also insbesondere für die Stelle $x = a$. Hingegen wird wiederum die gehörig umgeordnete Reihe, deren Summe mit $\overline{S(x)}$ bezeichnet werden möge, an der Stelle a einen von $S(a) = \sum c_v$ um eine beliebig vorzuschreibende Grösse abweichende Werthe annehmen, während im ganzen übrigen Intervalle $\overline{S(x)}$ mit $S(x)$ völlig übereinstimmt: die Function $\overline{S(x)}$ besitzt also für $x = a$ eine hebbare Unstetigkeit.

So convergirt z. B. die folgende Reihe

$$c_0 + c_1 \cos^2 x + c_2 \cdot \cos^4 x + \dots + c_n \cos^{2n} x + \dots$$

für alle endlichen reellen x mit Ausschluss derjenigen von der Form $x = \pm m\pi$ (wo m eine ganze positive Zahl einschliesslich der Null bedeutet) *unbedingt*, für $x = \pi$ jedoch nur bedingt, sofern die Reihe

$\sum c_v$ wiederum als bedingt convergent vorausgesetzt wird: ihre Summe erleidet mithin bei geeigneter Umordnung der Glieder an allen Stellen $x = \pi$ die nämliche hebbare Unstetigkeit. Nimmt man etwa speciell $c_v = (-1)^v \frac{1}{v}$, $c_0 = 0$, so hat man bekanntlich

$$S(x) = \frac{\cos^2 x}{1} - \frac{\cos^4 x}{2} + \frac{\cos^6 x}{3} - \dots = \lg(1 + \cos^2 x)$$

und diese Reihe ist convergent und stetig für alle endlichen reellen x , auch diejenigen von der Form $x = \pm m\pi$, wo

$$\cos(\pm m\pi) = \cos m\pi = (-1)^m$$

und

$$S(\pm m\pi) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \lg 2$$

wird. Ordnet man hingegen die obige Reihe beispielsweise so um, dass auf je zwei positive Glieder je ein negatives folgt, also folgendermassen:

$$\overline{S}(x) = \sum_0^{\infty} \left\{ \frac{\cos^{8\nu+2} x}{4\nu+1} + \frac{\cos^{8\nu+6} x}{4\nu+3} - \frac{\cos^{4\nu+4} x}{2\nu+2} \right\},$$

so erscheint an allen Stellen $x = \pm m\pi$ die Summe

$$\overline{S}(\pm m\pi) = \sum_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{4\nu+1} + \frac{1}{4\nu+3} - \frac{1}{2\nu+2} \right\} = \frac{3}{2} \lg 2$$

und es erhält somit $\overline{S}(x)$ dort plötzlich das Increment $\frac{1}{2} \lg 2$.

Aehnliches gilt — wenn $\sum c_\nu$ wieder als nur bedingt convergent vorausgesetzt wird — von den Reihen:

$$\sum_0^{\infty} \frac{c_\nu}{(1+x^2)^\nu}, \quad \sum c_\nu \left(\frac{\sin x}{x} \right)^\nu,$$

deren Summen in dieser Anordnung für *alle* reellen x endlich und stetig sind, hingegen bei geeigneter Umordnung an der Stelle $x=0$ unstetig werden*), während bei der folgenden Reihe:

$$\sum_0^{\infty} c_\nu \left(\frac{p-x^2}{p} \right)^\nu,$$

wo p eine positive Grösse bedeutet, das Convergenz-Intervall die Grenzen $\pm \sqrt{2p}$ besitzt und der Werth $x=0$ wiederum als kritische Stelle der gedachten Art erscheint. —

Die vorstehende Betrachtung lässt sich u. a. benützen, um eine eigenthümliche analytische Darstellung für solche Functionen zu erhalten, welche mit einer gegebenen Function $f(x)$ durchweg übereinstimmen, jedoch an einer beliebig vorzuschreibenden Stelle $x=a$ eine hebbare

*) Hierbei mag, um für $x=0$ jede Unbestimmtheit zu vermeiden, unter $\frac{\sin x}{x}$ die Reihe

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

verstanden werden.

Unstetigkeit besitzen. Hierzu ist offenbar mit Benützung des bisher gesagten nur zweierlei nöthig, nämlich: 1) aus der gegebenen Function $f(x)$ eine andere $\Phi(fx)$ zu bilden, deren absoluter Betrag als absolutes Maximum den Werth 1 und diesen nur an der einen Stelle $x = a$ erreicht; 2) die Coefficienten c_v der Reihe $S(x) = \sum c_v \Phi^v(fx)$ so zu wählen, dass die letztere eine Summe von der Form $F(fx)$ besitzt, aus der sich $f(x)$ eindeutig als Function von $S(x)$ darstellen lässt. Ergiebt sich dann etwa aus der Gleichung

$$S(x) = \sum c_v \Phi^v(fx) = F(fx)$$

die Beziehung

$$f(x) = \psi(Sx) = \psi \left\{ \sum c_v \Phi^v(fx) \right\},$$

so ist offenbar $\psi(S(x))$ ein Ausdruck, welcher bei geeigneter Umordnung der Reihe $S(x)$ an der Stelle $x = a$ hebbar unstetig wird, im übrigen aber durchweg mit $f(x)$ übereinstimmt.

Aus der unbegrenzten Anzahl von Möglichkeiten, welche sich für die wirkliche Ausführung dieser Methode darbieten, möge wegen ihrer relativen Einfachheit die folgende hervorgehoben werden, bei welcher der resultirende Endausdruck mit einer beliebig vorgelegten *reellen* Function $f(x)$ zusammenfällt, jedoch an einer einzelnen vorgeschriebenen Stelle $x = a$ einen rein imaginären Unstetigkeitszuwachs von ebenfalls beliebig vorzuschreibender Grösse erhält.

Sei also $f(x)$ eine Function, welche überhaupt nur reelle Werthe annimmt oder doch nur für ein gewisses Intervall in Betracht kommt, wo dies der Fall ist. An der Stelle a , wo schliesslich die hebbare Unstetigkeit zum Vorschein kommen soll, wird $f(x)$ als stetig vorausgesetzt. Nimmt dann $f(x)$ den Werth $f(a)$ überhaupt bzw. in dem betrachteten Intervalle nur einmal — nämlich für $x = a$ — an, so wird offenbar die Differenz $f(x) - f(a)$ nur für $x = a$ verschwinden, und daher der absolute Betrag von $1 + i \{f(x) - f(a)\}$ nämlich

$$\sqrt{1 + \{f(x) - f(a)\}^2}$$

abgesehen von der Stelle $x = a$ stets > 1 , an der Stelle $x = a$ gerade $= 1$ sein, und folglich wird der reciproke Werth von $1 + i \{f(x) - f(a)\}$ den Bedingungen des oben mit $\Phi(fx)$ bezeichneten Ausdruckes genügen.

Nimmt dagegen $f(x)$ den Werth $f(a)$ auch noch für andere Werthe von x an, so wird offenbar ein Ausdruck der folgenden Form

$$1 + (x - a)^2 + i \{f(x) - f(a)\}$$

einen absoluten Betrag, nämlich

$$\sqrt{\{1 + (x - a)^2\}^2 + \{f(x) - f(a)\}^2}$$

besitzen, welcher *nur* für $x = a$ den Werth 1 annimmt, sonst aber stets > 1 bleibt.

Man umfasst offenbar beide Fälle, wenn man setzt

$$(5) \quad \frac{1}{1 + \varepsilon(x-a)^2 + i \{f(x) - f(a)\}} = \Phi(fx) = \varphi(x),$$

sofern unter ε der Werth 0 oder 1 verstanden wird, je nachdem $f(x)$ den Werth $f(a)$ nur *einmal* oder *öfter* annimmt: man hat alsdann $\varphi(a) = 1$, für jedes von a verschiedene x hingegen $|\varphi(x)| < 1$.

Als einfachste Repräsentanten für die Reihe $\sum c_v \varphi^v(x)$ bieten sich sodann die binomische Reihe für einen negativen ächt gebrochenen Exponenten und die logarithmische Reihe dar, welche beide für $|\varphi(x)| < 1$ unbedingt, für $\varphi(x) = +1$ noch bedingt convergiren. Es ergibt sich:

$$(6) \quad \{1 + \varphi(x)\}^{-\frac{1}{m}} = 1 - \frac{1}{m} \varphi(x) + \frac{1 \cdot (1+m)}{m \cdot 2m} \varphi^2(x) \\ - \frac{1 \cdot (1+m) \cdot (1+2m)}{m \cdot 2m \cdot 3m} \varphi^3(x) + \dots \\ = S(x) \quad (\text{wo } m \text{ eine ganze Zahl } > 1 \text{ bedeutet})$$

eine Reihe, welche an der einen Stelle $x = a$, wegen $\varphi(a) = 1$ in die *bedingt* convergente Reihe

$$S(a) = 1 - \frac{1}{m} + \frac{1 \cdot (1+m)}{m \cdot 2m} - \frac{1 \cdot (1+m) \cdot (1+2m)}{m \cdot 2m \cdot 3m} + \dots = \sqrt[m]{\frac{1}{2}}$$

übergeht, für alle anderen reellen x aber *unbedingt* convergirt. Löst man die obige Gleichung nach $\varphi(x)$ auf, so folgt

$$\varphi(x) = \frac{1 - S^m(x)}{S^m(x)}$$

also

$$\frac{1}{\varphi(x)} = 1 + \varepsilon(x-a)^2 + i \{f(x) - f(a)\} = \frac{1}{1 - S^m(x)} - 1,$$

woraus schliesslich:

$$(7) \quad f(x) = f(a) + i \left\{ \varepsilon(x-a)^2 + 2 + \frac{1}{S^m(x) - 1} \right\}.$$

Diese Darstellung von $f(x)$ ist gültig für *alle* reellen x , einschliesslich $x = a$, solange die Reihe $S(x)$ in der ursprünglichen Anordnung genommen wird.

Bezeichnet man jetzt aber mit $\overline{S(x)}$ wiederum irgend eine Umordnung der Reihe $S(x)$ und setzt analog mit Gl. (7):

$$(8) \quad \overline{f(x)} = f(a) + i \left\{ \varepsilon(x-a)^2 + 2 + \frac{1}{\overline{S^m(x)} - 1} \right\},$$

so hat man — abgesehen von der Stelle $x = a$ — durchweg $\overline{f(x)} = f(x)$,

während — bei geeigneter Wahl der Umordnung $\overline{S(x)}$ — die Function $\overline{f(x)}$ für $x = a$ um eine beliebig vorzuschreibende rein imaginäre Grösse von $f(a)$ abweichen wird. Soll dieser Zuwachs etwa die beliebig gegebene Grösse λi besitzen, sodass also

$$\overline{f(a)} = f(a) + \lambda i$$

wird, so hat man nur zu beachten, dass aus Gl. (8) folgt:

$$\overline{f(a)} = f(a) + i \left\{ 2 + \frac{1}{S^m(a) - 1} \right\}$$

d. h.

$$\lambda = 2 + \frac{1}{S^m(a) - 1}$$

und daher

$$(9) \quad \overline{S(a)} = \sqrt[m]{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}} = S(a) + \left\{ \sqrt[m]{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}} - \sqrt[m]{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Ist m eine ungerade Zahl, so ist $\sqrt[m]{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}}$ stets reell und in Folge dessen λ an keinerlei Grenzen gebunden, da man ja der Reihe $S(a)$ durch geeignete Umordnung *jeden reellen* Zuwachs geben kann. Bei geradzahligem Werthen von m hingegen müssen, damit $\sqrt[m]{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}}$ reell wird, $\frac{\lambda-1}{\lambda-2}$ wesentlich positiv sein, sodass in diesem Falle Werthe von λ , die innerhalb der Grenzen $+1$ und $+2$ liegen, unzulässig wären: für jede Wahl von λ , welche dieser Einschränkung Rechnung trägt, ergeben sich dann immer zwei reelle Werthe für jene Wurzelgrösse*), also auch für $\overline{S(x)}$, d. h. es giebt dann stets *zwei* Umordnungen der Reihe $S(x)$, welche das Verlangte leisten.

Will man die besondere Art der Gliederanordnung, welche $S(a)$ so, wie es Gl. (9) erheischt, in $\overline{S(a)}$ überführt, wirklich angeben, so kann man sich hierzu des Resultates bedienen, welches ich in einem früheren Aufsatz: „Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte“ — abgeleitet habe. Es wird da unter anderem gezeigt**), dass die hier mit $S(a)$ bezeichnete Reihe die Werthveränderung

$$\frac{A}{2^{\frac{m-1}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)} \quad (A \text{ eine beliebig vorgeschriebene positive oder negative Zahl})$$

*) Unter $\sqrt[m]{\frac{1}{2}}$ kann natürlich stets nur der *positive* Werth verstanden werden (als Summe der Reihe $S(a)$, welche ja wesentlich positiv ist).

**) Math. Ann. Bd. XXII, S. 476 (wobei k hier durch $\frac{1}{m}$, a durch A ersetzt ist).

erleidet, wenn man n negativen Gliedern $(n + h)$ positive zuordnet, wo h durch die infinitäre Gleichung bestimmt ist:

$$h \underline{\simeq} n^{\frac{m-1}{m}} \cdot A.$$

Damit nun im vorliegenden Falle diese Werthveränderung

$$\frac{A}{\frac{m-1}{2} \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)} = \sqrt[m]{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}} - \sqrt[m]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{m}} \left\{ \left(\frac{2\lambda-2}{\lambda-2} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\}$$

wird, hat man offenbar nur zu setzen

$$A = 2^{\frac{m-2}{m}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \left\{ \left(\frac{2\lambda-2}{\lambda-2} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\}$$

und daher schliesslich

$$(10) \quad h \underline{\simeq} 2^{\frac{m-2}{m}} n^{\frac{m-1}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \left\{ \left(\frac{2\lambda-2}{\lambda-2} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\},$$

wo h den (positiven oder negativen) Ueberschuss von positiven Gliedern bedeutet, der auf n negative trifft. —

Nimmt man statt der binomischen Reihe die logarithmische, so ergibt sich zunächst

$$(11) \quad \lg(1 + \varphi(x)) = \sum_1^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\varphi^r(x)}{r} = S(x)$$

wo jetzt die für $x = a$ resultirende Reihe

$$\lg(1 + \varphi(a)) = \lg 2 = \sum_1^{\infty} (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{r} = S(a),$$

wiederum nur bedingt convergirt, während sonst durchweg unbedingte Convergenz stattfindet. Hier wird nun

$$\varphi(x) = e^{S(x)} - 1$$

und daher

$$(12) \quad f(x) = f(a) + i \left\{ \varepsilon(x-a)^2 + 1 - \frac{1}{e^{S(x)} - 1} \right\}.$$

Bezeichnet man analog wie oben die umgeordnete Reihe mit $\overline{S(x)}$ und setzt

$$(13) \quad \overline{f(x)} = f(a) + i \left\{ \varepsilon(x-a)^2 + 1 - \frac{1}{e^{\overline{S(x)}} - 1} \right\},$$

so muss, damit $\overline{f(x)}$ an der Stelle $x = a$ gegen $f(x)$ den Zuwachs λi erleidet,

$$\overline{f(x)} = f(a) + i \left\{ 1 - \frac{1}{e^{\overline{S(a)}} - 1} \right\} = f(a) + \lambda i$$

also

$$\lambda = 1 - \frac{1}{e^{\overline{S(a)}} - 1}$$

werden, woraus

$$e^{\overline{S(a)}} = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}$$

sich ergibt: hieraus folgt zunächst — da $e^{\overline{S(a)}}$ wesentlich positiv ist — dass Werthe von λ , welche innerhalb der Grenzen $+1$ und $+2$ liegen, hier wieder auszuschliessen sind. Ist diese Bedingung aber erfüllt, so hat man

$$\begin{aligned} (14) \quad \overline{S(a)} &= \lg \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} = S(a) + \left\{ \lg \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} - \lg 2 \right\} \\ &= S(a) + \frac{1}{2} \lg \left(\frac{\lambda - 2}{2\lambda - 2} \right)^2. \end{aligned}$$

Da nun bekanntlich die hier mit $S(a)$ bezeichnete harmonische Reihe den Zuwachs $\frac{1}{2} \lg p$ erhält, wenn man n negativen Gliedern $E(pn)$ positive zuordnet, so kommt die gesuchte Anordnung $\overline{S(a)}$ offenbar dann zu Stande, wenn auf n negative Glieder $E\left\{\left(\frac{\lambda - 2}{2\lambda - 2}\right)^2 n\right\}$ positive kommen. Ist z. B. λ eine rationale Zahl, etwa $\lambda = \frac{q}{p}$, wo p und q ganze Zahlen bedeuten, sodass also $\frac{\lambda - 2}{2\lambda - 2} = \frac{q - 2p}{2q - 2p}$ wird, so erzielt man also die betreffende Anordnung, wenn man auf je $(q - 2p)^2$ positive Glieder $(2q - 2p)^2$ negative folgen lässt. —

Schliesslich möge hier noch bemerkt werden, dass bei diesem ganzen Verfahren die durch eine gewisse Umordnung von $S(x)$ resultirende Werthveränderung von $\overline{f(x)}$ immer nur von der Wahl der *Coefficienten* der Reihe $S(x) = \sum c_v \cdot \varphi^v(x)$, mit anderen Worten von der Beschaffenheit der nur aus constanten Gliedern bestehenden Reihe $S(a) = \sum c_v$, nicht aber von $f(x)$ abhängt, dergestalt dass für eine bestimmte Umordnung $\overline{S(a)}$ der Ausdruck $\overline{f(x)}$ an der Stelle $x = a$ immer *dieselbe* Unstetigkeit erleidet, was auch $f(x)$ bedeuten möge.

III. Reihen, welche an verschiedenen Stellen ihres Convergenz-Intervalles in verschiedenem Grade bedingt convergiren.

Bei den Entwicklungen des vorigen Paragraphen wurden hebbare Unstetigkeiten erzeugt durch Benützung *unbedingt* convergenter Reihen, welche innerhalb ihres Convergenz-Intervalles einzelne Stellen

mit nur *bedingter* Convergenz besitzen. Nun giebt es aber, wie sogleich gezeigt werden soll, auch solche aus Functionen einer Variablen x gebildete Reihen, welche durchweg nur *bedingt* convergiren, innerhalb ihres Convergenz-Intervalles aber einzelne Stellen mit *stärker* bedingter Convergenz besitzen, dergestalt dass gewisse Umordnungen nur an diesen ausgezeichneten Stellen, nicht aber im ganzen übrigen Convergenz-Intervalle Werthveränderungen und somit hebbare Unstetigkeiten hervorbringen. Man könnte diese Erscheinung, auf die meines Wissens bisher noch nicht ausdrücklich hingewiesen worden ist, etwa dadurch am kürzesten charakterisiren, dass man sagt, solche Reihen seien innerhalb ihres Convergenz-Intervalles *in verschiedenem Grade bedingt* convergent.

Zur Erläuterung des eben gesagten mögen die trigonometrischen Reihen dienen. Es sei die Reihe

$$(15) \quad S(x) = A_0 + \sum_1^{\infty} \{A_v \cos vx + B_v \sin vx\}$$

im Intervalle $-\pi \dots + \pi$ *bedingt*, doch im allgemeinen *gleichmässig convergent*, nur in einer endlichen Anzahl discreter Punkte $a_1, a_2, \dots, a_m$ *) *divergent*, sodass also $S(x)$ eine für das Intervall $-\pi \dots + \pi$ im allgemeinen stetige Function bedeutet, welche nur an den Stellen $a_1, a_2, \dots, a_m$ unendlich wird. Die Reihe (15) convergirt dann offenbar für alle möglichen reellen x mit Ausnahme derjenigen von der Form $x = a_s \pm 2s\pi$ (s eine ganze Zahl incl. 0, $s = 1, 2, \dots, m$). Sie wird somit im allgemeinen (d. h. lediglich mit Ausschluss der sogleich zu bezeichnenden Punkte) auch convergent bleiben, wenn man x durch $(x + \pi)$ ersetzt, wobei

$$\begin{aligned} S(x + \pi) &= A_0 + \sum_1^{\infty} \{A_v \cos(vx + v\pi) + B_v \sin(vx + v\pi)\} \\ &= A_0 + \sum_1^{\infty} (-1)^v \{A_v \cos vx + B_v \sin vx\} \end{aligned}$$

sich ergibt. Die Divergenzstellen dieser Reihe, nämlich die Werthe von der Form $x = a_s \pm (2s + 1)\pi$, werden dann von denjenigen der Reihe (15) durchweg verschieden sein — mit einziger Ausnahme des Falles, wo unter den Divergenzstellen a_s sich die beiden Stellen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ befinden, sofern dann die Werthe

*) In die Zahl dieser Punkte sind eventuell auch die Grenzen $\pm \pi$ aufzunehmen, falls die Reihe dort nicht mehr convergirt.

$$\pm \frac{\pi}{2} + 2s\pi = \mp \frac{\pi}{2} + (2s \pm 1)\pi$$

und

$$\pm \frac{\pi}{2} - 2s\pi = \mp \frac{\pi}{2} - (2s \mp 1)\pi$$

als Divergenzstellen beider Reihen erscheinen. — Mit den Reihen $S(x)$ und $S(x+\pi)$ convergiren nun ferner auch die beiden Reihen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{S(x) + S(x+\pi)\} \\ &= A_0 + \sum_1^{\infty} \{A_{2\nu} \cos 2\nu x + B_{2\nu} \sin 2\nu x\} = P(x), \\ & \frac{1}{2} \{S(x) - S(x+\pi)\} \\ &= \sum_1^{\infty} \{A_{2\nu-1} \cos (2\nu-1)x + B_{2\nu-1} \sin (2\nu-1)x\} = Q(x) \end{aligned}$$

und zwar offenbar mit alleiniger Ausnahme der *beiden* Werthesysteme, welche Divergenzstellen für $S(x)$ und $S(x+\pi)$ sind, also der Werthe $x = a_x \pm 2s\pi$ und $x = a_x \pm (2s+1)\pi$.

Bildet man jetzt

$$\begin{aligned} (16) \quad \overline{S(x)} &= \lim \left[A_0 + \sum_1^m \{A_{2\nu} \cos 2\nu x + B_{2\nu} \sin 2\nu x\} \right. \\ & \quad \left. + \sum_1^n \{A_{2\nu-1} \cos (2\nu-1)x + B_{2\nu-1} \sin (2\nu-1)x\} \right] \\ &= \lim \{P_m(x) + Q_n(x)\} \quad (m = \infty, n = \infty), \end{aligned}$$

so unterscheidet sich diese Reihe von der Reihe $S(x)$ offenbar nur durch die Anordnung der Geraden und wird — abgesehen von den Stellen $a_x \pm 2s\pi$, $a_x \pm (2s+1)\pi$ — auch dieselbe Summe besitzen wie die Reihe (15), sofern ja nach Ausschluss der bezeichneten Stellen die Partialreihen $P(x) = \lim P_m(x)$ und $Q(x) = \lim Q_n(x)$ überall einzeln convergiren. Dagegen würden an den Stellen $a_x \pm (2s+1)\pi$, an welchen nach Voraussetzung $S(x)$ convergirt und stetig ist, $\lim P_m(x)$ und $\lim P_n(x)$ einzeln divergiren, und es könnte daher $\overline{S(x)}$ an diesen Stellen nur dann $= S(x)$ werden, wenn entweder geradezu $m = n$ genommen wird oder zum mindesten zwischen m und n ein passendes Abhängigkeitsverhältniss (das, beiläufig bemerkt, je nach der Natur der Coefficienten A_ν , B_ν verschieden ausfallen kann) stattfindet. Andernfalls, d. h. bei Festsetzung irgend eines anderen Abhängigkeitsverhältnisses zwischen m und n , wird $\overline{S(x)}$ an jenen Stellen jeden beliebig

vorgeschriebenen Werth*) annehmen können, bezw. völlig unbestimmt werden, wenn man m und n ganz unabhängig von einander ins Unendliche wachsen lässt. — Was schliesslich noch die Stellen $a_x \pm 2s\pi$ betrifft, welche auch Divergenzstellen für $S(x)$ waren, so wird $\overline{S(x)}$ dort offenbar ebenfalls divergent oder unbestimmt.

Es ergibt sich somit das folgende Resultat: Sondert man in der Reihe (15) die Glieder mit geradem und diejenigen mit ungeradem Index, so wird bei gegenseitiger Verschiebung dieser beiden Gliedergruppen eine Summe $\overline{S(x)}$ zum Vorschein kommen, welche überall da, wo die ursprüngliche Reihe convergirt, mit $S(x)$ übereinstimmt — mit Ausschluss der Stellen $a_x \pm (2s+1)\pi$ (d. h. derjenigen Stellen, welche sich von den Divergenzstellen der Reihe (15) um ungerade Multipla von π unterscheiden): hier wird $\overline{S(x)}$ bei geeigneter Wahl jener Gliederverschiebung hebbare Unstetigkeiten erleiden.

Beispiel: Es sei gegeben

$$S(x) = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x - \dots = \lg \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)$$

eine Reihe, welche offenbar convergirt für $-\pi < x < +\pi$, insbesondere also auch für $x=0$, wo

$$S(0) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \lg 2$$

wird, während sie an den Stellen $x = \pm \pi$ in die harmonische Reihe $-\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)$ übergeht, also divergent wird. Die vorgelegte Reihe convergirt somit für alle endlichen reellen x mit Ausnahme derjenigen von der Form $\pm (2s+1)\pi$. Nach dem oben gesagten müssen daher die beiden Partialreihen

$$P(x) = -\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 6x}{6} - \dots,$$

$$Q(x) = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \dots$$

(wo beiläufig bemerkt für $-\pi < x < +\pi$, $P(x) = \frac{1}{4} \lg(4 \sin^2 \varphi)$, $Q(x) = \frac{1}{4} \lg(\cot^2 \frac{\varphi}{2})$) ausser an den Stellen $x = \pm (2s+1)\pi$ auch noch für $x = \pm 2s\pi$ divergiren.

Bildet man daher

$$\overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_{\nu=1}^m \frac{\cos(2\nu-1)x}{2\nu-1} - \sum_{\nu=1}^n \frac{\cos 2\nu x}{2\nu} \right\} \quad (m=\infty, n=\infty)$$

*) Genauer gesagt kann der Werth von $\overline{S(x)}$ für irgend eine der Stellen $a_x \pm (2s+1)\pi$ beliebig vorgeschrieben werden. Damit ist dann aber die Gliederanordnung von $\overline{S(x)}$, und folglich auch der Werth der Summe für alle anderen Stellen bestimmt.

so wird $\overline{S(x)}$ auch bei beliebiger Wahl von m und n im allgemeinen zwar mit $S(x)$ übereinstimmen, an den Stellen $x = \pm 2s\pi$ jedoch nur dann, wenn $m = n$ oder zum mindesten $m \infty n$ genommen wird. Dagegen nimmt $\overline{S(x)}$ bei Festsetzung eines anderen Abhängigkeitsverhältnisses zwischen m und n für $x = \pm 2s\pi$ jeden beliebig vorgeschriebenen, von $S(\pm 2s\pi) = S(0) = \lg 2$ verschiedenen Werth an. Setzt man z. B. $m = px$, $n = qx$, wo p, q zwei feste ganze Zahlen bedeuten, während x mit m und n ins Unendliche wächst, mit anderen Worten: ordnet man die ursprüngliche Reihe $\delta(x)$ so um, dass auf p Glieder mit positivem Vorzeichen jedesmal q Glieder mit negativem folgen, so wird die Summe der so umgeordneten Reihe, nämlich

$$\begin{aligned}\overline{S(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sum_1^{px} \frac{\cos(2\nu-1)x}{2\nu-1} - \sum_1^{qx} \frac{\cos 2\nu x}{2\nu} \right\} \\ &= \sum_v^\infty \left\{ \sum_{p\nu+1}^{p(\nu+1)} \frac{\cos(2\lambda-1)x}{2\lambda-1} - \sum_{q\nu+1}^{q(\nu+1)} \frac{\cos 2\lambda x}{2\lambda} \right\}\end{aligned}$$

im allgemeinen mit der ursprünglichen Summe $S(x)$ übereinstimmen (auch an deren Divergenzstellen $x = \pm(2s+1)\pi$, wo sie ebenfalls divergent), jedoch mit Ausschluss der Stellen $x = \pm 2s\pi$, wo

$$\overline{S(\pm 2s\pi)} = \sum_0^\infty \left\{ \sum_{p\nu+1}^{p(\nu+1)} \frac{1}{2\nu-1} + \sum_{q\nu+1}^{q(\nu+1)} \frac{1}{2\nu} \right\} = \lg 2 + \frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$$

wird, also um die Grösse $\frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ von $S(\pm 2s\pi)$ differirt. Sie wird also insbesondere im Intervalle $-\pi < x < +\pi$ die stetige Function $\frac{1}{2} \lg \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)$ darstellen mit Ausnahme der Stelle $x = 0$, wo sie eine hebbare Unstetigkeit von der Grösse $\frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ besitzt. —

IV. Verallgemeinerung der in den beiden vorangehenden Paragraphen entwickelten Methoden.

Jede bedingt convergente Reihe kann aufgefasst als ein Aggregat von zwei divergenten Reihen, deren entgegengesetzten Unendlichkeiten zustrebende Partialsummen mit Zugrundelegung eines geeignet fixirten Abhängigkeitsgesetzes zu einer endlichen Gesamtsumme vereinigt sind. In der That beruhte das Auftreten der in beiden vorigen Paragraphen betrachteten Werthveränderungen lediglich auf der Möglichkeit, die Glieder der betreffenden Reihen in zwei Partien zu zerlegen, welche einzeln genommen im allgemeinen zwar ebenfalls convergiren

(NB. in II war diese Convergenz eine unbedingte, in III eine bedingte), für gewisse Werthe von x jedoch *divergiren*. Hiernach wird man nun die bisher behandelten besonderen Fälle in folgender Weise zusammenfassen und verallgemeinern können.

Es werde wiederum mit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ eine unbegrenzte Folge von Functionen bezeichnet, die innerhalb eines gewissen Intervalles $x_0 < x < x_1$ reell, eindeutig bestimmt und im allgemeinen stetig sein mögen; ausserdem sei die Reihe

$$(17) \quad S(x) = \sum_0^{\infty} \varphi_v(x)$$

für dieses Intervall convergent — gleichgültig ob bedingt oder unbedingt, jedoch im allgemeinen gleichmässig — sodass also $S(x)$ eine im Intervalle $x_0 \dots x_1$ endliche, eindeutig bestimmte und im allgemeinen stetige Function darstellt. Es werde nun gesetzt:

$$(18) \quad \varphi_v(x) = \varphi_v^{(1)}(x) + \varphi_v^{(2)}(x) \quad (v=0, 1, 2, \dots),$$

wo die $\varphi_v^{(1)}(x) = \varphi_v^{(2)}(x)$ Functionen von demselben Charakter wie $\varphi_v(x)$ bedeuten, von denen übrigens die eine oder andere für gewisse Werthe von v beständig Null sein kann (so wäre z. B. in dem im vorigen Paragraphen betrachteten Falle, wo $\varphi_v(x) = A_v \cos vx + B_v \sin vx$ war, $\varphi_v^{(1)}(x)$ nur für gerade v , $\varphi_v^{(2)}(x)$ nur für ungerade $v = A_v \cos vx + B_v \sin vx$, dagegen $\varphi_v^{(1)}(x) = 0$ für ungerade, $\varphi_v^{(2)}(x) = 0$ für gerade v). Sind dann die beiden Reihen:

$$(19) \quad S^{(1)}(x) = \sum_0^{\infty} \varphi_v^{(1)}(x), \quad S^{(2)}(x) = \sum_0^{\infty} \varphi_v^{(2)}(x)$$

im Intervalle $x_0 \dots x_1$ mit $S(x)$ ebenfalls gleichmässig convergent, jedoch an einer gewissen Stelle $x = a$, wo $S(x)$ gleichmässig convergirt, divergent — und zwar bestimmt divergent (d. h. so dass $S^{(1)}(x)$, $S^{(2)}(x)$ dort entweder positiv oder negativ unendlich werden, so wird die folgende Reihe:

$$(20) \quad \overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_0^{n_1} \varphi_v^{(1)}(x) + \sum_0^{n_2} \varphi_v^{(2)}(x) \right\} \quad (n_1 = \infty, n_2 = \infty)$$

zunächst mit Ausschluss der Stelle $x = a$ dieselbe Summe besitzen, wie $S(x)$, unabhängig davon, wie n_1 und n_2 ins Unendliche wachsen; an der Stelle $x = a$ aber nur dann, wenn $n_1 = n_2$ oder doch zwischen n_1 und n_2 ein ganz bestimmtes, aus der besonderen Natur von $\varphi_v^{(1)}(x)$, $\varphi_v^{(2)}(x)$ sich ergebendes Abhängigkeitsverhältniss stattfindet. In jedem anderen Falle wird für $x = a$ zwischen $S(x)$ und $\overline{S(x)}$ ein Werth-

unterschied bestehen, und zwar sind hierbei die folgenden Möglichkeiten zu unterscheiden.

Sind die $\varphi_v^{(1)}(x)$, $\varphi_v^{(2)}(x)$ so beschaffen, dass $\lim \varphi_v^{(1)}(a) = 0$ und $\lim \varphi_v^{(2)}(a) = 0$, so wird je nach Wahl der Beziehung zwischen n_1 und n_2 die Differenz $\overline{S(a)} - S(a)$ jeden beliebig vorzuschreibenden Werth erhalten.

Besitzt hingegen $\varphi_v^{(1)}(a)$ für $v = \infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert g — in welchem Falle offenbar $\varphi_v^{(2)}(a) = -g$ werden muss wegen $\lim \{\varphi_v^{(1)}(a) + \varphi_v^{(2)}(a)\} = \lim \varphi_v(a) = 0$ — so wird für $n_1 - n_2 = \pm p$ (wo p eine bestimmte positive ganze Zahl bedeutet) offenbar

$$\overline{S(a)} = \lim \left\{ \sum_0^{n_2} \varphi_v^{(1)}(a) + \sum_0^{n_2} \varphi_v^{(2)}(a) \right\} + \lim \sum_{n_2 \pm 1}^{n_2 \pm p} \varphi_v^{(1)}(a) = S(a) \pm pg,$$

kann also nur Werthveränderungen von ganz bestimmter Form erleiden.

In jedem anderen Falle wird $\overline{S(a)}$ divergent oder unbestimmt.

Beispiele: 1. Es sei gegeben

$$S(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{v} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^v$$

(sodass also

$$S(x) = -\lg \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2} \right) = -\lg \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = \lg(1+x^2)$$

ist), so convergirt diese Reihe für jedes reelle x (und zwar unbedingt und gleichmässig). Setzt man jetzt

$$\frac{1}{v} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^v = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^v} + \frac{1}{v} \cdot \frac{x^{2v} - 1}{(1+x^2)^v},$$

so sind die beiden Reihen

$$S^{(1)}(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^v}, \quad S^{(2)}(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{v} \cdot \frac{x^{2v} - 1}{(1+x^2)^v}$$

ebenfalls unbedingt convergent für alle endlichen reellen x mit Ausschluss der Stelle $x = 0$, wo sie beide divergiren. Bildet man daher

$$\overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_1^{n_1} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^v} + \sum_1^{n_2} \frac{1}{v} \cdot \frac{x^{2v} - 1}{(1+x^2)^v} \right\} \quad (n_1 = \infty, n_2 = \infty),$$

so wird $\overline{S(x)} = S(x)$ — unabhängig davon, in welcher Weise n_1 und n_2 der Unendlichkeit zustreben — für alle von Null verschiedenen, reellen x ; für $x = 0$ jedoch nur dann, wenn $n_2 \asymp n_1$. Nimmt man dagegen etwa $n_1 = (p \pm q)n$, $n_2 = pn$ (wo p, q bestimmte positive

ganze Zahlen bedeuten und für den Fall $n_1 = (p-q)n$ natürlich $p > q$ sein muss, so wird

$$\overline{S(0)} = \lim \left\{ \sum_1^{(p+q)n} \frac{1}{v} - \sum_1^{qn} \frac{1}{v} \right\} = \lg \left(\frac{p+q}{p} \right) = \lg \left(1 \pm \frac{q}{p} \right)$$

während $S(0) = 0$ ist.

Dieses Resultat lässt sich u. a. noch folgendermassen verwerthen. Es ist

$$x^2 = e^{S(x)} - 1$$

und daher abgesehen von der Stelle $x = 0$ auch

$$e^{\overline{S(x)}} - 1 = x^2,$$

während

$$e^{\overline{S(0)}} - 1 = \pm \frac{q}{p}$$

wird. Setzt man nun eine beliebig vorgelegte Function $F(x)$ in die Form

$$F(x) = \psi(x^2) + x \cdot \chi(x^2),$$

sodass also $F(0) = \psi(0)$ wird, so würde der Ausdruck

$$\overline{F(x)} = \psi(e^{\overline{S(x)}} - 1) + x\chi(x^2)$$

für alle von Null verschiedenen x mit $F(x)$ übereinstimmen, während

$\overline{F(0)} = \psi\left(\pm \frac{q}{p}\right)$ wird: mithin erleidet — wenn nicht zufällig $\psi\left(\pm \frac{q}{p}\right) = \psi(0)$ ist — $\overline{F(x)}$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit.

2. Man hat identisch

$$0 = S(x) = \sum_1^{\infty} c_v \cos vx,$$

sobald für jeden Werth von v $c_v = 0$ ist. Setzt man nun

$$c_v = b_v - b_v,$$

so kann man die Grössen b_v auf unendlich viele Weisen so wählen, dass die Reihe $\sum b_v$ zwar divergirt, dagegen $\sum b_v \cos vx$ mit Ausnahme der Stellen $x = \pm 2s\pi$ convergirt. In Folge dessen wird die Reihe

$$\overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_1^{n_1} b_v \cos vx - \sum_1^{n_2} b_v \cos vx \right\}$$

bei geeigneter Beziehung zwischen n_1 und n_2 an den Stellen $x = \pm 2s\pi$ jeden beliebig vorgeschriebenen Werth annehmen, im übrigen aber wie $S(x)$ beständig verschwinden. Nimmt man z. B.

$$b_v = \frac{1}{\sqrt{v}}, \quad n_1 = pn^x + qn, \quad n_2 = pn^x, \quad (x > 1)$$

sodass also

$$\begin{aligned}\overline{S(x)} &= \lim \left\{ \sum_1^{pn^x+qn} \frac{\cos vx}{\sqrt[p]{v}} - \sum_1^{pn^x} \frac{\cos vx}{\sqrt[p]{v}} \right\}, \\ &= \sum_0^\infty \left\{ \sum_{pn^x+qv+1}^{p(v+1)^x+q(v+1)} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt[p]{\lambda}} - \sum_{pn^x+1}^{p(v+1)^x} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt[p]{\lambda}} \right\}\end{aligned}$$

so wird diese Reihe im allgemeinen den Werth Null besitzen, nur

$$\overline{S(\pm 2\pi)} = \lim \left\{ \sum_1^{pn^x+qn} \frac{1}{\sqrt[p]{v}} - \sum_1^{pn^x} \frac{1}{\sqrt[p]{v}} \right\} = \lim \sum_1^{pn^x+qn} \frac{1}{\sqrt[p]{v}}$$

sein. Zur Berechnung dieses Grenzwertes hat man:

$$\frac{qn}{\sqrt[p]{pn^x}} > \sum_{pn^x+1}^{pn^x+qn} \frac{1}{\sqrt[p]{v}} > \frac{qn}{\sqrt[p]{pn^x+qn}}$$

und daher schliesslich

$$S(\pm 2\pi) = \frac{q}{\sqrt[p]{p}}.$$

Specialisirt man noch weiter

$$\lambda = 2, \quad p = q = 1,$$

so wird

$$\begin{aligned}\overline{S(x)} &= \sum_0^\infty \left\{ \sum_{v^2+v+1}^{(v+1)^2+v+1} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{v}} - \sum_{v^2+1}^{(v+1)^2} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{v}} \right\} \\ &= \sum_0^\infty \left\{ \sum_1^{2v+2} \frac{\cos(v^2+v+1)x}{\sqrt{v^2+v+1}} - \sum_1^{2v+1} \frac{\cos(v^2+1)x}{\sqrt{v^2+1}} \right\}\end{aligned}$$

eine Reihe von sehr einfacher Anordnung (es erscheinen nämlich die positiven Glieder der Reihe nach in Gruppen von 2, 4, 6, ..., die negativen in solchen von 1, 3, 5, ... Gliedern), welche also für alle reellen x mit Ausnahme derjenigen von der Form $x = \pm 2s\pi$ verschwindet, für welche letzteren

$$\overline{S(\pm 2s\pi)} = \lim \sum_{n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{v}} = 1$$

wird. —

3. Setzt man

$$S(x) = \sum_1^\infty \sin^x x,$$

so ist diese Reihe für alle endlichen reellen x ausser denjenigen von

der Form $x = (1 \pm 2s) \frac{\pi}{2}$ unbedingt convergent und hat den Werth

$$\frac{\sin x}{1 - \sin x}.$$

Zerlegt man jetzt $\sin^v x$ folgendermassen:

$$\sin^v x = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^v + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^v (x^v - 1)$$

(wobei wiederum — zur Vermeidung jeder Unbestimmtheit an der Stelle $x=0$ — unter $\frac{\sin x}{x}$ die Reihe $\frac{1}{1} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$ verstanden werden mag) und setzt

$$\overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_1^{n_1} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^v + \sum_1^{n_2} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^v (x^v - 1) \right\} \quad (n_1 = \infty, n_2 = \infty),$$

so divergiren die beiden Partialreihen für $x=0$ in der Weise, dass die Glieder der ersten sämmtlich $= +1$, die der zweiten sämmtlich $= -1$ werden, während sie im übrigen gleichzeitig mit $S(x)$ unbedingt convergent sind. Man hat daher, wenn p irgend eine positive ganze Zahl bedeutet und $n_1 = n_2 + p$ genommen wird:

$$\begin{aligned} \overline{S(x)} &= \lim \left\{ \sum_1^{n_2+p} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^v + \sum_1^{n_2} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^v (x^v - 1) \right\} \quad (n_2 = \infty) \\ &= \sum_1^p \left(\frac{\sin x}{x}\right)^v + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^v \left\{ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p + x^v - 1 \right\} \end{aligned}$$

eine Reihe, welche — abgesehen von den Stellen $x = (1 \pm 2s) \frac{\pi}{2}$ — wie $S(x)$ die Summe $\frac{\sin x}{1 - \sin x}$ besitzt, jedoch für $x=0$, statt wie $S(x)$ zu verschwinden, den Werth p annimmt.

V. Umformung von Ausdrücken mit sprungweisen Aenderungen (nach Art der Fourier'schen Reihen und Integrale) in solche mit hebbaren Unstetigkeiten.

Ich gehe jetzt zu einer anderen Classe von hierher gehörigen Ausdrücken über, welche die überaus nahe Verwandtschaft zwischen den sprungweisen Aenderungen und den hebbaren Unstetigkeiten auf's deutlichste erkennen lassen.

Es möge $\varphi(x)$ an einer gewissen Stelle $x=a$ eine endliche Discontinuität nach Art einer Fourier'schen Reihe oder eines Fourier'schen Integrales erleiden, dergestalt dass — mit Anwendung der Dirichlet'schen Bezeichnungsweise — $\varphi(a+0)$ und $\varphi(a-0)$ um eine

bestimmte endliche Grösse von einander differiren, während $\varphi(a)$ den Mittelwerth $\frac{1}{2} \{ \varphi(a+0) + \varphi(a-0) \}$ annimmt; im übrigen mag $\varphi(a+0)$ an der betreffenden Stelle vorwärts, $\varphi(a-0)$ rückwärts stetig sein. Bildet man alsdann

$$f_1(x) = \varphi(a + (x-a)^2)$$

oder auch

$$f_2(x) = \varphi(a - (x-a)^2),$$

so geht der erste dieser Ausdrücke stets in $\varphi(a+0)$, der zweite in $\varphi(a-0)$ über, gleichgültig von welcher Seite her x der Stelle a genähert wird, während für $x = a$ $f_1(a) = f_2(a) = \frac{1}{2} \{ \varphi(a+0) + \varphi(a-0) \}$ wird: es erleiden somit diese beiden Ausdrücke an der Stelle $x = a$ hebbare Unstetigkeiten.

Als einfachste Beispiele dieser Kategorie bieten sich solche Sinusreihen dar, deren Summe für unendlich kleine x einer von Null verschiedenen Grenze zustrebt, und welche daher an der Stelle $x = 0$ unstetig werden. So hat man z. B.:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \frac{\sin(2\nu+1)x}{2\nu+1} = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ +1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

und daher

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \frac{\sin(2\nu+1)x^2}{2\nu+1} = \begin{cases} +1 & \text{für } x^2 < \pi, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

d. h. $f(x)$ hat für alle x im Intervalle $-\sqrt{\pi}$ bis $+\sqrt{\pi}$ den Werth 1, verschwindet jedoch für $x = 0$.

Aehnlich verhält sich das bestimmte Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha$, welches bekanntlich den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat. Macht man darin die Substitution $\alpha = \beta x^2$ — wo β die neue Integrationsvariable bedeutet — und setzt

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x^2}{\beta} d\beta,$$

so hat offenbar $f(x)$ für alle positiven und negativen Werthe von x den Werth 1, während $f(0)$ verschwindet. —

Man kann aber aus Fourier'schen Reihen oder Integralen der betrachteten Art auch noch in anderer Weise Ausdrücke mit hebbaren Unstetigkeiten bilden, z. B. wenn man beachtet, dass das Quadrat — oder allgemeiner gesagt jede gerade Potenz — der eben angeführten

Sinusreihe im Intervalle $-\pi < x < +\pi$ beständig den Werth $+1$, nur für $x=0$ den Werth 0 hat. Diese schon von Hankel gemachte Bemerkung*) lässt sich noch in folgender Weise verallgemeinern.

Es seien $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei Functionen, welche an der Stelle $x=a$ bzw. $x=b$ nach Art einer Fourier'schen Reihe endliche Sprünge erleiden, sodass etwa

$$(21) \quad \begin{cases} \varphi(a-0) = \alpha_1, & \psi(b-0) = \beta_1, \\ \varphi(a+0) = \alpha_2, & \psi(b+0) = \beta_2, \\ \varphi(a) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), & \psi(b) = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) \end{cases}$$

sein möge. Bedeutet dann ξ einen beliebig vorgeschriebenen Werth und setzt man

$$(22) \quad \begin{cases} \Phi(x) = \varphi(x+a-\xi) - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \Psi(x) = \psi(x+b-\xi) - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2), \end{cases}$$

so wird

$$(23) \quad \begin{cases} \Phi(\xi-0) = \varphi(a-0) - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2), \\ \Phi(\xi+0) = \varphi(a+0) - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2), \\ \Phi(\xi) = \varphi(a) - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \\ \Psi(\xi-0) = \psi(b-0) - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) = -\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2), \\ \Psi(\xi+0) = \psi(b+0) - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) = -\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2), \\ \Psi(\xi) = \psi(b) - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) = 0 \end{cases}$$

und folglich, wenn noch

$$(24) \quad \Phi(x) \cdot \Psi(x) = f(x)$$

gesetzt wird:

$$(25) \quad \begin{cases} f(\xi-0) = \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2), \\ f(\xi+0) = \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2), \\ f(\xi) = 0 \end{cases}$$

d. h. $f(x)$ besitzt an der beliebig vorgeschriebenen Stelle $x = \xi$ eine hebbare Unstetigkeit.

*) Math. Ann. Bd. XX, S. 97.

Diese Betrachtung lässt sich wiederum benützen, um für eine beliebig vorgelegte Function $f(x)$ — von der nur vorausgesetzt wird, dass sie für ein gewisses Intervall $x_0 \dots x_1$ durch eine Fourier'sche Reihe oder ein Fourier'sches Integral darstellbar ist, — unendlich viele andere zu construiren, welche in diesem Intervalle mit Ausnahme einer endlichen Anzahl beliebig vorgeschriebener Punkte $a_1, a_2, \dots, a_m$ (wo $f(x)$ als stetig und von Null verschieden vorausgesetzt wird) mit $f(x)$ völlig übereinstimmen, an jenen Stellen $a_1 \dots a_m$ jedoch verschwinden, also dort hebbar unstetig werden.

Zerlegt man nämlich $f(x)$ irgendwie in zwei mit $f(x)$ stetige und ebenfalls durch Fourier'sche Reihen oder Integrale darstellbare Factoren, etwa

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

(was offenbar stets auf unendlich viele Weisen möglich ist), so kann man mit Hilfe von Fourier'schen Reihen oder Integralen zwei neue Functionen $\overline{f_1(x)}$, $\overline{f_2(x)}$ darstellen, welche in den Intervallen

$$(x_0 \dots a_1), (a_2 \dots a_3), (a_4 \dots a_5) \dots$$

mit $f_1(x)$, $f_2(x)$, hingegen in den jedesmal anstossenden Intervallen

$$(a_1 \dots a_2), (a_3 \dots a_4), (a_5 \dots a_6), \dots$$

mit $-f_1(x)$, $-f_2(x)$ übereinstimmen, somit in unmittelbarer Nähe der Stellen $a_1, a_2, \dots, a_m$ auf verschiedenen Seiten absolut genommen nahezu gleiche, aber entgegengesetzte Werthe besitzen und für die Argumente $a_1, a_2, \dots, a_m$ selbst verschwinden.

Das Product

$$\overline{f(x)} = \overline{f_1(x)} \cdot \overline{f_2(x)}$$

stellt daher eine Function dar, welche an den Stellen $a_1, a_2, \dots, a_m$ plötzlich Null wird, im übrigen aber mit $f(x)$ durchweg übereinstimmt.

(NB. Den Factor $f_2(x)$ kann man offenbar auch constant $= +1$ nehmen, wodurch $f_1(x) = f(x)$ wird: man hat dann also nur zwei Fourier'sche Reihen oder Integrale herzustellen, welche abwechselnd die Werthe $+f(x)$ und $-f(x)$ bzw. $+1$ und -1 besitzen).

Es schien mir von einigem Interesse, festzustellen, ob die auf dem soeben betrachteten Wege erzeugten hebbaren Discontinuitäten in geeignet gewählten Fällen sich nicht schliesslich auf dieselbe Ursache zurückführen liessen, welche bei den in Art. II—IV betrachteten Beispielen als wirksam erkannt worden ist. Die Möglichkeit hierzu wird offenbar geboten sein, sobald sich die hier auftretenden Reihenproducte in einfach unendliche Reihen umformen lassen — etwa durch Anwendung der Cauchy'schen Multiplicationsregel: dies ist nun aber mit Benützung des im vorangehenden Aufsätze entwickelten Resultates bei gehöriger Beschaffenheit der Coefficienten thatsächlich der Fall.

Seien also, wie dort angenommen wurde, a, a' positive, mit

wachsendem ν niemals zunehmende und für $\nu = \infty$ verschwindende Grössen, $\sum a_\nu$ und $\sum a'_\nu$ divergent, dagegen $\sum a_\nu a'_\nu$ convergent. Setzt man jetzt wiederum

$$(26) \quad \sum_1^\infty a_\nu \sin \nu x = f_1(x), \quad \sum_1^\infty a'_\nu \sin \nu x = f_2(x),$$

so wird (nach Gl. (11) des vorigen Aufsatzes):

$$(27) \quad f_1(x) \cdot f_2(x) \\ = \frac{1}{2} \sum_1^\infty \left\{ \sum_1^\nu a_x a'_{\nu+1-x} \cos(\nu+1-2x) - c_{\nu+1} \cos(\nu+1)x \right\} = f(x),$$

wo

$$c_{\nu+1} = \sum_1^\nu a_x a'_{\nu+1-x}.$$

Ist dann

$$\left. \begin{aligned} \lim f_1(0+\delta) &= -\lim f_1(0-\delta) = g_1 \\ \lim f_2(0+\delta) &= -\lim f_2(0-\delta) = g_2 \end{aligned} \right\} \text{ d. h. endlich und von Null verschieden,}$$

so wird $f(x)$ an die Stelle $x = 0$ hebbar unstetig, indem sich nämlich ergibt:

$$f(0 \pm \delta) = g_1 g_2$$

dagegen:

$$f(0) = 0.$$

Ordnet man jedoch die Reihe (27) nach steigenden Vielfachen von x , wodurch sie übergeht in:

$$(28) \quad F(x) = \frac{1}{2} C_{0,0} + \frac{1}{2} C_{0,1} \cos x + \frac{1}{2} \sum_1^\infty (C_{0,\nu+1} - c_{\nu+1}) \cos(\nu+1)x,$$

wo

$$C_{0,0} = \sum_1^\infty a_x a'_x,$$

$$C_{0,\nu+1} = \sum_1^\infty (a_x a'_{x+\nu} + a_{x+\nu} a'_x)$$

(s. Gl. (12) des vorigen Aufsatzes), so ist $F(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig und im übrigen für $-\pi \leq x \leq \pi$ mit $f(x)$ identisch. Die hebbare Unstetigkeit, welche $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ besitzt, erklärt sich nun aber sofort durch das in Art. IV gesagte. Zerlegt man nämlich die Glieder der Reihe $F(x)$ in zwei Partien

$$\frac{1}{2} \sum_0^\infty C_{0,\nu} \cos \nu x, \quad \frac{1}{2} \sum_1^\infty c_{\nu+1} \cos(\nu+1)x$$

so convergiren auch diese Partialreihen einzeln genommen im ganzen Intervalle $-\pi \cdots +\pi$ mit Ausschluss der Stelle $x=0$, und zwar die erste derselben in der Weise, dass sie auch die Umformung

$$\frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \sum_1^{\nu} a_x a'_{\nu+1-x} \cos(\nu+1-2x)x$$

gestattet. Für $x=0$ hingegen werden diese Reihen sämmtlich divergent und bringen also bei geeigneter Verschiebung der Glieder jeden beliebigen Summenwerth hervor: unter allen möglichen Verschiebungen repräsentirt dann die Reihe für $f(x)$ gerade diejenige, für welche an der Stelle $x=0$ die Summe 0 resultirt.

Beispiel: Sei $a_\nu = a'_\nu = \frac{1}{\nu}$, also:

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu},$$

so dass also

$$f_1(x) = \pm \frac{\pi - |x|}{2} \quad \text{für } 0 < |x| \leq \pi,$$

$$f_1(0) = 0,$$

so wird

$$f_1(x)^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \left\{ \sum_1^{\nu} \frac{\cos(\nu+1-2x)x}{x(\nu+1-x)} - c_{\nu+1} \cos(\nu+1)x \right\} = f(x)$$

oder auch, da

$$\begin{aligned} c_{\nu+1} &= \sum_1^{\nu} \frac{1}{x(\nu+1-x)} = \frac{1}{\nu+1} \sum_1^{\nu} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{\nu+1-x} \right\} = \frac{2}{\nu+1} \sum_1^{\nu} \frac{1}{x} \\ &= 2 \frac{\sigma_{\nu}}{\nu+1} \end{aligned}$$

wenn $\sum_1^{\nu} \frac{1}{x} = \sigma_{\nu}$ gesetzt wird:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_1^{\nu} \frac{\cos(\nu+1-2x)x}{x(\nu+1-x)} - \frac{\sigma_{\nu}}{\nu+1} \cos(\nu+1)x \right\}.$$

Man hat alsdann

$$f(x) = \left(\frac{\pi - |x|}{2} \right)^2 \quad \text{für } 0 < |x| \leq \pi,$$

$$f(0) = 0.$$

Dagegen ergibt die Umordnung nach steigenden Vielfachen von x , wenn man beachtet, dass

$$C_{0,0} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$C_{0,1} = 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{x \cdot x+1} = 2 \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right\} = 2,$$

$$C_{0,\nu+1} = 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{x(x+\nu+1)} = \frac{2}{\nu+1} \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\nu+1} \right\} = 2 \cdot \frac{\sigma_{\nu+1}}{\nu+1}$$

die Reihe:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\pi^2}{12} + \cos x + \sum_1^{\infty} \frac{\sigma_{\nu+1} - \sigma_{\nu}}{\nu+1} \cos(\nu+1)x \\ &= \frac{\pi^2}{12} \sum_1^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^2} \end{aligned}$$

und zwar ist dann

$$F(x) = \left(\frac{\pi - |x|}{2} \right)^2$$

für $-\pi \leq x \leq +\pi$ einschliesslich der Stelle $x=0$ — ein Resultat, dessen Richtigkeit man auch leicht verificiren kann (am einfachsten durch Integration der Reihe $f(x)$ zwischen den Grenzen 0 und x). —

München, October 1883.