Ueber die Form der Argumente der Thetafunctionen und über die Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \dots, 0)$ als Function der Klassenmoduln.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Greifswald.)

Wenn man die Argumente der Thetafunctionen durch gewisse Integrale erster Gattung und die Coefficienten der homogenen Function zweiten Grades durch die Periodicitätsmoduln derselben ersetzt, so hat *Riemann* in seiner Theorie der *Abelschen* Functionen (dieses Journ. B. 54 §. 22) nachgewiesen, dass die dadurch gebildete Function des Ortes in der Fläche T , wenn sie nicht identisch für jeden Punkt verschwindet, für p Punkte unendlich klein erster Ordnung wird, und dass man die Argumente als Functionen der Nullpunkte so darstellen kann, dass die Substitution von p willkürlich gegebenen Punkten für dieselben bewirkt, dass die Thetafunction in den letzteren verschwindet. Die Ausführung dieser Transformation erfordert die Berechnung gewisser ebendasselbst angegebener Integralausdrücke, welche in dem Falle der hyperelliptischen Integrale von Herrn *Carl Neumann* in einer Schrift über *Abelsche* Integrale (Halle 1863) angedeutet und später in seinen „Vorlesungen über die *Riemannsche* Theorie etc.“ pag. 458—484 ausführlich entwickelt worden ist. Da jedoch in dem allgemeinen Falle die Berechnung jener Integralausdrücke mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist, so hat schon *Riemann* ein Mittel dieselbe zu umgehen angedeutet. Als ein solches Mittel erscheint der Satz im §. 23 seiner Theorie, dessen Anwendung jedoch noch auf erhebliche Schwierigkeiten führt. In dem Falle der hyperelliptischen Integrale hat auf einem anderen Wege Herr *Prym* (Theorie der Functionen einer zweiblättrigen Fläche, Zürich 1866, §. 12 und 13) unter Anwendung einiger ihm von *Riemann* mitgetheilten Sätze über Charakteristiken die oben postulierte Form der Argumente der Thetafunctionen mit Umgehung der Integralausdrücke entwickelt.

In dem Werke über *Abelsche* Functionen haben die Herren *Clebsch* und *Gordan* (das. §. 56) die Herstellung der gewünschten Form der Thetaargumente im Wesentlichen auf die Auflösung gewisser algebraischer Gleichungen

chungen und die Absonderung eines gewissen Systems bevorzugter Wurzeln derselben zurückgeführt. Dieselbe Form hat nach ihnen Herr *H. Weber* (d. J. B. 70 pag. 314 sqq.) mit Hülfe *Riemannscher* Principien verificirt. — Obgleich die Absonderung der bevorzugten Wurzeln unter gegebener Querschnittszerlegung der Fläche *T* mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft ist, so ist die von den Herren *Clebsch* und *Gordan* angenommene Form der Argumente von weitreichendem Vortheil. Wir wollen dieses hier an dem Beispiel der Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \dots, 0)$ als Function der Klassenmoduln zeigen, indem wir nachweisen, dass das von Herrn *Thomae* (d. J. B. 66 pag. 95) gefundene Resultat unter Zugrundelegung der *Clebsch-Gordanschen* Form sich wesentlich vereinfacht. — Ehe wir jedoch auf diese Materie eingehen, wollen wir zuerst zeigen, wie man durch Weiterentwicklung des schon oben erwähnten von *Riemann* §. 23 seiner Theorie gegebenen Satzes auf natürlichem Wege zu der Form der Herren *Clebsch* und *Gordan* gelangen kann, und ausserdem über die Absonderung der bevorzugten Wurzeln einige Bemerkungen hinzufügen. — Wir werden die Abhandlung von *Riemann* über *Abelsche* Functionen (d. J. B. 54) kurz als R. A. F. und das Werk der Herren *Clebsch* und *Gordan* kurz als Cl. G. A. F. citiren.

1.

Es sei im Anschluss an die *Riemannsche* Bezeichnungsweise die den *Abelschen* Functionen zu Grunde liegende algebraische Gleichung

$$F(s, z) = 0 \quad (\text{R. A. F. §. 5})$$

und

$$(1.) \quad w_a = \int_{\mu}^{\xi} \frac{\varphi_a(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz, \quad a = 1, 2, \dots, p,$$

wo μ einen festen und ξ einen beweglichen Punkt der Fläche *T* bedeutet, ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung, wie es (R. A. F. §. 18) definirt ist. Wir setzen

$$(2.) \quad u_a = c_a + w_a, \quad a = 1, 2, \dots, p,$$

wo die *c* Constanten bedeuten, welche durch die Gleichungen

$$(3.) \quad (p-1)c_a + K_a = 0, \quad a = 1, 2, \dots, p$$

bestimmt sind, wenn K_a den ebenso bezeichneten Ausdruck bei *Riemann* (über das Verschwinden der Theta f. d. J. B. 65 §. 1) bedeutet, jedoch mit der Abänderung, dass daselbst *u* durch *w* zu ersetzen ist.

Es ist alsdann für beliebige $p-1$ Punkte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}$

$$\vartheta \left(\alpha \left(\sum_1^{p-1} u_a(\xi_i) \right) \right) = 0,$$

wo $u_a(\xi_i)$ den Werth bedeutet, welchen u_a annimmt, wenn ξ in ξ_i hineintrifft (s. *Riemann* ü. d. V. d. Thetaf. §. 1 und 2). Hieraus folgt, dass

$$(4.) \quad \vartheta \left(\alpha \left(u_a(\xi) - \sum_1^p u_a(\xi_i) \right) \right)$$

verschwindet, wenn ξ in einen der Punkte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ hineinfällt, welches übrigens auch diese Punkte sein mögen.

Sind $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ Punkte, welche mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind (R. A. F. §. 16), so verschwindet die Function (4.) identisch in jedem Punkte ξ , und umgekehrt, wenn letzteres stattfindet, so sind $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft. Beides ergiebt sich aus *Riemann* (A. F. §. 24).

2.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2p-2}$ beliebige durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Punkte, so ist bei der über c_a (Gl. (3.) vor. No.) getroffenen Bestimmung nach (R. A. F. §. 23)

$$(1.) \quad \sum_1^{2p-2} u_a(\varepsilon_i) \equiv 0, \quad a = 1, 2, \dots, p,$$

oder wenn wir die Integrationswege in der Fläche T angemessen verlaufen lassen, mit Rücksicht auf Gleichung (2.) vor. No.:

$$(1^a.) \quad 2(p-1)c_a + \sum_1^{2p-2} \int_{\mu}^{\varepsilon_i} dw_a = 0, \quad a = 1, 2, \dots, p.$$

Um $(p-1)c_a$, welches in den Argumenten der Thetafunction auftritt, zu berechnen, ist es zweckmässig diese Gleichung so umzuformen, dass die Division durch 2 ausgeführt werden könne. Zu dem Ende werde ein beliebiges System correspondirender Periodicitätsmoduli

$$x_a \pi i + \lambda_1 a_{a1} + \lambda_2 a_{a2} + \dots + \lambda_p a_{ap} = P_a(x, \lambda), \quad a = 1, 2, \dots, p$$

gesetzt, und es werden p Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ derart bestimmt, dass:

$$(2.) \quad \sum_1^{2p-2} \int_{\mu}^{\varepsilon_i} dw_a + P_a(x, \lambda) = 2 \sum_1^p \int_{\mu}^{\alpha_i} dw_a, \quad a = 1, 2, \dots, p.$$

Dass diese Gleichung lösbar ist, ergiebt sich nach Division durch 2 aus dem

Satze über die Umkehrung der *Abelschen* Integrale. Ist $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ eine Lösung, so folgt aus Gleichung (2.) nach dem Satze über die Umkehrung des *Abelschen* Theorems (s. Cl. G. A. F. §. 62; vergl. auch *Weber* ob. cit. Abh. §. 1), dass eine rationale Function ζ von (s, z) existiren muss, welche für die Punkte ε von der ersten Ordnung, für μ von der zweiten Ordnung unendlich gross, für die Punkte α von der zweiten Ordnung unendlich klein wird, in allen übrigen Punkten aber weder Null noch unendlich ist. Ist daher $as+bz+c$ eine lineare Function von (s, z) , die für μ unendlich klein zweiter Ordnung wird, und $\varphi(s, z)$ diejenige ganze rationale Function, durch welche die Punkte ε mit einander verknüpft sind (R. A. F. §. 16), so wird

$$\zeta \cdot \varphi \cdot (as+bz+c) = \psi$$

für keinen im Endlichen befindlichen Punkt von T unendlich gross, ist demnach eine ganze rationale Function von (s, z) , welche für die Punkte α unendlich klein zweiter Ordnung, für die $m+n-2$ (R. A. F. §. 8) Punkte, in denen $as+bz+c$ ausser in μ verschwindet, und für jedes sich aufhebende Paar von Verzweigungspunkten unendlich klein erster Ordnung, also im Ganzen in $2p+2r+m+n-2 = m(n-1)+n(m-1)$ Punkten unendlich klein erster Ordnung wird. Hieraus folgt, dass der Grad von ψ in Bezug auf s und z resp. der $n-1^{\text{te}}$ und $m-1^{\text{te}}$ ist, wie leicht aus (R. A. F. §. 8) folgt.

Nach Analogie der *Riemannschen* Bezeichnung für Punkte, die durch eine Gleichung $\varphi=0$ verknüpft sind, wollen wir p Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu=0$ verknüpft nennen, wenn eine ganze rationale Function $\psi_\mu(s, z)$ gefunden werden kann, die in $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ unendlich klein zweiter Ordnung wird und überdiess in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten und in denjenigen $m+n-2$ Punkten in erster Ordnung verschwindet, worin eine für μ unendlich klein zweiter Ordnung werdende ganze rationale Function ersten Grades von (s, z) noch ausserdem Null wird. Alsdann haben wir den Satz: Jede Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ der Gleichung (2.) ist mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu=0$ verknüpft.

Ist umgekehrt $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ ein System von Punkten, die mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu=0$ verknüpft sind, so ist

$$\zeta = \frac{\psi_\mu}{(as+bz+c)\varphi}$$

eine rationale Function von (s, z) mit den oben angegebenen Eigenschaften,

und daher nach dem *Abelschen Theorem*:

$$(3.) \quad \sum_{\mu}^{2p-2} \int_{\epsilon} dw_a \equiv 2 \sum_{\mu}^p \int^{\alpha} dw_a, \quad a = 1, 2, \dots p.$$

Hieraus folgt:

$$(4.) \quad \sum_{\mu}^p \int^{\alpha} dw_a = \frac{1}{2} \sum_{\mu}^{2p-2} \int_{\epsilon} dw_a + \frac{1}{2} P_a(z, \lambda), \quad a = 1, 2, \dots p,$$

wo z, λ Zahlenwerthe bedeuten, die mod 2 vollkommen bestimmt sind.

Es giebt bekanntlich 2^{2p} incongruente Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln $\frac{1}{2} P_a(z, \lambda)$, welche man dadurch erhält, dass man für $z_1, z_2, \dots z_p, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ je eine der Zahlen 0 und 1 setzt.

Jedem Systeme von Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, die mit μ durch eine Gleichung $\psi_{\mu} = 0$ verknüpft sind, entspricht vermöge Gleichung (4.) ein bestimmtes System correspondirender halber Periodicitätsmoduln.

Das Problem, aus den Gleichungen

$$(5.) \quad v_a = \sum_{\mu}^p \int_{\epsilon} dw_a, \quad a = 1, 2, \dots p$$

$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p$ zu bestimmen, wird für solche Werthe und nur solche Werthe der v_a unbestimmt, denen ξ entsprechen, die mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind (s. Cl. G. A. F. §. 52). Die Gleichungen (2.) könnten also für ein bestimmtes $P_a(z, \lambda)$ nur dann mehr als ein System von Punkten α liefern, wenn ein diesen Gleichungen genügendes System $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft wäre. Es wäre alsdann, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ mit μ durch die Gleichung $\psi_{\mu} = 0$ verknüpft sind, und $as + bz + c$ in μ unendlich klein zweiter Ordnung wird,

$$\frac{(as + bz + c) \varphi^2}{\psi_{\mu}}$$

für keinen im Endlichen befindlichen Punkt der Fläche T unendlich gross, also eine ganze rationale Function von (s, z) die in $m(n-2) + n(m-2)$ Punkten unendlich klein ist, also (R. A. F. §. 8) eine Function $\varphi_1(s, z)$. Diese wird in den $p-2$ Punkten, die mit den α durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind, und in μ unendlich klein zweiter Ordnung, in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten unendlich klein erster Ordnung. Nun kann aber μ so gewählt werden, dass keine Function von der Art $\varphi_1(s, z)$ für dasselbe unendlich klein zweiter Ordnung wird, was sich aus der oben citirten

Abh. des Herrn *Weber* (§. 3) ergibt, wenn nicht besondere Beziehungen zwischen den $3p-3$ Moduln der Klasse algebraischer Functionen, welche der Theorie zu Grunde gelegt werden, bestehen.

Man kann also im Allgemeinen μ so wählen, dass keines der Systeme α mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi=0$ verknüpft ist, und demnach *jedem vorgeschriebenen $P_a(x, \lambda)$ ein bestimmtes System von Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, die mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu=0$ verknüpft sind, entspricht.*

3.

Aus den Gleichungen (1^a.) und (2.) vor. No. folgt:

$$(1.) \quad c_a(p-1) = \frac{1}{2} P_a(x, \lambda) - \sum_1^p \int_{\mu}^{\alpha_a} dw_a, \quad a = 1, 2, \dots, p.$$

Demnach ist

$$(2.) \quad \vartheta \left(\alpha \left(u_a(\xi) - \sum_1^p u_a(\xi_i) \right) \right) = \vartheta \left(\alpha \left(\int_{\mu}^{\xi} dw_a - \sum_1^p \int_{\alpha_b}^{\xi_b} dw_a - \frac{1}{2} P_a(x, \lambda) \right) \right).$$

Das Argument auf der rechten Seite dieser Gleichung hat die Form, auf welche die Herren *Clebsch* und *Gordan* (A. F. §. 56) dasselbe gebracht haben. Um die Uebereinstimmung deutlicher hervortreten zu lassen, bemerken wir Folgendes: Eine Curve

$$(3.) \quad \psi \left(s^{\frac{n-1}{2}}, z^{\frac{m-1}{2}} \right) = 0$$

ist vollständig bestimmt durch die Bedingungen, dass sie durch die Doppelpunkte (sich aufhebende Verzweigungspunkte) der Curve

$$(4.) \quad F(s^{\frac{n}{2}}, z^{\frac{m}{2}}) = 0,$$

durch p auf der letzteren willkürlich angenommene Punkte und durch $m+n-2$ der Durchschnittspunkte einer Geraden:

$$as + bz + c = 0$$

mit der Curve (4.) hindurchgehen soll, wie sich aus der Vergleichung der Anzahl der disponiblen Coefficienten der Gl. (3.) mit der Anzahl der Bedingungen ergibt. Es ist daher die Curve (3.) die Curve $N-2^{\text{ter}}$ Ordnung der Herren *Clebsch* und *Gordan*, wenn wir, um Verwechslungen vorzubeugen, mit N den Grad der von ihnen der Theorie zu Grunde gelegten algebraischen Gleichung bezeichnen.

Eine Curve

$$(5.) \quad \varphi \left(s^{\frac{n-2}{2}}, z^{\frac{m-2}{2}} \right) = 0$$

dagegen ist vollständig bestimmt durch die Bedingungen, dass sie durch die

Doppelpunkte der Curve (4.) und durch $p-1$ auf der letzteren willkürlich angenommene Punkte hindurchgehen soll. Die Curve (5.) stimmt daher mit der Curve $N-3^{\text{ter}}$ Ordnung derselben Herren Verfasser überein. Dass im wirklichen Grad eine Abweichung vorhanden ist, hat seinen Grund darin, dass $f(s, z)$ in der *Riemannschen* Bezeichnung eine nicht complete ganze rationale Function $\mu + \nu^{\text{ten}}$ Grades bedeutet; ein Grund, welcher auch die Verschiedenheit der Ausdrücke für p in der Theorie von *Riemann* und der Herren *Clebsch* und *Gordan* veranlasst.

4.

Setzt man in Gleichung (2.) vor. No. $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p$ resp. gleich $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, so wird im Allgemeinen nach No. 1. und 2.

$$\vartheta \left(\alpha \left(\int_{\mu}^{\xi} dw_a - \frac{1}{2} P_a(z, \lambda) \right) \right)$$

nicht identisch in jedem Punkte ξ , sondern nur in $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ verschwinden. Soll also letztere Function in μ verschwinden, d. h.

$$(1.) \quad \vartheta \left(\alpha \left(\frac{1}{2} P_a(z, \lambda) \right) \right) = 0$$

sein, so muss eine der Grössen α mit μ zusammenfallen; und umgekehrt, wenn letzteres stattfindet, so wird die Gleichung (1.) erfüllt. In diesem Falle ergibt sich aus No. 2, dass die Function ψ_{μ} , durch welche die α mit μ verknüpft sind, durch die in μ unendlich klein werdende Function $as + bz + c$ theilbar, und der Quotient eine Function φ ist, welche in den von μ verschiedenen Punkten α unendlich klein zweiter Ordnung wird. (Vergl. Cl. G. A. F. §. 75 und *Weber* o. c. Abh. §. 6.)

Man nennt bekanntlich ein System $\frac{1}{2} P_a(z, \lambda)$ von correspondirenden halben Periodicitätsmoduln ein gerades oder ungerades, je nachdem

$$(2.) \quad z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2 + \dots + z_p \lambda_p \equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod{2}.$$

Nun ist im Allgemeinen $\vartheta \left(\alpha \left(\frac{1}{2} P_a(z, \lambda) \right) \right)$ Null oder von Null verschieden, je nachdem $\frac{1}{2} P_a(z, \lambda)$ ein ungerades oder ein gerades System halber Periodicitätsmoduln ist. (Vergl. Cl. G. A. F. §. 75 und *Weber* §. 7.)

Aus beiden Sätzen ergibt sich, wenn wir ein System $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, das mit μ durch eine Gleichung $\psi_{\mu} = 0$ verknüpft ist, nach der Analogie der *Clebsch-Gordanschen* Bezeichnung ein *eigentliches* oder ein *uneigentliches* System (α) nennen, je nachdem *keine* der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ oder *eine* mit μ coincidirt, der Satz:

Durch die Gleichung (2.) No. 2. sind die geraden Systeme halber Periodicitätsmoduln den eigentlichen Systemen (α), die ungeraden Systeme den uneigentlichen zugeordnet.

Da es nun bekanntlich $2^{p-1}(2^p-1)$ Systeme ungerader und $2^{p-1}(2^p+1)$ Systeme gerader halber Periodicitätsmoduln giebt, so ist auch die Anzahl der uneigentlichen Systeme (α) gleich $2^{p-1}(2^p-1)$ und die Anzahl der eigentlichen $2^{p-1}(2^p+1)$ (vergl. Cl. G. A. F. §. 75 und Weber §. 7).

5.

Die sämtlichen Systeme (α), welche für alle möglichen Werthe von $P_a(x, \lambda)$ durch Gleichung (2.) No. 2 auf transcendentem Wege geboten werden, genügen einem Systeme algebraischer Gleichungen, welches folgendermassen aus der Definition der Functionen ψ_μ sich ergibt.

Bestimmt man die Coefficienten der Function $\psi(s, z)$ derart, dass dieselbe in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten und in den $m+n-2$ Punkten, worin die in μ unendlich klein zweiter Ordnung werdende Function $as+bz+c$ noch ausserdem verschwindet, so erhält ψ die Form:

$$(1.) \quad \psi(s, z) = \zeta_0 \psi_0 + \zeta_1 \psi_1 + \zeta_2 \psi_2 + \dots + \zeta_p \psi_p,$$

worin die ζ willkürliche Constanten, die ψ bestimmte ganze rationale Functionen von (s, z) sind. Setzt man in die beiden Gleichungen

$$(2.) \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

für (s, z) successive $(b_1, a_1), (b_2, a_2), \dots (b_p, a_p)$, so erhält man $2p$ Gleichungen, und aus diesen, durch Elimination der Grössen ζ , p Gleichungen, welche in Verbindung mit den p Gleichungen:

$$(3.) \quad F(b_i, a_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots p$$

zur Bestimmung der Punktsysteme (b_i, a_i) oder (α) dienen. Wir wissen aus No. 2, dass wir als Lösungen dieses Systems von Gleichungen, die den verschiedenen $\frac{1}{2} P_a(x, \lambda)$ entsprechenden Punktsysteme (α) erhalten müssen. Aber wie ordnen sich die auf dem eben angegebenen algebraischen Wege ermittelten einzelnen Systeme (α) den verschiedenen Systemen halber Periodicitätsmoduln zu?

Diese Frage hat nur dann einen bestimmten Sinn, wenn die Art der Zerschneidung der Fläche T , welche vorgenommen wird, um diese Fläche

in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln, (R. A. F. §§. 3 u. 19) fixirt ist. Aus den Untersuchungen der Herren *Clebsch* und *Gordan* (A. F. §. 89) geht nämlich hervor, dass man die Querschnitte so wählen kann, dass ein beliebiges eigentliches System (α) von Lösungen der oben erwähnten algebraischen Gleichungen dem Systeme $\frac{1}{2}P_a(0, 0)$ mittelst der Gleichung (2.) No. 2 zugeordnet ist. Man kann daher, wie sich aus (Cl. G. A. F. §. 93) ergibt, statt die Querschnitte von vorn herein festzulegen, ein beliebiges eigentliches System (α) dem Systeme $\frac{1}{2}P_a(0, 0)$ mittelst Gleichung (2.) No. 2. zuordnen, worauf sich die Grösse der Periodicitätsmoduln α_{ik} bestimmen lässt.

Ist jedoch die Art der Zerschneidung der Fläche T fixirt, so sind hiermit die Periodicitätsmoduln gegeben, und es ist jedes System (α) durch Gleichung (2.) in No. 2. einem bestimmten Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln zugeordnet. Für diesen Fall wollen wir in der folgenden Nummer einige Bemerkungen, welche auf die oben aufgeworfene Frage Bezug haben, anschliessen.

6.

Ist (α') ein festes System, (α) aber ein beliebiges System, $\frac{1}{2}P_a(x', \lambda')$ und $\frac{1}{2}P_a(x, \lambda)$ die denselben resp. zugeordneten Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln, so ist nach Gleichung (2.) oder (4.) No. 2.

$$\left. \begin{aligned} (1.) \quad \sum_1^p \int_{\mu}^{\alpha'} dw_a &= \frac{1}{2} \sum_1^{2p-2} \int_{\mu}^{\epsilon_b} dw_a + \frac{1}{2}P_a(x', \lambda'), \\ (2.) \quad \sum_1^p \int_{\mu}^{\alpha} dw_a &= \frac{1}{2} \sum_1^{2p-2} \int_{\mu}^{\epsilon_b} dw_a + \frac{1}{2}P_a(x, \lambda). \end{aligned} \right\} \alpha = 1, 2, \dots p.$$

In diesen Gleichungen erstrecken sich die Integrale rechter Hand über die in der Gleichung (1^a.) No. 2. vorgeschriebenen Wege, die Integrale linker Hand über diejenigen, welche die Umkehrung der *Abelschen* Integrale erfordert. Wenn wir das durch die Differenz $\frac{1}{2}P_a(x, \lambda) - \frac{1}{2}P_a(x', \lambda')$ entstehende System correspondirender halber Periodicitätsmoduln mit $\frac{1}{2}Q_a(x, \lambda)$ bezeichnen, so ergibt die Subtraction der Gleichungen (1.) und (2.)

$$(3.) \quad \frac{1}{2}Q_a(x, \lambda) = \sum_1^p \int_{\alpha'}^{\alpha} dw_a, \quad \alpha = 1, 2, \dots p$$

(vergl. Cl. G. A. F. §. 56 und *Weber* l. c. §. 6),

wo die Integrationswege rechter Hand ebenfalls bestimmt sind, wenn α, λ bestimmte Zahlen bedeuten, aber willkürlich gewählt werden dürfen, wenn diese Zahlen nur bis auf Vielfache von 2 als gegeben betrachtet werden. Unter der letzteren Voraussetzung denken wir uns, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, die sämtlichen Integrationswege rechter Hand in Gleichung (3.) in der einfach zusammenhängenden Fläche T' verlaufend. Als dann können diese Gleichungen dazu dienen, die numerischen Werthe der ganzen Zahlen α, λ in $\frac{1}{2} Q_\alpha(\alpha, \lambda)$ zu bestimmen, sobald die Periodicitätsmoduln α_{ik} und die Integrale rechter Hand berechnet sind.

Wählt man für (α) nach und nach alle eigentlichen und uneigentlichen Systeme, so erhält man durch die Gleichung (3.) successive 2^{2p} incongruente Systeme halber Periodicitätsmoduln $\frac{1}{2} Q_\alpha(\alpha, \lambda)$, und die Systeme (α) sind auf diese Weise einem unter ihnen (α') als *Basis* zugeordnet worden.

Denken wir uns nunmehr für die Basis (α') successive alle Systeme (α) gewählt, und jedesmal die Zuordnung aller übrigen Systeme durch Gleichung (3.) ausgeführt, so sind wir im Stande das System (α^0) , welches vermittelt der Gleichung (2.) No. 2. dem Systeme $\frac{1}{2} P_\alpha(0, 0)$ zugehört, von allen übrigen Systemen (α) auszusondern.

In der That ergibt für das letztere System als Basis, wenn also (α^0) an die Stelle von (α') gesetzt wird, wie aus No. 4. folgt, die Gleichung (3.) *ein gerades oder ein ungerades* System halber Periodicitätsmoduln $\frac{1}{2} Q_\alpha(\alpha, \lambda)$, je nachdem das System der oberen Grenzen (α) *ein eigentliches oder ein uneigentliches* ist.

Umgekehrt ist das System (α^0) das einzige unter den Systemen (α) , welches diese Eigenschaft besitzt.

Da

$$\sum_1^p \int_{\alpha'_c}^{\alpha_c} dw_\alpha = \sum_1^p \int_{\alpha^0_c}^{\alpha_c} dw_\alpha - \sum_1^p \int_{\alpha^0_c}^{\alpha'_c} dw_\alpha,$$

so ergibt sich die Richtigkeit des letzteren Satzes, wenn nachgewiesen ist, dass unter den Differenzen, welche aus ein und demselben System $\frac{1}{2} Q_\alpha(\alpha', \lambda')$ und jedem einzelnen der geraden Systeme halber Periodicitätsmoduln gebildet werden, mindestens eine ist, welche ein *ungerades* System halber Periodicitätsmoduln darstellt.

Es sei daher $\frac{1}{2} Q_\alpha(\alpha, \lambda)$ irgend ein gerades System, so ist die Differenz

$$\frac{1}{2} Q_\alpha(\alpha, \lambda) - \frac{1}{2} Q_\alpha(\alpha', \lambda') = \frac{1}{2} Q_\alpha(\alpha - \alpha', \lambda - \lambda')$$

ein gerades oder ungerades System, je nachdem

$$(4.) \quad \sum_1^p (z_b - z'_b)(\lambda_b - \lambda'_b) \equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod{2} \text{ (s. No. 4. Gl. (2.)).}$$

Nun ist

$$\sum_1^p z_b \lambda_b \equiv 0 \pmod{2},$$

und wenn wir mit δ die Null oder Eins bezeichnen, je nachdem $\frac{1}{2} Q_a(z', \lambda')$ ein gerades oder ungerades System ist,

$$\sum_1^p z'_b \lambda'_b \equiv \delta \pmod{2}.$$

Es ist demnach $\frac{1}{2} Q_a(z - z', \lambda - \lambda')$ dann und nur dann ein gerades System, wenn

$$(5.) \quad \sum_1^p (z_b \lambda'_b + z'_b \lambda_b) \equiv \delta \pmod{2}.$$

Es ist nun nicht möglich, dass für alle geraden Systeme $\frac{1}{2} Q_a(z, \lambda)$ diese Congruenz erfüllt werde. Denn der Voraussetzung nach sind in dem Zahlensysteme:

$$\begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 & \dots & z'_p \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \dots & \lambda'_p \end{pmatrix}$$

nicht alle gleichstelligen z' und λ' gleichzeitig congruent Null. Ist ausserdem $\frac{1}{2} Q_a(z', \lambda')$ ungerade, so muss wenigstens ein Paar gleichstelliger z', λ' dieses Zahlensystems congruent Eins sein.

Es sei nun

1) $\frac{1}{2} Q_a(z', \lambda')$ gerade, also $\delta = 0$, und $z'_i \equiv 1$ oder $\lambda'_i \equiv 1$.

Wählen wir in dem einen oder anderen Falle ein gerades System $\frac{1}{2} Q_a(z, \lambda)$, in welchem alle z und λ congruent Null sind, ausser λ_i oder z_i , die resp. congruent Eins, so wird die Congruenz (5.) nicht erfüllt, da die linke Seite congruent Eins.

2) $\frac{1}{2} Q_a(z', \lambda')$ ungerade, also $\delta = 1$, und $z'_i \equiv 1$, $\lambda'_i \equiv 1$, so muss man zwei Fälle unterscheiden: a) Sind alle übrigen z', λ' Null, so wähle man ein gerades System $\frac{1}{2} Q_a(z, \lambda)$, worin $z_i \equiv 1$, $\lambda_i \equiv 1$; $z_m \equiv 1$, $\lambda_m \equiv 1$, alle übrigen z, λ Null; so wird die Congruenz (5.) nicht erfüllt, da die linke Seite congruent Null ist. b) Sind noch andere der Grössen z', λ' congruent Eins, z. B. $z'_m \equiv 1$ oder $\lambda'_m \equiv 1$, so wähle man das gerade System $\frac{1}{2} Q_a(z, \lambda)$ so, dass $z_i \equiv 1$, $\lambda_i \equiv 0$; $z_m \equiv 0$, $\lambda_m \equiv 1$ oder $z_m \equiv 1$, $\lambda_m \equiv 0$, alle übrigen z, λ congruent Null; so ist wieder die Congruenz (5.) nicht erfüllt, da die linke Seite congruent Null ist.

Wegen dieser bewiesenen Eigenschaft des Systems (α^0) wollen wir dasselbe das zu μ gehörige Hauptsystem nennen.

7.

Wir gehen dazu über, die in No. 3. Gleichung (2.) angenommene Darstellung der Argumente der Thetafunction auf die Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \dots, 0)$ anzuwenden. Herr *Thomae* hat (d. J. B. 66 pag. 95) für $d \log \vartheta(0, 0, \dots, 0)$ als Function der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, die als von einander unabhängig vorausgesetzt werden, einen eleganten Ausdruck gegeben und denselben für die hyperelliptischen Functionen (d. J. B. 71 pag. 201) vollständig berechnet. Die weitere Behandlung desselben Ausdruckes für den allgemeinen Fall ist jedoch durch beträchtliche Schwierigkeiten gehemmt (s. die Abh. des Herrn *Thomae* B. 66). Der von Herrn *Thomae* gegebene Ausdruck nimmt aber eine wesentlich einfachere Gestalt an, wenn man von der erwähnten Form der Argumente der Thetafunction ausgeht.

Es sei $W_1, W_2, \dots, W_p$ ein System unabhängiger Integrale erster Gattung, so dass

$$(1.) \quad W_a = \int_{\mu}^{\xi} \frac{f_a \left(\begin{smallmatrix} n-2 & m-2 \\ s & z \end{smallmatrix} \right)}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz,$$

wo die Functionen f_a ganz und rational sind und für die sich aufhebenden Verzweigungspunkte verschwinden, während die noch übrigen p willkürlichen Constanten jeder derselben (R. A. F. §. 9) einer späteren Disposition vorbehalten bleiben. Setzt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_2^{(1)}, & \dots & A_p^{(1)} \\ A_1^{(2)}, & A_2^{(2)}, & \dots & A_p^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^{(p)}, & A_2^{(p)}, & \dots & A_p^{(p)} \end{vmatrix} = \nabla,$$

wo $A_i^{(k)}$ den Periodicitätsmodul von W_i am Querschnitte a_k bedeutet (R. A. F. §. 20), so ist bekanntlich

$$(2.) \quad w_a = \frac{i\pi}{\nabla} \sum_1^p \frac{\partial \nabla}{\partial A_i^{(a)}} W_i, \quad a = 1, 2, \dots, p$$

ein System unabhängiger Integrale erster Gattung von der Beschaffenheit, dass der Periodicitätsmodul von w_a am Querschnitt a_a gleich πi , an allen übrigen Querschnitten a gleich Null, am Querschnitte b_ν gleich $a_{a\nu}$, und zugleich findet die Beziehung statt, dass $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ (R. A. F. §. 18—21).

Es sei ferner

$$(3.) \quad u_a = w_a + c_a,$$

wo c_a dieselbe Bedeutung habe wie in No. 1, und k irgend einer der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, und σ der demselben zugehörige Werth von s , so mögen aus den Gleichungen

$$(4.) \quad u_a(\sigma, k) - \sum_1^p u_a(s_b, z_b) = 0, \quad a = 1, 2, \dots, p$$

die p Grössenpaare $(s_1, z_1), (s_2, z_2), \dots (s_p, z_p)$ bestimmt werden. Bezeichnet man $\frac{du_a(s_b, z_b)}{dz_b}$ kurz mit $\frac{du_a}{dz_b}$, und setzt:

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dz_1}, & \frac{du_1}{dz_2}, & \dots & \frac{du_1}{dz_p} \\ \frac{du_2}{dz_1}, & \frac{du_2}{dz_2}, & \dots & \frac{du_2}{dz_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{du_p}{dz_1}, & \frac{du_p}{dz_2}, & \dots & \frac{du_p}{dz_p} \end{vmatrix} = \Delta,$$

so findet Herr *Thomae* l. c. ein Resultat, welches im Wesentlichen auf das Folgende hinauskommt:

$$(5.) \quad \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \dots, 0)}{\partial k} = -\frac{1}{2} \frac{\partial' \log \Delta}{\partial k},$$

wo wir durch den an das Differentiationszeichen rechts oben angefügten Index angedeutet haben, dass bei der Differentiation nach k die in Δ enthaltenen Grössen (s_b, z_b) als von k unabhängig behandelt werden sollen.

Dieses Resultat wollen wir einer Transformation unterwerfen. Zunächst ergibt sich leicht aus einem bekannten Determinantensatz, wenn man

$$\frac{dW_a(s_b, z_b)}{dz_b} = \frac{dW_a}{dz_b}$$

und die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{dW_1}{dz_1}, & \frac{dW_1}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_1}{dz_p} \\ \frac{dW_2}{dz_1}, & \frac{dW_2}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_2}{dz_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dW_p}{dz_1}, & \frac{dW_p}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_p}{dz_p} \end{vmatrix} = D$$

setzt,

$$(6.) \quad \Delta = \frac{(i\pi)^p}{\nabla} \cdot D,$$

also

$$(7.) \quad \frac{\partial' \log \Delta}{\partial k} = \frac{\partial' \log D}{\partial k} - \frac{\partial \log \nabla}{\partial k}.$$

8.

Es ist nun das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung vor. No., welches wir weiter umformen wollen. Lassen wir zu dem Ende den Punkt μ in No. 1—6 in den Verzweigungspunkt k hineinrücken, und verstehen unter (α^0) das dem k zugehörige Hauptsystem, so wie unter ξ , den Punkt (s, z) , unter ξ den Punkt (s, z) , so folgt aus Gleichung (1^a) und (2.) No. 2.

$$(1.) \quad u_a(s, z) - \sum_1^p u_a(s_b, z_b) = \int_k^{\xi} du_a - \sum_1^p \int_{\alpha_b^{(0)}}^{\xi_b} du_a, \quad a = 1, 2, \dots p.$$

Die Gleichung (4.) vor. No. wird daher

$$(2.) \quad \sum_1^p \int_{\alpha_b^{(0)}}^{\xi_b} du_a = 0, \quad a = 1, 2, \dots p,$$

welche sofort ergibt:

$$(3.) \quad \xi_1 = \alpha_1^{(0)}, \quad \xi_2 = \alpha_2^{(0)}, \quad \dots \quad \xi_p = \alpha_p^{(0)}.$$

Die lineare Function $as + bz + c$ in No. 2, welche in μ unendlich klein zweiter Ordnung wird, ist hier, mit Rücksicht auf (R. A. F. § 6), gleich $z - k$. Dieselbe verschwindet in noch $n-2$ anderen Punkten. Daraus folgt, auf dieselbe Weise wie in No. 2, dass die Function ψ_k , durch welche die Grössen (α^0) mit k verknüpft sind, in Bezug auf s vom $n-2^{\text{ten}}$, in Bezug auf z vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade ist.

Es sind nunmehr

$$\left[\frac{f_a(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} (z - k)^{\frac{1}{2}} \right]_{\substack{z=k \\ s=a}} = \mathfrak{A}_a, \quad \left[\frac{\psi_k(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} (z - k)^{\frac{1}{2}} \right]_{\substack{z=k \\ s=a}} = \mathfrak{B}$$

endliche Grössen. Weil ausserdem (α^0) ein eigentliches System ist, so ist, wenigstens so lange als nicht besondere Beziehungen zwischen den sich aufhebenden Verzweigungspunkten bestehen, wie im allgemeinen Falle μ , so hier k von $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots \alpha_p^{(0)}$ verschieden, demnach ist die Grösse $\mathfrak{B}$ nicht Null. Setzen

wir also

$$(4.) \quad \frac{\mathfrak{A}_a}{2\mathfrak{B}} = C_a,$$

so ist C_a eine endliche Constante, und die Differenz

$$\frac{\partial W_a}{\partial k} - C_a \int \frac{\psi_k(s, z)}{(z-k) \frac{\partial F}{\partial s}} dz,$$

deren Minuendus und Subtrahendus nur für $(s, z) = (\sigma, k)$ und zwar beide wie $-\mathfrak{A}_a(z-k)^{-\frac{1}{2}}$ unendlich werden, ist ein in der ganzen Fläche T endliches Integral. Es ist demnach

$$(5.) \quad \frac{\partial W_a}{\partial k} - C_a \int \frac{\psi_k(s, z)}{(z-k) \frac{\partial F}{\partial s}} dz = \lambda_{a1} W_1 + \lambda_{a2} W_2 + \dots + \lambda_{ap} W_p + \text{Const.},$$

wo die Grössen λ Constanten bedeuten (R. A. F. § 4).

Differentiiren wir diese Gleichung nach z , so erhalten wir

$$(6.) \quad \frac{\partial}{\partial k} \frac{dW_a}{dz} - C_a \frac{\psi_k(s, z)}{(z-k) \frac{\partial F}{\partial s}} = \lambda_{a1} \frac{dW_1}{dz} + \lambda_{a2} \frac{dW_2}{dz} + \dots + \lambda_{ap} \frac{dW_p}{dz}.$$

Setzen wir hierin successive für (s, z) die Punkte $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots, \alpha_p^{(0)}$, so erhalten wir

$$(7.) \quad \frac{\partial'}{\partial k} \frac{dW_a}{dz_b} = \sum_1^p \lambda_{ac} \frac{dW_c}{dz_b}, \quad \text{für } a = 1, 2, \dots, p;$$

daher ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\sum_1^p \lambda_{ic} \frac{dW_c}{dz_b} = \Sigma^{(bi)}$$

setzen,

$$\frac{\partial' D}{\partial k} = \sum_1^p \left| \begin{array}{cccc} \frac{dW_1}{dz_1}, & \frac{dW_1}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_1}{dz_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dW_{i-1}}{dz_1}, & \frac{dW_{i-1}}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_{i-1}}{dz_p} \\ \Sigma^{(1i)}, & \Sigma^{(2i)}, & \dots & \Sigma^{(pi)} \\ \frac{dW_i}{dz_1}, & \frac{dW_i}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_i}{dz_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dW_p}{dz_1}, & \frac{dW_p}{dz_2}, & \dots & \frac{dW_p}{dz_p} \end{array} \right| = D \sum_1^p \lambda_{ii}.$$

Folglich ist

$$(8.) \quad \frac{\partial' \log D}{\partial k} = \sum_1^p \lambda_{ii}.$$

9.

Die Grössen λ lassen sich aus Gleichung (6.) vor. No. auf algebraischem Wege bestimmen. Die Rechnung wird sehr einfach, wenn wir über die in jedem $f_a(s, z)$ in No. 7. willkürlich gebliebenen p Constanten folgendermassen disponiren. Es seien $b_1, b_2, \dots b_p$ willkürlich gewählte Punkte der Fläche T , die sowohl untereinander als auch von den Verzweigungspunkten vollkommen unabhängig sind. Es werden nun die p Constanten in $f_a(s, z)$ so bestimmt, dass diese Function für alle b ausser b_a verschwindet, in b_a aber den Werth von $\frac{\partial F}{\partial s}$ in demselben Punkte annimmt. Dieses ist immer zulässig, wenn nicht die Punkte b Beziehungen zu einander haben.

Die Gleichung (6.) vor. No. ergiebt alsdann:

$$(1.) \quad \left[\frac{\partial}{\partial k} \frac{f_a(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} \right]_{b_i} - C_a \left[\frac{\psi_k(s, z)}{(z-k) \frac{\partial F}{\partial s}} \right]_{b_i} = \lambda_{ai}.$$

In der Umgebung des Punktes b_i in der Fläche T ist

$$(2.) \quad \frac{f_a(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} = \varepsilon + c_1(z - b_i) + c_2(z - b_i)^2 + \dots,$$

($\varepsilon = 1$ oder 0 , je nachdem $a = i$ oder $a \neq i$),

wo $c_1, c_2, \dots$ von z unabhängige Grössen sind, und mit b_i auch der Werth von z im Punkte b_i bezeichnet ist. Aus Gleichung (2.) folgt, dass das erste Glied auf der linken Seite der Gleichung (1.) verschwindet, dass also

$$(3.) \quad \lambda_{ai} = -C_a \left[\frac{\psi_k(s, z)}{(z-k) \frac{\partial F}{\partial s}} \right]_{b_i}.$$

Aus den Gleichungen (5.) und (7.) No. 7., Gleichung (8.) No. 8. folgt daher:

$$(4.) \quad \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \dots 0)}{\partial k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \nabla}{\partial k} + \frac{1}{2} \sum_1^p C_i \left[\frac{\psi_k(s, z)}{(z-k) \frac{\partial F}{\partial s}} \right]_{b_i}.$$

In dieser Gleichung ist das erste Glied ein vollständiger Differentialquotient einer transcendenten Function; das zweite eine wohlbestimmte algebraische Function.

10.

In dem besonderen Falle der hyperelliptischen Integrale sei die der Theorie zu Grunde gelegte algebraische Gleichung

$$(1.) \quad s^2 - R(z) = 0,$$

wo

$$R(z) = (z - k_1)(z - k_2) \dots (z - k_{2p+2}),$$

und die Grössen k von einander unabhängig vorausgesetzt werden. In diesem Falle sind keine sich aufhebenden Verzweigungspunkte vorhanden. Ist daher

$$\varphi(z) = (z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_p),$$

so kann man setzen:

$$(2.) \quad f_a(s, z) = \frac{2\sqrt{R(b_a)}}{\varphi'(b_a)} \cdot \frac{\varphi(z)}{z - b_a}.$$

Da sich aufhebende Verzweigungspunkte nicht vorhanden, so kann man für $\varphi(s, z)$ eine ganze rationale Function $p-1$ ten Grades von z wählen. Eine solche Function wird in einem Verzweigungspunkte, wo sie verschwindet, unendlich klein zweiter Ordnung. Daher können die Grössen ε in No. 2 zu je zweien einander gleich und gleich einer der Grössen $k_1, k_2, \dots, k_{2p+2}$ genommen werden.

Ist k eine dieser Grössen und fällt μ in k hinein, so ergibt die Gleichung (2.) No. 2 für das System der oberen Grenzen (α) p Verzweigungspunkte, da im gegenwärtigen Falle jede zwischen zwei Verzweigungspunkten verlaufende Integration eines der Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln liefert. Man kann also, wenn $k', k'', \dots, k^{(p)}$ die p Verzweigungspunkte sind, welche die Gleichung (2.) No. 2 für ein bestimmtes $P_a(z, \lambda)$ ergibt, das zugehörige $\psi_k(s, z)$ setzen

$$\psi_k(s, z) = (z - k')(z - k'') \dots (z - k^{(p)}).$$

Sind insbesondere $k_1, k_2, \dots, k_p$ diejenigen Verzweigungspunkte, welche die Gleichung (2.) No. 2 für $P_a(0, 0)$ liefert, also das System (α^0), so sind diese Verzweigungspunkte von k verschieden, da in ihnen $\mathcal{P}_1^p\left(\int_k^\xi dw_a\right)$ verschwindet, während diese Function für $\xi = k$ in die im Allgemeinen nicht verschwindende Grösse $\mathcal{P}(0, 0, \dots, 0)$ übergeht. Die zu (α^0) gehörige Function $\psi_k(s, z)$ ist

$$(3.) \quad \psi_k(s, z) = \psi(z) = (z - k_1)(z - k_2) \dots (z - k_p).$$

Es ist alsdann

$$(4.) \quad C_a = \frac{\sqrt{R(b_a)}}{\varphi'(b_a)} \cdot \frac{\varphi(k)}{(k-b_a)\psi(k)}.$$

Also geht das zweite Glied der rechten Seite der Gl. (4.) vor. No. über in:

$$\frac{1}{4} \sum_1^p \frac{\psi(b_i)}{\varphi'(b_i)(k-b_i)^2} \cdot \frac{\varphi(k)}{\psi(k)}.$$

Setzt man

$$(5.) \quad \frac{\varphi(k_a)\psi(b_i)}{\psi'(k_a)\varphi'(b_i)} \cdot \frac{1}{(k_a-b_i)^2} = l_{ia},$$

so ist nach Gleichung (4.) vor. No.

$$(6.) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \dots 0)}{\partial k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log \nabla}{\partial k} + \frac{1}{4} \sum_1^p \frac{d \log(k-b_i)}{dk} \\ &+ \frac{1}{4} \sum_1^p \sum_1^p l_{ia} \frac{d \log(k-k_a)}{dk}. \end{aligned} \right.$$

11.

Zieht man es vor, bei den hyperelliptischen Integralen die gewöhnliche Form

$$(1.) \quad \frac{dW_a}{dz} = \frac{z^{a-1}}{\sqrt{R(z)}}$$

festzuhalten, so wird

$$(2.) \quad C_a = \frac{k^{a-1}}{2\psi(k)}.$$

Die Gleichung (6.) in No. 8 wird gegenwärtig:

$$(3.) \quad \frac{\frac{1}{2}z^{a-1} - C_a\psi(z)}{z-k} = \sum_1^p \lambda_{ab} z^{b-1}.$$

Setzt man

$$\frac{\psi(z) - \psi(k)}{z-k} = \chi(z),$$

so folgt aus Gleichung (3.)

$$(4.) \quad \lambda_{ii} = -\frac{C_i}{1.2 \dots (i-1)} \left[\frac{d^{i-1} \chi(z)}{dz^{i-1}} \right]_{z=0},$$

also

$$\sum_1^p \lambda_{ii} = -\frac{1}{2\psi(k)} \sum_1^p \frac{k^{a-1}}{1.2 \dots (a-1)} \left[\frac{d^{a-1} \chi(z)}{dz^{a-1}} \right]_{z=0} = -\frac{\chi(k)}{2\psi(k)},$$

also

$$(5.) \quad \sum_1^p \lambda_{ii} = -\frac{\psi'(k)}{2\psi(k)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \psi(k)}{\partial k},$$

also nach Gleichung (8.) No. 8

$$\frac{\partial' \log D}{\partial k} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \psi(k)}{\partial k}$$

und folglich nach Gleichung (5.) und (7.) No. 7

$$(6.) \quad \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \dots 0)}{\partial k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \nabla}{\partial k} + \frac{1}{4} \frac{\partial \log \psi(k)}{\partial k},$$

was mit dem Resultate des Herrn *Thomae* (ob. cit. Abh. d. J. Bd. 71 pag. 216) übereinstimmt.

Greifswald im März 1871.