I. *Ueber die Anordnung der Elektricität auf einer einzelnen sehr dünnen Platte und auf den beiden Belegungen einer Franklin'schen Tafel;*
von R. Clausius.

Man hat sich in der mathematischen Physik vielfach damit beschäftigt, die Anordnung der Elektricität auf leitenden Körpern zu bestimmen, sowohl wenn diese, nachdem sie elektrisirt sind, sich selbst überlassen bleiben, als auch wenn sie unter dem Einflusse anderer in der Nähe befindlicher leitender Körper stehen. Man hat dabei jedoch selten den speciellen Fall untersucht, wo die leitenden Körper die Form von sehr dünnen Platten haben, und doch scheint mir dieser Fall von besonderer Wichtigkeit zu seyn, weil das Hauptinstrument für Maschinenelektricität, die Leidener Flasche, aus zwei solchen Platten, nämlich den beiden Belegungen besteht, welche gegenseitig auf einander einwirken.

Die beste Behandlung dieses Gegenstandes, welche mir bekannt geworden ist, findet sich in dem achten Artikel des vortrefflichen Aufsatzes von George Green, in welchem er zuerst den Namen »Potentialfunction« einführt ¹⁾. Dieser stellt sich dort die Aufgabe gleich sehr allgemein, indem er die Belegungen als von beliebiger Form und Krümmung annimmt, und nur den Abstand zwischen beiden als überall sehr klein gegen ihre sonstigen Ausdehnungen voraussetzt. Nach einer anderen Richtung hin beschränkt er seine Untersuchung jedoch bedeutend, indem

1) *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism; by George Green. Nottingham 1828. Im Auszuge Crelle's Journ. XXXIX. S. 73.*

er an jeder Belegung die beiden Gränzflächen unterscheidet, und nur die Elektricität betrachtet, welche sich auf der dem Glase zugewandten Fläche befindet, und dagegen diejenige, welche auf der vom Glase abgewandten Fläche bleibt, vernachlässigt.

Aber gerade die Bestimmung der letzteren bietet besondere Schwierigkeiten dar, und ich glaube daher, hier eine Untersuchung mittheilen zu dürfen, bei der ich mich nach der einen Richtung hin weit mehr beschränkt habe als Green, indem ich bei der *einfachsten* Form einer Leidener Flasche, nämlich bei der sogenannten *Franklin'schen Tafel mit kreisförmigen Belegungen*, stehen geblieben bin, dafür aber bei dieser die *ganze* auf jeder Belegung befindliche Elektricitätsmenge betrachtet habe.

Bevor wir jedoch zu diesem Gegenstande übergehen, möge noch eine andere Betrachtung hier Platz finden, welche theils für das Folgende nothwendig, theils, wie es mir scheint, an sich von Interesse ist, nämlich über die Anordnung der Elektricität auf einer *einzelnen stehenden Platte*, und dabei wollen wir diese nicht als kreisförmig sondern gleich allgemeiner als *ellipsenförmig* annehmen.

Die Platte wurde vorher nur als *sehr* dünn bezeichnet, in der Rechnung aber wollen wir sie als *unendlich* dünn, oder als ein Stück einer mathematischen Ebene betrachten und wollen dabei die auf beiden Seiten befindlichen Elektricitätsmengen in Einem Ausdruck zusammenfassen. Zugleich soll vorausgesetzt werden, daß die Platte *vollkommen isolirt* sey, so daß selbst, wenn die Dichtigkeit der Elektricität am Rande der Platte unendlich groß wird, keine Elektricität entweichen könne. Wie sich die so gewonnenen Resultate für wirklich vorkommende Fälle, in welchen jene Bedingungen nur angenähert erfüllt sind, ändern müssen, wird man dann leicht übersehen können.

Wenn man einem aus einem leitenden Stoffe bestehenden soliden *Körper* Elektricität mittheilt, so ist es bekannt, daß alle diese Elektricität sich nach der Oberfläche begiebt, so daß im Innern des Körpers gar keine freie Elektricität bleibt. Anders wird es bei einer begrenzten

Fläche seyn. Auch hier wird sich zwar die Elektricität nach dem Rande hindrängen, doch wird sie sich nicht *alle* dort anhäufen, sondern der Gleichgewichtszustand wird sich so herstellen, daß die Dichtigkeit der Elektricität von Innen nach dem Rande zu nach einem bestimmten von der Gestalt der Fläche abhängigen Gesetze zunimmt.

Um die Function, welche die Dichtigkeit der Elektricität an den verschiedenen Stellen der Platte angiebt, zu bestimmen, müßte man eigentlich die Formel für die Potentialfunction ¹⁾ an irgend einem ihrer Punkte in Bezug auf die über ihre ganze Fläche verbreitete Elektricität aufstellen, und dann der darin vorkommenden Dichtigkeitsfunction eine solche Gestalt geben, daß dadurch die Potentialfunction für die ganze Ausdehnung der Platte constant wird. Wenn man indessen diesen Weg einschlägt, so stößt man bald auf bedeutende Schwierigkeiten, während man durch ein anderes Verfahren auf einem kleinen Umwege die gesuchte Function sehr leicht erhalten kann.

Die Verbreitung der Elektricität über ein Ellipsoid ist bekannt ²⁾. Denkt man sich nämlich die Elektricität als eine sich an der Oberfläche des Körpers hinziehende sehr dünne Schicht, welche mit elektrischem Fluidum von durchweg gleicher Dichtigkeit angefüllt ist, aber an den verschiedenen Punkten der Oberfläche eine verschiedene Dicke hat, so daß die Dicke der Schicht an irgend einem Punkte die dort angehäuften Quantität von Elektricität angiebt, oder dem entspricht, was man sonst gewöhnlich als die Dichtigkeit der Elektricität bezeichnet, so ist diese Schicht

1) Ich habe absichtlich statt des jetzt gebräuchlichen Wortes *Potential* an dieser Stelle und im Folgenden den älteren von Green angewandten Ausdruck *Potentialfunction* beibehalten, um die hier betrachtete Größe, in welcher nur Eine der beiden einander anziehenden oder abstossenden Massen als Factor vorkommt, von der ebenfalls mit dem Worte *Potential* bezeichneten Größe, in welcher sie beide als Factoren vorkommen, zu unterscheiden.

2) S. z. B. Poisson, *Mém. sur la Distribution de l'Electr. à la surface des corps conducteurs. Mém. de l'Inst. de France. Ann. 1811 prem. Partie p. 4.*

für unserm Fall von zwei einander sehr nahe liegenden, *ähnlichen und concentrischen Ellipsoidflächen eingeschlossen*. Dafs dieses richtig ist, ergibt sich ganz einfach daraus, dafs, wenn eine solche Ellipsoidschicht von irgend einem homogenen Stoffe ausgefüllt ist, wovon jedes Theilchen rings umher eine anziehende oder abstofsende Kraft ausübt, welche im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung abnimmt, dann für jeden Punkt des von der inneren Fläche der Ellipsoidschicht eingeschlossenen Raumes, sich die Wirkungen aller einzelnen Elemente gerade aufheben, so dafs die Kraft dort Null oder die Potentialfunction constant ist.

Dieser Satz bleibt richtig, in welchem Verhältnisse auch die drei Axen des Ellipsoids zu einander stehen mögen. Man kann daher auch die eine Axe sehr klein werden lassen, und wenn man dieses bis ins Unendliche fortsetzt, so geht das Ellipsoid in eine unendlich dünne ellipsenförmige Platte über. Alsdann giebt die elektrische Dichtigkeit auf den beiden sich nähernden ellipsoidischen Halbfächen zusammengenommen die gesuchte Dichtigkeit auf der elliptischen Ebene.

Um die dadurch bedingte Formel abzuleiten, betrachten wir zunächst ein ganz beliebiges Ellipsoid mit den Axen a , b und c , welche mit den drei Coordinatenaxen eines rechtwinklichen Coordinatensystems zusammenfallen, so dafs die Gleichung des Ellipsoids

$$(1.) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist. Die in der nebenstehenden Figur gezeichnete Ellipse

soll irgend einen durch die Axe der z gehenden Querschnitt des Ellipsoids darstellen, so dafs CD die Axe der z und AB die Durchschnittsline der Ebene der xy mit der Ebene des Querschnitts ist. Auf der Ober-

fläche des Ellipsoïds wählen wir irgend einen Punkt M mit den Coordinaten x , y und z , ziehen von dort die Linie MO nach dem Mittelpunkte, deren Länge mit ϱ bezeichnet werde, fällen das Perpendikel MN auf die Ebene der xy , und errichten endlich in M auf die Oberfläche die Normale MP , welche letztere aber nicht, wie es in der Figur vielleicht scheint, in der Ebene des Papiers zu liegen braucht. Die Winkel PMO und PMN bezeichnen wir der Kürze wegen mit φ und ψ .

Wir nehmen nun bei M ein Element $d\vartheta$ der Ellipsoïdfläche, und projeciren dieses senkrecht auf die Ebene der xy , wodurch wir als Projection ein bei N liegendes Flächenelement $d\omega$ erhalten. Auf dieses Element denken wir uns die auf dem Elemente $d\vartheta$ befindliche Elektricität verlegt, und ebenso die Elektricität, welche sich auf einem bei dem gegenüber liegenden Punkte M' genommenen ebenso grossen Elemente $d\vartheta'$ befindet, und bestimmen dann die dadurch entstehende elektrische Dichtigkeit bei N .

Die elektrische Dichtigkeit bei dem Punkte M und die natürlich ebenso grosse Dichtigkeit bei dem ganz symmetrisch liegenden Punkte M' sey mit Y , und die gesuchte Dichtigkeit bei N mit Z bezeichnet, so ist:

$$(2.) \quad Z = 2Y \frac{d\vartheta}{d\omega},$$

weil die Elektricität von den beiden gleichen Elementen $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ auf das Eine Element $d\omega$ zusammengedrängt ist. Ferner ist, wie man leicht aus der Figur ersieht:

$$d\omega = d\vartheta \cdot \cos \psi$$

und somit:

$$(3.) \quad Z = \frac{2Y}{\cos \psi}.$$

Hierin muß zunächst die Gröfse Y näher bestimmt werden. Dazu gehen wir zu der Vorstellung zurück, dafs die Elektricität eine zwischen zwei concentrischen, ähnlichen Ellipsoïdflächen eingeschlossene Schicht bilde. Wir denken uns die zweite Ellipsoïdfläche etwas gröfser als die bisher betrachtete, und zwar so, dafs die Axen in dem

Verhältnisse von $1:1+\delta$ zu einander stehen. Dann muß auch die Linie OM , wenn sie bis zur zweiten Fläche fortgesetzt wird, statt der Länge ρ die Länge $\rho(1+\delta)$ annehmen, so daß das zwischen beiden Flächen liegende Stück der Linie $=\rho\delta$ ist; und daraus ergibt sich für die Dicke der Schicht an dieser Stelle, oder für die elektrische Dichtigkeit daselbst, der Ausdruck:

$$Y = \rho\delta \cdot \cos \varphi.$$

Die hierin vorkommende Größe δ kann eliminirt werden, sobald die ganze auf dem Ellipsoid befindliche Elektrizitätsmenge, welche Q heißen möge, bekannt ist. Diese Elektrizitätsmenge wird nämlich bei dieser Vorstellung durch das Volumen der ganzen Ellipsoidschicht repräsentirt, und wir haben also:

$$Q = \frac{4}{3}abc \cdot \pi [(1+\delta)^3 - 1],$$

wofür wir, da δ als sehr klein angenommen ist, setzen können:

$$Q = 4abc \cdot \pi \cdot \delta,$$

und durch diese Gleichung geht der vorige Ausdruck von Y über in:

$$(4.) \quad Y = Q \cdot \frac{\rho \cos \varphi}{4abc \cdot \pi}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (3), so kommt:

$$(5.) \quad Z = \frac{Q}{2abc \cdot \pi} \cdot \frac{\rho \cos \varphi}{\cos \psi}.$$

Es muß nun noch der Bruch $\frac{\rho \cos \varphi}{\cos \psi}$ durch die Coordinaten x und y des Punktes N ausgedrückt werden. Dazu wissen wir nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie, daß die Gleichungen der Normale MP

$$\frac{x'-x}{a^2} = \frac{y'-y}{b^2} = \frac{z'-z}{c^2},$$

und die der Linie MO

$$\frac{x'-x}{x} = \frac{y'-y}{y} = \frac{z'-z}{z}$$

sind, wenn wir mit x' , y' und z' die laufenden Coordinaten

der Linien bezeichnen; und daraus ergibt sich für den von diesen beiden Linien eingeschlossenen Winkel φ :

$$\cos \varphi = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

oder, wenn wir statt des Werthes $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, welcher die Strecke MO darstellt, den dafür eingeführten Buchstaben ρ setzen, und die Gleichung (1) berücksichtigen:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\rho \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Ferner ergibt sich aus dem ersten der beiden vorigen Systeme von Gleichungen für den Winkel ψ , welchen die Normale MP mit MN , also mit einer der Axe der z parallelen Linie bildet, die Gleichung:

$$\cos \psi = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Setzt man diese Werthe von $\cos \varphi$ und $\cos \psi$ in (5) ein, so kommt:

$$(6.) \quad Z = \frac{Q}{2ab\pi} \cdot \frac{c}{z},$$

und da nach (1)

$$\frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

ist, so erhält man als Schlufsgleichung:

$$(I.) \quad Z = \frac{Q}{2ab\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Da in diesem Ausdrücke c gar nicht mehr vorkommt, so ist er für alle Werthe von c gleich, und wird also auch derselbe bleiben, wenn c unter Anderen unendlich klein wird, und somit ist dieses Z der gesuchte Ausdruck für

die elektrische Dichtigkeit auf einer mit der Elektrizitätsmenge Q versehenen elliptischen Ebene mit den Axen a und b .

Nehmen wir insbesondere die Ellipse als einen Kreis mit dem Radius a an, und bezeichnen die GröÙe $\sqrt{x^2 + y^2}$, welche den Abstand des auf dem Kreise betrachteten Punktes vom Mittelpunkte bedeutet, mit r , so kommt:

$$(II.) \quad Z = \frac{Q}{2a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}.$$

Nachdem wir so den Ausdruck für die elektrische Dichtigkeit einmal gefunden haben, können wir nun den Beweis, daß er in der That der richtige ist, auch unabhängig von jenem Ellipsoïd führen, indem wir zeigen, daß durch ihn die oben erwähnte Bedingung, daß die Potentialfunction über die ganze Ausdehnung der Fläche constant sey, erfüllt wird. Wir wollen dieses indessen hier nur für den speciellen Fall der Kreisfläche ausführen.

Die nebenstehende Figur zeigt diesen Kreis, und es

sey darin P ein im Abstände r von dem Mittelpunkte C genommener Punkt, für welchen die Potentialfunction bestimmt werden soll. Man nehme dazu P als Mittelpunkt von Polarcoordinaten, so daß x und φ die zu diesem Systeme gehörigen Coordinaten irgend eines anderen Punktes P' seyen.

Dann wird das bei P' liegende Flächenelement durch $x dx d\varphi$ ausgedrückt, und wenn man den Abstand des Punktes P' von C mit r' , und demgemäß die bei P' stattfindende elektrische Dichtigkeit mit Z' bezeichnet, so ist die auf diesem Elemente befindliche Elektrizitätsmenge:

$$Z' x dx d\varphi.$$

Die Potentialfunction dieser Elektrizitätsmenge, welche

um die Strecke x von dem betrachteten Punkte P entfernt ist, wird dargestellt durch

$$(7.) \quad - \frac{Z' x dx d\varphi}{x} = - Z' dx d\varphi$$

worin das $-$ Zeichen für den Fall gilt, wo die auf der Platte befindliche Elektricität positiv ist, indem die Potentialfunction auf ein ebenfalls positives Elektricitätstheilchen bezogen wird, und die wirksame Kraft daher eine Abstossung ist ¹⁾.

Die hierin vorkommende Gröfse Z' ist nach Gleichung (II.):

$$Z' = \frac{Q}{2a^2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r'^2}{a^2}}} = \frac{Q}{2a\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r'^2}}$$

und zugleich ist, wie man leicht aus der Figur ersieht:

$$r'^2 = r^2 + 2rx \cos \varphi + x^2,$$

und somit geht (7.) über in

$$(8.) \quad - \frac{Q}{2a\pi} \frac{dx d\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 - 2rx \cos \varphi - x^2}}.$$

Diesen Ausdruck muß man, um die Potentialfunction der ganzen auf der Platte befindlichen Elektricität zu erhalten, für die ganze Kreisfläche integrieren. Dazu integriere man zuerst nach x von Null bis zu einem Werthe, der in der Figur durch PB dargestellt wird, und der mit x_1 bezeichnet werde. Er hängt offenbar, aufser von der für diese Integration constanten Gröfse r , von dem Winkel φ ab, und ist durch die Gleichung:

$$(9.) \quad x_1 = \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi$$

bestimmt. Nachdem dieser Ausdruck in dem nach x genommenen Integrale als obere Gränze eingesetzt ist, muß nach φ von 0 bis 2π integrirt werden.

1) Green hat die Vorzeichen anders gewählt, indem er die Potentialfunction positiv und negativ setzt, je nach dem die Elektricität positiv oder negativ ist, es scheint indessen zweckmäßiger zu seyn, das positive Vorzeichen für den Fall der Anziehung zu gebrauchen.

Nun ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - r^2 - 2rx \cos \varphi - x^2}} = \arcsin \frac{x + r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} + \text{Const.}$$

und somit nach Gleichung (9):

$$(10.) \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - r^2 - 2rx \cos \varphi - x^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}},$$

wobei im zweiten Gliede der arc. zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen werden muß. Wenn dieser Ausdruck nach φ von 0 bis 2π integrirt wird, so giebt das erste Glied π^2 . Das zweite Glied dagegen giebt Null, wie man gleich daran sieht, daß, wenn man statt irgend eines Werthes von φ den um π größeren Werth setzt, dann die Gröfse $\arcsin \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}$ bei gleichem numerischen Werthe das entgegengesetzte Zeichen annimmt; denn daraus folgt weiter, daß das Integral von 0 bis π dem von π bis 2π numerisch gleich aber entgegengesetzt ist, und daher diese beiden Theile des von 0 bis 2π zu nehmenden Integrales sich gegenseitig aufheben. Somit bleibt π^2 der Werth des ganzen Integrals von (10.), und der Ausdruck (8.) geht also durch die doppelte Integration in die von r unabhängige Gröfse

$$(11.) \quad - \frac{Q\pi}{2a}$$

über, d. h. die Potentialfunction ist, wie es gefordert wurde, für die ganze Kreisfläche constant.

Aus der Gleichung (II.) ergibt sich, daß die elektrische Dichtigkeit nach der Peripherie zu stark wächst, und an der Peripherie selbst, wo $r=a$ ist, unendlich wird, und dasselbe ergibt sich aus der Gleichung (I.) für die Ellipse; doch ist dieses Wachsen nicht von der Art, daß die Elektricität in so überwiegender Menge an der Peripherie angehäuft wäre, daß man dagegen die im Inneren befindliche Elektricitätsmenge vernachlässigen könnte. Um

in dieser Beziehung ein bestimmtes Urtheil zu gewinnen, wollen wir uns die ganze Kreisfläche in eine innere concentrische Kreisfläche mit dem Radius b , (indem $b < a$ angenommen wird), und in den zwischen beiden Peripherien liegenden Ring getheilt denken, und die auf beiden Theilen befindlichen Elektricitätsmengen bestimmen. Bezeichnen wir dieselben mit R und S , so haben wir nach (II.):

$$(12.) \quad \begin{cases} R = \frac{Q}{2a^2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = Q \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) \\ S = \frac{Q}{2a^2\pi} \int_0^{2\pi} \int_b^a \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = Q \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \end{cases}$$

Setzen wir hierin z. B. $b = \frac{2}{3}a$, so ist:

$$R = \frac{2}{3}Q \text{ und } S = \frac{3}{5}Q,$$

und setzen wir $b = \frac{1}{3}a$, so ist:

$$R = \frac{8}{13}Q \text{ und } S = \frac{5}{13}Q.$$

- 1) Nachdem ich meinen Aufsatz beendet hatte, wurde ich noch auf zwei andere Schriften aufmerksam gemacht, in welchen auch die Anordnung der Elektricität auf einer einzelnen Platte vorkommt, und welche mir bis dahin unbekannt geblieben waren. Die Eine ist eine spätere Arbeit von Green (*Mathematical Investigation concerning the Laws of the Equilibrium of Fluids analogous to the Electric Fluid with other similar Researches; by George Green. Transact. of the Cambridge Phil. Soc. Vol. V.*) Darin behandelt der Verfasser, nachdem er das Verhalten einer soliden Kugel bestimmt hat, als Analogon eine Kreisplatte, welche selbst mit einer gewissen Quantität jenes Fluidums versehen ist, und zugleich unter dem Einflusse beliebiger anderer Quantitäten desselben steht, welche sich außer ihr, aber in derselben Ebene befinden, und eine bestimmte Anordnung haben. Er gelangt dabei auf einem ganz anderen Wege, als dem von uns eingeschlagenen, zu einer Formel, die für den besonderen Fall, daß das Fluidum Elektricität ist, und daß keine äußeren Einflüsse stattfinden, mit der oben unter (II.) gegebenen Formel übereinstimmt. Zur Bestä-

Man sieht leicht, daß das Ellipsoid ebenso, wie es im Vorigen durch die Verkleinerung Einer Axe in eine dünne Platte, und als Gränze in eine mathematische Fläche verwandelt ist, auch durch die Verkleinerung zweier Axen in einen Stab, und als Gränze in eine mathematische Linie

tigung derselben führt er eine von Biot (*Traité de Physic. T. II, p. 277*; deutsche Bearbeitung von Fechner Bd. II, S. 191) mitgetheilte Versuchsreihe von Coulomb an, welche ich hier ebenfalls aufnehmen will. Die Versuche wurden an einer Kupferplatte von 10" Durchmesser angestellt, deren Dicke nicht näher angegeben wird. Da aber die Dicke im Verhältnisse zum Durchmesser jedenfalls gering gewesen ist, so können wir die an den verschiedenen Puncten, mit Ausnahme derer dicht am Rande, beobachteten Dichtigkeiten mit den berechneten vergleichen.

Abstand vom Rande der Platte.	Beobachtete Dich- tigkeit.	Berechnete Dich- tigkeit.
5"	1	1
4"	1,001	1,020
3"	1,005	1,090
2"	1,17	1,250
1"	1,52	1,667
0",5	2,07	2,294
0	2,90	∞

Green bemerkt dazu: „Wir sehen also, daß die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Dichtigkeiten gering sind, und überdiß sind die beobachteten immer etwas kleiner als die berechneten, was offenbar der Fall seyn mußte, indem die letzteren unter der Annahme einer *unendlich* kleinen Dicke bestimmt sind, und daher etwas größer ausfallen mußten, als wenn die Dicke eine *endliche* GröÙe ist, wie es nothwendig bei Coulomb's Experimenten seyn mußte.“ — Die zweite Schrift hat zum Titel: *Elementary Principles of the Theories of Electricity, Heat and Molecular Actions; by R. Murphy. Part I, on Electricity. Cambridge 1833.* Darin wird p. 70 ebenfalls die Anordnung der Elektricität auf einer Kreisplatte bestimmt, und hier stimmt auch das angewandte Verfahren im Wesentlichen mit dem oben gewählten überein. — Da indessen Green und Murphy sich auf die Kreisplatte beschränken, während die oben unter (I.) gegebene Gleichung allgemein für die Ellipse gilt, und da auch der von mir hinzugefügte directe Beweis vielleicht dazu beitragen kann, das Zutrauen zu den Formeln noch zu vermehren, so habe ich geglaubt, daß meine Entwicklung durch jene früheren Arbeiten doch nicht ganz überflüssig gemacht sey, und habe sie daher ungeändert stehen lassen.

verwandelt werden kann. Man findet dann, daß die Elektrizität sich über die Linie *gleichförmig* verbreitet. Dieser Fall ist indessen an sich zu einfach, als daß man bei ihm eines solchen Hilfsmittels bedürfte, und wir wollen uns daher nicht weiter bei ihm aufhalten, sondern uns zur Betrachtung der *Franklin'schen Tafel* wenden.

Die in dieser Bezeichnung zusammengefaßten Bedingungen mögen, soweit sie für die Frage wesentlich sind, in folgender Weise genauer festgestellt werden. Es sind zwei sehr dünne Kreisplatten mit dem gleichem Radius a gegeben, welche in dem Abstände c parallel neben einander stehen, so daß die Gerade, welche ihre Mittelpunkte verbindet, auf beiden Ebenen senkrecht ist. Beide Platten bestehen aus einem leitenden Stoffe, sind aber durch einen nicht leitenden Stoff von einander getrennt, und auch im Uebrigen vollkommen isolirt. In Bezug auf die Art der Ladung wird vorläufig angenommen, daß nicht, wie es in der Praxis gewöhnlich geschieht, nur der Einen Platte Elektrizität zugeführt wird, während die andere mit der Erde in leitender Verbindung steht, wobei diese natürlich weniger Elektrizität aufnimmt als jene, sondern, daß die Mengen entgegengesetzter Elektrizität, mit welchen beide Platten versehen werden, *gleich* seyen. Der letztere Fall ist nämlich für die Behandlung einfacher, weil bei ihm die Verbreitung der Elektrizität offenbar auf beiden Platten gleich ist, und daher nur Eine Function bestimmt zu werden braucht; und von diesem Falle läßt sich alsdann, wie weiter unten gezeigt werden soll, auf jeden anderen Fall der Ladung schließen.

Sey nun der Abstand irgend eines Punktes der einen Kreisfläche von ihrem Mittelpunkte mit r , und der Bruch $\frac{r}{a}$ mit z bezeichnet, so läßt sich die in diesem Punkte stattfindende elektrische Dichtigkeit durch eine Function von z darstellen, und wir wollen diese wiederum wie oben mit Z bezeichnen. Ueber die Natur dieser Function läßt sich gleich im Voraus ein Schluß ziehen, welcher die weitere

Behandlung erleichtert. Während wir nämlich vorher den Abstand des gewählten Punktes vom Mittelpunkte stillschweigend als eine absolute Gröfse vorausgesetzt haben, können wir auch, wenn wir statt der ganzen Kreisfläche nur einen einzelnen Durchmesser betrachten, die Lage der auf demselben befindlichen Punkte dadurch näher charakterisiren, dafs wir, je nachdem sie an der einen oder anderen Seite vom Mittelpunkte liegen, ihre Abstände mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen. Da nun die elektrische Dichtigkeit an je zwei nach beiden Seiten hin von der Mitte gleich weit entfernten Punkten dieselbe seyn mufs, so können wir schliessen, dafs die Function Z durch die Umkehrung des Vorzeichens von z ihren Werth nicht ändert. Ferner können wir annehmen, dafs wenn die Gröfse z allmählig von positiven zu negativen Werthen übergeht, bei ihrem Durchgange durch Null die von ihr abhängige Function Z mit allen ihren Differentialcoefficienten stetig bleibt, da durchaus kein Grund vorhanden ist, weshalb hier eine Discontinuität eintreten sollte. Demnach können wir uns Z in eine nach steigenden Potenzen von z geordnete Reihe entwickelt denken und dabei sicher seyn, dafs nur *gerade* Potenzen von z vorkommen, und wir wollen daher auch Z von Vorne herein nicht als eine Function von z sondern von z^2 betrachten.

Zur Bestimmung dieser Function dient die Bedingung, dafs die Potentialfunction der auf beiden Platten befindlichen

Elektricität zusammengekommen über die ganze Ausdehnung jeder der beiden Platten constant sey. Wir wollen diese Bedingung im Folgenden kurz die *Gleichgewichtsbedingung* nennen. Stelle jetzt der Kreis in nebenstehender Figur die Platte dar, welche mit positiver Elektricität geladen ist,

so wollen wir den Ausdruck der Potentialfunction für den Punkt P entwickeln, wobei aber vorläufig vorausgesetzt sey, daß P nicht zu nahe am Rande liege, sondern daß seine Entfernung von demselben, nämlich $PA = a - r$, im Verhältnisse zu dem Abstände c der beiden Platten unter einander noch als groß angesehen werden könne. Für den Rand und die in seiner Nähe liegenden Punkte müssen, wie man bald sehen wird, besondere Betrachtungen angestellt werden.

Heiße nun V_1 die Potentialfunction in Bezug auf die auf derselben Platte befindliche Elektricität, V_2 die Potentialfunction in Bezug auf die auf der andern Platte befindliche, und endlich V die vollständige Potentialfunction in Bezug auf beide Elektricitätsmengen, so ist zunächst ganz der oben für eine einzelne Platte ausgeführten Entwicklung entsprechend:

$$V_1 = - \int_0^{2\pi} \int_0^{x_1} Z' dx d\varphi$$

worin

$$x_1 = \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi$$

oder

$$(13.) \quad x_1 = a(\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} - z \cos \varphi)$$

ist. Um ferner den Ausdruck für V_2 zu erhalten, braucht man in dem Ausdrucke (7.) nur statt des Nenners x zu setzen $\sqrt{c^2 + x^2}$, und das negative Vorzeichen in das positive zu verwandeln, weil die auf der andern Platte befindliche Elektricität negativ ist, und daher eine *Anziehung* ausübt, und dann, wie vorher, die Integralzeichen hinzuzufügen, also:

$$V_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{x_1} Z' \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} dx d\varphi,$$

und aus diesen beiden Ausdrücken ergibt sich:

$$(14.) \quad V = - \int_0^{2\pi} \int_0^{x_1} Z' \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} \right) dx d\varphi.$$

Wir denken uns nun diese Potentialfunction, welche für $c=0$ offenbar selbst in Null übergeht, durch eine nach steigenden Potenzen von c geordnete Reihe dargestellt, und wollen von dieser zunächst *nur das erste Glied, welches in Bezug auf c von der ersten Ordnung ist, bestimmen.*

Dazu entwickeln wir auch die Gröfse Z' , welche die elektrische Dichtigkeit beim Punkte P' vorstellt, in eine Reihe, und zwar folgendermaßen:

$$Z' = Z + \frac{dZ}{dz^2}(z'^2 - z^2) + \frac{1}{2} \frac{d^2Z}{(dz^2)^2}(z'^2 - z^2)^2 \\ + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3Z}{(dz^2)^3}(z'^2 - z^2)^3 \text{ etc.}$$

Nun ist, wie man leicht aus der Figur ersieht:

$$r'^2 = r^2 + 2rx \cos \varphi + x^2$$

und daher:

$$z'^2 - z^2 = 2z \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{x^2}{a^2}$$

und wenn man diesen Ausdruck in die vorige Reihe einsetzt, und dann nach x ordnet, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(15.) \quad Z' = Z + u_1 \cos \varphi \cdot x + u_2 \cdot x^2 + u_3 \cos \varphi \cdot x^3 + u_4 \cdot x^4 + \text{etc.}$$

worin u_1, u_2, u_3, u_4 etc. Functionen von z und $\cos \varphi$ sind, welche aber von $\cos \varphi$ nur *gerade* Potenzen enthalten, so daß die nach x geraden oder ungeraden Glieder der Reihe, auch ebenso nach $\cos \varphi$ gerade oder ungerade sind. Diese Reihe denken wir uns in Gleichung (14) für Z' substituirt.

Die in dieser Gleichung geforderte Integration nach x theilen wir uns dann in zwei Theile, deren ersterer als untere Gränze 0 , und als obere Gränze einen beliebigen von φ unabhängigen Werth x_0 hat, welcher kleiner als der kleinste vorkommende Werth von x_1 , aber doch gegen c groß ist, was der Fall seyn kann, da wir angenommen haben, daß die Entfernung des Punktes P vom Rande gegen c groß sey. Der andere Theil des Integrales

um-

umfasst dann den noch übrigen Raum der Platte, und hat als untere Gränze jenen constanten Werth x_0 und als obere den von φ abhängigen Werth x_1 .

In dem ersten Theile sind die Gränzen der beiden Integrationen x und φ von einander vollkommen unabhängig, und wir können daher, abweichend von der sonst vorgeschriebenen Ordnung, auch zuerst nach φ und dann nach x integrieren. Nun ist aber, wenn n eine ganze Zahl bedeutet:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi = 0,$$

und somit fallen alle nach x ungeraden Glieder, welche auch nach $\cos \varphi$ ungerade waren, fort. In Bezug auf die geraden Glieder haben wir für das erste:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi,$$

und für die übrigen wollen wir die entsprechenden Integrale nur durch die Buchstaben:

$$\int_0^{2\pi} u_2 d\varphi = U_2, \quad \int_0^{2\pi} u_4 d\varphi = U_4 \text{ etc.}$$

andeuten, dann nimmt der gesuchte erste Theil des Integrales (14.) folgende Form an:

$$(16.) - \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} \right) (2\pi Z + U_2 x^2 + U_4 x^4 + \text{etc.}) dx.$$

Das erste Glied der Reihe giebt:

$$-2\pi Z \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} \right) dx = -2\pi Z (x_0 - \sqrt{c^2 + x_0^2} + c).$$

Hierin kann man $\sqrt{c^2 + x_0^2}$, da x_0 groß gegen c ist, nach Potenzen von c^2 entwickeln, nämlich:

$$(17.) \quad \sqrt{c^2 + x_0^2} = x_0 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{x_0} - \frac{1}{8} \frac{c^4}{x_0^3} + \text{etc.}$$

und erhält dadurch:

$$-2\pi Z \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}\right) dx = -2\pi Z \left(c - \frac{1}{2} \frac{c^2}{x_0} + \frac{1}{8} \frac{c^4}{x_0^3} - \text{etc.}\right)$$

wovon aber für den jetzt vorliegenden Zweck nur die Gröfse

$$(18.) \quad -2\pi Z \cdot c$$

von Bedeutung ist.

Was die übrigen Glieder des Ausdruckes (16.) betrifft, so hat man ganz allgemein:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}\right) x^{2n} dx &= \frac{x_0^{2n+1}}{2n+1} - \left(\frac{x_0^{2n}}{2n+1} - \frac{2n \cdot x_0^{2n-2}}{(2n+1)(2n-1)} c^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 1} c^{2n}\right) \sqrt{c^2 + x_0^2} \pm \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 1} c^{2n+1}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin wieder für $\sqrt{c^2 + x_0^2}$ die Reihe (17.), so heben sich die von c unabhängigen Glieder fort, und es bleiben nur Glieder von zweiter und höherer Ordnung übrig, welche hier nicht berücksichtigt werden.

Betrachten wir nun den zweiten Theil des Integrales, der nach x von x_0 bis x_1 genommen werden muß, so sind hierin alle vorkommenden Werthe von x groß gegen c , und wir können daher den Ausdruck

$$1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}$$

von Vorne herein nach Potenzen von c^2 entwickeln, wodurch er in

$$\frac{1}{2} \frac{c^2}{x^2} - \frac{3}{8} \frac{c^4}{x^4} + \text{etc.}$$

übergeht. Da, wie man sieht, auch hierin nur Glieder von der zweiten Ordnung ab vorkommen, so bleibt die oben gefundene Gröfse (18.) das einzige in der Potentialfunction V enthaltene Glied erster Ordnung, und man kann also schreiben:

$$(19.) \quad V = -c \cdot 2\pi \cdot Z + c^2 U$$

worin U eine für jetzt unbekannte Function von c und z^2 ist.

Aus diesem Resultate ergibt sich zunächst, daß man die Gleichgewichtsbedingung wenigstens in Bezug auf das erste und bedeutendste Glied der Potentialfunction einfach dadurch erfüllen kann, daß man die Function Z selbst als constant annimmt, und wir setzen daher als erste rohe Annäherung:

$$(20.) \quad Z = A.$$

Um nun zu sehen, wie diese Gleichung geändert werden muß, um einen genaueren Ausdruck für Z zu gewinnen, wollen wir unter Annahme dieser Gleichung die Potentialfunction V auf mehr als Ein Glied entwickeln.

Die Gleichung (14.) geht durch (20.) über in

$$V = -A \int_0^{2\pi} \int_0^{x_1} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} \right) dx d\varphi,$$

und daraus erhält man sogleich:

$$V = -A \int_0^{2\pi} (x_1 - \sqrt{c^2 + x_1^2} + c) d\varphi$$

oder nachdem man $\sqrt{c^2 + x_1^2}$ in eine Reihe entwickelt hat:

$$(21.) \quad V = -c \cdot 2\pi A + c^2 \cdot \frac{A}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x_1} - c^4 \frac{A}{8} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x_1^3} + \text{etc.}$$

Hierin muß für x_1 der in (13.) gegebene Ausdruck gesetzt werden. Dadurch erhält man;

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x_1} &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi - z \cos \varphi}} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi + z \cos \varphi}}{1 - z^2} d\varphi, \end{aligned}$$

und da man weiß, daß

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0$$

ist, so kommt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x_1} = \frac{4}{a} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi}{1 - z^2},$$

und somit wird aus (21.), wenn man sich auf die Entwicklung der beiden ersten Glieder beschränkt:

$$(22.) \quad V = -c \cdot 2\pi A + c^2 \cdot \frac{2A}{a} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi}{1 - z^2} - \text{etc.}$$

Hieraus ergibt sich, daß die Annahme, daß Z constant ($=A$) sey, der Gleichgewichtsbedingung in dem zweiten Gliede der Potentialfunction nicht mehr genügt, da dieses von z abhängig ist. Man kann aber aus dem oben gewonnenen und in Gleichung (19.) ausgedrückten Resultate leicht schließen, welchen Zusatz man zu A machen muß, um dieses zweite Glied aus der Potentialfunction ganz fortzuschaffen, so daß ihre Veränderlichkeit erst mit dem Gliede dritter Ordnung beginnt. Fügt man nämlich die Gröfse

$$c \cdot \frac{A}{a\pi} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi}{1 - z^2}$$

hinzu, so fängt der aus dieser Gröfse entstehende Theil der Potentialfunction nach (19.) mit dem Gliede

$$-c^2 \cdot \frac{2A}{a} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi}{1 - z^2}$$

an, und dieses hebt sich gerade gegen das zweite Glied des Ausdruckes (22.) auf, so daß man nun setzen kann:

$$(23.) \quad V = -c \cdot 2\pi A + c^3 U,$$

worin U wieder eine unbekannte Function von c und z^2 ist.

Wenn wir uns also damit begnügen wollen, die Potentialfunction bis auf ein Glied dritter Ordnung constant gemacht zu haben, so behalten wir für die Dichtigkeitsfunction Z die Formel:

$$(III.) \quad Z = A \left(1 + \frac{c}{\alpha\pi} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1 - z^2} \right)$$

Das hierin vorkommende Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$

ist bekanntlich das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung, und läßt sich daher nicht weiter reduciren, sondern muß als eine selbständige Transcendente in der Formel beibehalten werden.

Bei der ganzen Entwicklung dieser Formel wurde angenommen, daß der betrachtete Punkt P , für welchen die Potentialfunction bestimmt wurde, noch um ein gegen c großes Stück vom Rande entfernt liege, und nur für solche Punkte gilt daher auch diese Formel. In der That sieht man auch auf den ersten Blick, daß, wenn man unter Annahme der Gleichung (III.) für einen in der Nähe der Randes oder am Rande selbst gelegenen Punkt die Potentialfunction bestimmt, diese einen anderen Werth annimmt, als im Innern der Platte. Der Theil der Potentialfunction, welcher von dem ersten Gliede der Formel (III.) herstammt, nimmt nach dem Rande zu ab, und zwar bis etwa zur Hälfte seines sonstigen Werthes, weil man am Rande nach φ nicht von 0 bis 2π , sondern nur von 0 bis π integriren darf. Der von dem zweiten Gliede herstammende Theil dagegen nimmt wegen des Nenners $1 - z^2$ zu, und wird am Rande selbst sogar unendlich.

Wir wollen daher an dem zweiten Gliede der Formel (III.) noch eine Correction anbringen, welche den Werth der Potentialfunction im Innern der Platte nur um eine Gröfse von höherer als zweiter Ordnung ändert, und somit dort zu vernachlässigen ist, welche aber in der Nähe des Randes an Bedeutung gewinnt, und hier das unendlich werden des zweiten Theiles der Potentialfunction verhindert, und ihn nur so weit wachsen läßt, dafs dadurch die Abnahme des ersten Theiles ausgeglichen, und der Werth der ganzen Potentialfunction am Rande so nahe wie möglich mit dem Werthe im Innern der Platte in Uebereinstimmung gebracht wird.

Welcher Art diese Correction seyn mufs, werden wir am besten aus dem oben bestimmten Verhalten einer *einzelnen* kreisförmigen Platte ansehen können, denn es ist wahrscheinlich, dafs jede der beiden sich gegenüberstehenden, und dadurch auf einander einwirkenden Platten sich nach dem Rande zu mehr und mehr dem Zustande einer allein stehenden Platte nähert. Bei der letzteren darf nämlich ebenfalls bei der Bestimmung der Potentialfunction am Rande die Integration nach φ nur von 0 bis π statt von 0 bis 2π geschehen, und dadurch würde nach dem Rande zu eine schnelle Abnahme ihres Werthes eintreten, wenn dieser Umstand nicht dadurch compensirt würde, dafs sich dort die Elektricität so stark anhäuft, dafs ihre Dichtigkeit am Rande selbst sogar, wie die Formel (II.) zeigt, unendlich wird. Indem nun eine ähnliche Anhäufung der Elektricität am Rande auch bei jeder der beiden jetzt von uns betrachteten Platten stattfindet, müssen die Theile der hier zusammengedrängten gleichartigen Elektricität, wegen ihrer unmittelbaren Nähe, eine so grofse abstoßende Kraft auf einander ausüben, dafs dagegen die anziehende Kraft der eben so dichten ungleichartigen Elektricität am Rande der anderen Platte in den Hintergrund tritt, weil diese sich in einer zwar geringen, aber doch abgebbaren Entfernung c befindet. Es wird sich daher

die Elektricität dicht am Rande beinahe ebenso anordnen, als ob die andere Platte gar nicht vorhanden wäre.

Nun haben wir bei der einzelnen Platte für Z den Ausdruck (II.) gefunden, welcher von der Form

$$\frac{C}{\sqrt{1-z^2}}$$

ist, wenn C eine Constante bedeutet, und diese Form muß Z auch in unserem jetzigen Falle in der Nähe des Randes annehmen. Um dieses zu erreichen, addiren wir im Nenner des zweiten Gliedes der Formel (III.) noch die GröÙe $b\sqrt{1-z^2}$ hinzu, worin b eine kleine Constante ist, deren Werth von c abhängt. Dadurch geht (III.) über in

$$(IV.) \quad Z = A \left(1 + \frac{c}{a\pi} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-z^2 + b\sqrt{1-z^2}} \right).$$

Wenn nun die GröÙe z sich dem Werthe 1 nähert, so

nähert sich im zweiten Gliede der Zähler $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$, wie bekannt, ebenfalls dem Werthe 1, und im Nenner nähern sich die beiden GröÙen $1-z^2$ und $b\sqrt{1-z^2}$ dem Werthe 0, doch so, daß man zuletzt $1-z^2$ gegen $b\sqrt{1-z^2}$ vernachlässigen kann, und dann heißt das ganze zweite Glied:

$$\frac{Ac}{a\pi} \cdot \frac{1}{b\sqrt{1-z^2}},$$

und da dieses Glied für $z=1$ unendlich wird, so kann man das erste constante Glied, welches im Innern der Platte das zweite bei Weitem übertrifft, hier am Rande gegen das zweite vernachlässigen, und es bleibt dann nur der zuletzt gefundene Ausdruck übrig, welcher mit dem vorher erwähnten bei einer einzelnen Platte geltenden Ausdrucke übereinstimmt.

Es kommt nun darauf an, die Constante b so zu bestimmen, daß die Potentialfunction für einen Punkt des Randes ebenfalls den im Innern der Platte geltenden Werth $-c2\pi A$ annimmt, wobei wir uns freilich, da wir nur über Eine Constante zu verfügen haben, darauf beschränken müssen, das Glied *erster* Ordnung mit diesem Werthe in Uebereinstimmung zu bringen. Wenn diese Uebereinstimmung für den Rand selbst hergestellt ist, so können wir annehmen, daß sie auch für die etwas vom Rande entfernten Punkte nicht aufhören, sondern im Gegentheile größer werden wird, da sie sich im Innern der Platte auch auf das Glied *zweiter* Ordnung erstreckt, indem dieses Null wird.

Da, wie wir früher gesehen haben, auf das in der Potentialfunction vorkommende Glied erster Ordnung nur die Theile der beiden Platten, welche sich in unmittelbarer Nähe des betrachteten Punktes befinden, Einfluß haben, indem die entfernteren Theile die Entwicklung der GröÙe $1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 + x^2}}$ nach c gestatten, und diese Entwicklung mit $\frac{c^2}{2x^2}$ beginnt, so können wir für unsere jetzt beabsichtigte Rechnung, bei der es sich nur um dieses Glied erster Ordnung handelt, der Formel (IV.) eine einfachere Gestalt geben, nämlich diejenige, welche sie dicht am Rande näherungsweise annimmt.

In dem von z abhängigen Bruche des zweiten Gliedes ändern Zähler und Nenner in der Nähe von $z=1$ sehr schnell ihren Werth, indem beide mit wachsendem z abnehmen, indessen überwiegt der Einfluß, welchen die Veränderung des Nenners auf die Veränderung des ganzen Bruches ausübt, so sehr, daß man dagegen die Veränderung des Zählers vernachlässigen kann. Man sieht dieses besonders deutlich, wenn man statt des Bruches selbst seinen Logarithmus betrachtet, weil man bei diesem Zähler und Nenner trennen, und ihren Einfluß einzeln untersuchen kann, nämlich:

$$(24.) \quad \log \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-z^2+b\sqrt{1-z^2}} = \log \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right) - \log (1-z^2+b\sqrt{1-z^2}).$$

Diese beiden einzelnen Logarithmen des Zählers und des Nenners differentiire man nach z , dann erhält man aus dem ersten:

$$\frac{d \cdot \log \text{Zähler}}{dz} = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-z \sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(25.) \quad \frac{d \cdot \log \text{Zähler}}{dz} = \frac{1}{z} \left\{ 1 - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}}} \right\}$$

wie man leicht sieht, wenn man beide Glieder der Klammer zuerst auf gleichen Nenner bringt, und dann die beiden dadurch in den Zähler kommenden Integrale unter ein Integralzeichen vereinigt. Aus dem zweiten dagegen erhält man:

$$(26.) \quad \frac{d \cdot \log \text{Nenner}}{dz} = - \frac{z(2\sqrt{1-z^2}+b)}{(1-z^2)(\sqrt{1-z^2}+b)}.$$

Man braucht nun nur die Werthe, welche diese beiden Differentialcoefficienten in der Nähe von $z=1$ annehmen, unter einander zu vergleichen. Der Ausdruck (25.) wird

für $z=1$ unendlich, indem das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}}$ unendlich wird, während das andere Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$

den Werth 1 annimmt. Dessenungeachtet kann man diesen Ausdruck gegen den Ausdruck (26.), welcher ebenfalls unendlich wird, vernachlässigen, was man am besten daran sieht, dafs, wenn man beide mit $\sqrt{1-z^2}$ multiplicirt, dadurch der erstere zu Null wird, während der letztere unendlich bleibt.

Wir wollen daher für diese Rechnung den Zähler jenes Bruches $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$ als constant $= 1$, und nur den Nenner als veränderlich betrachten, und auch in diesem können wir noch eine Vereinfachung vornehmen. Es ist nämlich

$$1 - z^2 + b \sqrt{1 - z^2} = (1 + z) \left(1 - z + \frac{b}{\sqrt{1+z}} \sqrt{1 - z} \right),$$

und hierin können wir unbedenklich $1 + z = 2$ setzen. Dadurch geht (IV.) über in

$$Z = A \left(1 + \frac{c}{2a\pi} \cdot \frac{1}{1 - z + \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - z}} \right)$$

oder wenn wir noch zur Abkürzung setzen:

$$(27.) \quad \begin{cases} 1 - z = \frac{y}{a} \\ \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \beta \end{cases}$$

wobei y den Abstand des Punktes, für welchen z galt, vom Rande der Platte bedeutet, so kommt:

$$(28.) \quad Z = A \left(1 + \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{1}{y + \beta \sqrt{y}} \right).$$

Es sey nun P in nebenstehender Figur der Punkt für

welchen die Potentialfunction bestimmt werden soll, und AB ein Stück des Randes der Platte. Den letzteren nehmen wir für so weit, wie er hier in Betracht kommt, als geradlinig an,

indem sich leicht nachweisen läßt, daß durch diese Vernachlässigung der wirklich stattfindenden Krümmung nur ein Fehler von der zwischen der ersten und zweiten liegenden Ordnung $\left(\frac{c}{a}\right)^2 \log \frac{c}{a}$ entsteht. Demnach erhalten wir, wie man sogleich übersieht, für die Potentialfunction folgenden Ausdruck:

$$(29.) \quad V = - \int_0^{y_0} \int_{-x_0}^{+x_0} Z \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{c^2 + x^2 + y^2}} \right) dx dy$$

worin x_0 und y_0 bei dem hier beabsichtigten Grade von Genauigkeit zwei gegen c große, sonst aber beliebige Werthe sind.

Die Integration nach x , d. h. für einen unendlich schmalen mit dem Rande parallelen Streifen, wie er auf der Figur angedeutet ist, können wir sogleich ausführen, da Z von x unabhängig ist. Wir erhalten dann:

$$V = - \int_0^{y_0} Z \left(\log \frac{c^2 + y^2}{y^2} - 2 \log \frac{x_0 + \sqrt{c^2 + y^2 + x_0^2}}{x_0 + \sqrt{y^2 + x_0^2}} \right) dy$$

oder, da wir das zweite unter dem Integralzeichen befindliche Glied, welches für jeden Werth von y in Bezug auf c von der zweiten Ordnung ist, vernachlässigen können:

$$(30.) \quad V = - \int_0^{y_0} Z \cdot \log \frac{c^2 + y^2}{y^2} \cdot dy.$$

Bei der Integration nach y trennen wir die beiden Glieder, aus welchen Z (Formel 28.) besteht, von einander, und bezeichnen die beiden Theile, in welche V dadurch zerfällt mit V_1 und V_2 . Dann ist der erste Theil:

$$V_1 = - A \int_0^{y_0} \log \frac{c^2 + y^2}{y^2} \cdot dy.$$

und das giebt, wenn man nur das Glied erster Ordnung berücksichtigt:

$$(31.) \quad V_1 = - c \cdot \pi A + \text{etc.},$$

ein Resultat, welches man bei der gegenwärtigen Gestalt des Integrals durch eine Reihenentwicklung erhält, welches sich aber unmittelbar in geschlossener Form ergeben hätte, wenn man statt der rechtwinklichen Coordinaten Polarcoordinaten um P eingeführt hätte.

Der zweite Theil dagegen ist:

$$V_2 = -c \cdot \frac{A}{2\pi} \int_0^{y_0} \frac{dy}{y + \beta \sqrt{y}} \log \frac{c^2 + y^2}{y^2},$$

und dieser Ausdruck nimmt, da

$$\frac{dy}{y + \beta \sqrt{y}} = \frac{dy}{\sqrt{y}(\sqrt{y} + \beta)} = 2 \frac{d(\sqrt{y})}{\sqrt{y} + \beta}$$

ist, durch die Einführung der Zeichen

$$(32.) \quad \sqrt{y} = \eta \text{ und } \sqrt{c} = \gamma$$

folgende etwas einfachere Gestalt an:

$$(33.) \quad V_2 = -c \cdot \frac{A}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{\eta + \beta} \log \frac{\eta^4 + \gamma^4}{\eta^4}.$$

Diese Integration macht einige Weitläufigkeiten. Man muß nämlich auch hier zu Reihenentwickelungen schreiten, und damit diese Reihen immer convergirend bleiben, muß man, nachdem man sich vorläufig überzeugt hat, daß β jedenfalls kleiner als γ ist, die Integration statt des ganzen Intervalles von 0 bis η_0 einzeln für die drei Intervalle von 0 bis β , von β bis γ und von γ bis η_0 ausführen. Da indessen diese Ausrechnung theoretisch ohne Interesse ist, so will ich hier nur das Resultat derselben mittheilen. Man erhält nämlich, wenn man noch zur Abkürzung

$$(34.) \quad \frac{\beta}{\gamma} = \alpha$$

setzt, folgenden Ausdruck, den ich, damit man das Fortschreitungs-gesetz deutlich erkennt, etwas weiter ausschreiben will, als es für unsere Rechnung eigentlich nothwendig wäre:

$$\begin{aligned}
 (35.) \quad V_2 = & -c \cdot \frac{8A}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.} + \frac{1}{4} (\log \alpha)^2 \right. \\
 & - \frac{1}{8} \log \alpha \cdot \log(1 + \alpha^4) \\
 & - \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{3^2} - \frac{\alpha^4}{4^2} + \text{etc.} \right) \\
 & + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{12^2} - \text{etc.} \right) \\
 & - \alpha \left(\frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} - \text{etc.} \right) \\
 & + \alpha^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 6} - \frac{1}{6 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 14} - \text{etc.} \right) \\
 & - \alpha^3 \left(\frac{1}{1 \cdot 7} - \frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{9 \cdot 15} - \text{etc.} \right) \\
 & + \alpha^4 \left(\frac{1}{8^2} - \frac{1}{4 \cdot 12} + \frac{1}{8 \cdot 16} - \text{etc.} \right) \\
 & - \alpha^5 \left(-\frac{1}{1 \cdot 9} - \frac{1}{3 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 17} - \text{etc.} \right) \\
 & + \alpha^6 \left(-\frac{1}{2 \cdot 10} - \frac{1}{2 \cdot 14} + \frac{1}{6 \cdot 18} - \text{etc.} \right) \\
 & - \alpha^7 \left(-\frac{1}{3 \cdot 11} - \frac{1}{1 \cdot 15} + \frac{1}{5 \cdot 19} - \text{etc.} \right) \\
 & + \alpha^8 \left(-\frac{1}{4 \cdot 12} - \frac{1}{16^2} + \frac{1}{4 \cdot 20} - \text{etc.} \right) \\
 & \left. - \alpha^9 \left(-\frac{1}{5 \cdot 13} + \frac{1}{1 \cdot 17} + \frac{1}{3 \cdot 21} - \text{etc.} \right) + \text{etc.} \right\}
 \end{aligned}$$

Dieses giebt durch Summation der einzelnen Reihen:

$$\begin{aligned}
 (36.) \quad V_2 = & -c \cdot \frac{A}{\pi} \left\{ \frac{17}{24} \pi^2 + 2 (\log \alpha)^2 - \log \alpha \cdot \log(1 + \alpha^4) \right. \\
 & - 4,4429 \alpha + 1,5708 \alpha^2 - 1,4809 \alpha^3 + 0,25 \alpha^4 \\
 & \left. + 0,8881 \alpha^5 - 0,5226 \alpha^6 + 0,6332 \alpha^7 - \text{etc.} \right\}
 \end{aligned}$$

Wenn man nun die beiden in (31.) und (36.) gegebenen Ausdrücke in die Bedingungsgleichung

$$(37.) \quad V = V_1 + V_2 = -c \cdot 2\pi A$$

einsetzt, so erhält man die Gleichung, aus welcher α bestimmt werden muß. Man kann bei dieser Bestimmung zuerst alle von α abhängigen Glieder, mit Ausnahme des

ersten, nämlich $2(\log \alpha)^2$, vernachlässigen, und aus diesem Gliede allein einen rohen Näherungswerth von α ableiten, welcher mit α_1 bezeichnet werde. Dann setze man $\alpha = \alpha_1 + \delta_1$, entwickle die ganze Gleichung nach δ_1 , aber nur bis zur ersten Potenz, und bestimme daraus δ_1 . Wenn man so den zweiten Näherungswerth $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_1$ gefunden hat, setze man wieder $\alpha = \alpha_2 + \delta_2$, und bestimme auf dieselbe Weise δ_2 u. s. f. bis man den hinlänglichen Grad von Genauigkeit erreicht hat.

Ich habe auf diese Weise erhalten:

$$(38.) \quad \alpha = 0,247$$

und daraus ergiebt sich zufolge der in (27.), (32.) und (34.) eingeführten Bezeichnungen

$$(39.) \quad b = \beta \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = \alpha \sqrt{2} \sqrt{\frac{c}{a}} = 0,350 \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Indem wir diesen Werth für b einsetzen, nimmt die Gleichung (IV.) folgende bestimmtere Form an:

$$(V.) \quad Z = A \left\{ 1 + \frac{c}{a\pi} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi}{1-z^2+0,35 \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{1-z^2}} \right\}.$$

Es bleibt nun nur noch übrig, den Werth der Constanten A zu bestimmen. Die dazu vorhandenen Data können je nach der Natur der Aufgabe verschiedener Art seyn. Wir wollen hier zwei Fälle betrachten, welche am häufigsten vorkommen.

Erstens kann die mit Q bezeichnete Quantität der Elektrizität, mit welcher jede der beiden Platten geladen ist, bekannt seyn. Um alsdann die zur Bestimmung von A nöthigen Gleichungen zu gewinnen, brauchen wir nur aus der vorstehenden Formel von Z durch Integration den Ausdruck für die auf der einen Platte befindliche Elektrizitätsmenge abzuleiten, und diesen dann gleich Q zu setzen. Wir wollen in diesem Ausdrucke aber ebenso, wie es in Z

selbst geschehen ist, alle Größen, die in Bezug auf c von höherer als erster Ordnung sind, vernachlässigen.

Sey der Mittelpunkt der Platte zum Mittelpunkte von Polarcoordinaten r und ψ gewählt, und wie früher $r=az$ gesetzt, so ist:

$$(40.) \quad Q = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 Z \cdot z \, dz \, d\psi = a^2 \cdot 2\pi \int_0^1 Z \cdot z \, dz.$$

Wir trennen nun wieder die Größe Z in ihre beiden Glieder, und bezeichnen die ihnen entsprechenden Theile von Q mit Q_1 und Q_2 , dann hat man sogleich:

$$(41.) \quad Q_1 = a^2 \cdot 2\pi \int_0^1 A z \, dz = a^2 \pi \cdot A.$$

Etwas weitläufiger ist die Bestimmung des anderen Theiles, nämlich:

$$(42.) \quad Q_2 = c \cdot 2a \cdot A \int_0^1 \frac{z \, dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi}{1 - z^2 + b \sqrt{1 - z^2}}$$

Hierin führen wir zunächst zur Abkürzung für das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$ den gewöhnlich dafür angewandten Buchstaben E ein, und setzen ferner:

$$(43.) \quad \sqrt{1 - z^2} = z' \quad \text{und daher} \quad \frac{z \, dz}{\sqrt{1 - z^2}} = -dz',$$

dann geht (42.) über in:

$$(44.) \quad Q_2 = c \cdot 2a \cdot A \int_0^1 \frac{E}{z' + b} \, dz',$$

worin die Grenzen, welche für die neue Veränderliche eigentlich von 1 bis 0 gehen sollten, wieder von 0 bis 1 gesetzt sind, aber dafür auch das vor dz' stehende Minuszeichen in das Pluszeichen verwandelt ist. Auf das hierin vorkommende Integral wenden wir folgende Zerlegung an:

$$(45.) \int_0^1 \frac{E}{z'+b} dz' = \int_0^1 \frac{dz'}{z'+b} + \int_0^1 \frac{E-1}{z'} dz' - b \int_0^1 \frac{E-1}{z'^2+bz'} dz',$$

von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann, wenn man die auf der rechten Seite stehenden Glieder wieder unter Ein Integralzeichen und dann auf gemeinsamen Nenner bringt. Diese drei Glieder müssen wir nun einzeln behandeln.

Das erste giebt:

$$\int_0^1 \frac{dz'}{z'+b} = \log(1+b) - \log b,$$

wofür man auch einfach

$$(46.) \int_0^1 \frac{dz'}{z'+b} = -\log b$$

setzen kann, denn die Gröfse $\log(1+b)$ läßt sich durch die Reihe $b\left(1 - \frac{b}{2} + \frac{b^2}{3} - \text{etc.}\right)$ darstellen, und ist also mit dem in b steckenden Factor $\sqrt{c}$ behaftet, und da die Gröfse Q_2 außerdem schon den Factor c enthält, so ist das aus $\log(1+b)$ entstehende Glied in Bezug auf c von höherer als erster Ordnung, und kann daher vernachlässigt werden.

Wir betrachten nun das zweite in (45.) vorkommende Glied:

$$\int_0^1 \frac{E-1}{z'} dz'.$$

Hierin entwickeln wir zunächst den Differentialausdruck nach der von Jacobi¹⁾ eingeführten Gröfse q . Es ist nämlich:

$$z' = \left(\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\dots}{1+2q+2q^4+2q^9+\dots} \right)^2 \quad 2)$$

und:

1) *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum.* p. 85.

2) A. a. O. S. 184.

und:

$$E = K - \frac{2\pi^2}{K} \cdot A^2$$

worin

$$K = \frac{\pi}{2} (1 + 2q + 2q^3 + 2q^9 + \dots)^2$$

$$A = \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}$$

ist; und daraus ergiebt sich:

$$(47.) \quad \frac{E-1}{z'} dz' = -dq [4\pi(1 - 4q + 24q^2 - 80q^3 + 250q^4 - 672q^5 + 1680q^6 - \text{etc.}) - 8(1 + 4q^2 + 6q^3 + 8q^5 + \text{etc.})].$$

Die GröÙe q nimmt, während z' von 0 bis 1 wächst, von 1 bis 0 ab; doch geschieht diese Abnahme nicht gleichförmig wie z' wächst, sondern zu Anfang sehr schnell, und dann langsamer. Daher sind, wenn z' noch weit von 1 entfernt ist, doch die entsprechenden Werthe von q schon sehr klein, und dadurch wird die vorstehende Reihe hinlänglich convergirend. Für die nahe an 0 liegenden Werthe von z' ist sie jedoch nicht anwendbar, und es möge der kleinste Werth von z' , bis zu welchem hin wir sie anwenden wollen, z'_1 , heißen. Dann theilen wir das zu bestimmende Integral in zwei Theile, nämlich:

$$\int_0^1 \frac{E-1}{z'} dz' = \int_0^{z'_1} \frac{E-1}{z'} dz' + \int_{z'_1}^1 \frac{E-1}{z'} dz'$$

und müssen nun für den ersten dieser beiden Theile eine andere Entwicklung machen. Dazu wenden wir statt q die ComplementargröÙe q' an, welche zu q in folgender Relation steht:

$$(48.) \quad \log q \cdot \log q' = \pi^2.$$

Alsdann ist:

$$z' = 4 \sqrt[2]{q'} \left(\frac{1 + q'^{1.2} + q'^{2.3} + q'^{3.4} + \dots}{1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + \dots} \right)^2$$

1) A. a. O. S. 111.

2) A. a. O. S. 184.

und:

$$E = \frac{\pi}{2K'} (1 - 4 \log q' \cdot A')$$

worin K' und A' dieselben Größen in q' sind, wie K und A in q . Daraus ergibt sich:

$$(49.) \quad \frac{E-1}{z'} dz' = 2 dq' [-(1 - 10 q' + 48 q'^2 - 164 q'^3 + \text{etc.}) \log q' - 1 + 11 q' - 56 q'^2 + 187 q'^3 - \text{etc.}]$$

eine Reihe, welche für kleine Werthe von z' stark convergirt, denn die Größe q' wächst mit z' zugleich von 0 bis 1, doch so, daß während z' gleichmäßig zunimmt, q' sich zuerst sehr langsam von 0 entfernt, und erst wenn z' die Gränze 1 beinahe schon erreicht hat, das noch übrige Intervall bis 1 schnell durchläuft.

Seyen nun q_1 und q'_1 die zu z'_1 gehörigen Werthe von q und q' , so muß der Ausdruck (49.) von 0 bis q'_1 und der Ausdruck (47.) von q_1 bis 0 integrirt werden. Das giebt:

$$(50.) \quad \int_0^{z'_1} \frac{E-1}{z'} dz' = -2(q'_1 - 5 q'^2 + 16 q'^3 - 41 q'^4 + \text{etc.}) \log q'_1 + 6 q'^2 - \frac{80}{3} q'^3 + 73 q'^4 - \text{etc.}$$

$$(51.) \quad \int_{z'_1}^1 \frac{E-1}{z'} dz' = 4\pi(q_1 - 2 q_1^2 + 8 q_1^3 - 20 q_1^4 + 50 q_1^5 - 112 q_1^6 + 240 q_1^7 - \text{etc.}) - 8(q_1 + \frac{4}{3} q_1^3 + \frac{6}{5} q_1^5 + \frac{8}{7} q_1^7 + \text{etc.})$$

Wählen wir nun zur numerischen Berechnung den Werth z'_1 , z. B. so, daß

$$q_1 = \frac{1}{10}$$

wird, so wird nach Gleichung (49.):

$$q'_1 = \frac{1}{72.7} = 0,013756$$

und mittelst dieser Werthe, bei welchen beide Reihen schnell convergiren, erhält man:

$$\int_0^{z'_1} \frac{E-1}{z'} dz' = 0,11122$$

$$\int_{z'_1}^1 \frac{E-1}{z'} dz' = 0,27507$$

und somit:

$$(52.) \int_0^1 \frac{E-1}{z'} dz' = 0,3863.$$

Wir haben nun endlich das dritte Integral der Gleichung (45.) zu betrachten. Vor diesem steht der Factor b , und es bildet daher, ebenso, wie es von $\log(1+b)$ erwähnt wurde, in Q_2 ein Glied von höherer als erster Ordnung in Bezug auf c , und kann somit vernachlässigt werden. Bevor wir es aber verwerfen, müssen wir nachweisen, daß der Werth des Integrals allein nicht unendlich oder mit $\frac{1}{b}$ vergleichbar ist, denn in beiden Fällen würde die durch den Factor b angedeutete Ordnung des Gliedes illusorisch seyn, und auf den ersten Blick kann man allerdings wohl einen solchen Argwohn schöpfen, da der Nenner aus den Factoren z' und $z'+b$ besteht, welche für die untere Gränze des Integrals in 0 und b übergehen.

Um nachzuweisen, daß dieser für einen einzelnen Werth von z' stattfindende Umstand nicht auch auf das ganze Integral eine solche Wirkung ausübt, wollen wir den Nenner noch kleiner annehmen, als er wirklich ist, indem wir statt $z'^2 + b z'$ nur z'^2 beibehalten, und also statt jenes Integrals setzen:

$$\int \frac{E-1}{z'^2} dz'.$$

Hierin brauchen wir die Integration nach z' nur von 0 bis zu irgend einem Werthe z'_1 , welcher als nicht sehr klein angenommen wird, auszuführen, denn von den größeren Werthen von z' versteht es sich von selbst, daß sie das Integral nicht unendlich machen können. Nun ist nach den obigen Gleichungen

$$\frac{E-1}{z'^2} dz' = \frac{dq'}{2} \left[-(q'^{-\frac{1}{2}} - 6q'^{\frac{1}{2}} + 10q'^{\frac{3}{2}} - \text{etc.}) \log q' - q'^{-\frac{1}{2}} + 7q'^{\frac{1}{2}} - 14q'^{\frac{3}{2}} - \text{etc.} \right]$$

und somit erhält man, wenn q_1 den zu z'_1 gehörigen Werth von q' bedeutet:

$$(53.) \quad \int_0^{z'_1} \frac{E-1}{z'^2} dz' = -(q_1'^{\frac{1}{2}} - 2q_1'^{\frac{3}{2}} + 2q_1'^{\frac{5}{2}} - \text{etc.}) \log q'_1 + q_1'^{\frac{1}{2}} + q_1'^{\frac{3}{2}} - 2q_1'^{\frac{5}{2}} - \text{etc.}$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß das Integral in seiner jetzigen Form nicht unendlich wird, sondern einen mäßigen Werth behält, und somit kann es auch, wenn man ihm wieder seine alte Form giebt, die es in (45.) hatte, indem man im Nenner $z'^2 + bz'$ statt z'^2 setzt, keinen mit $\frac{1}{b}$ vergleichbaren Werth annehmen.

Setzen wir nun die Werthe (46.) und (52.) in (45.) ein, so kommt:

$$(54.) \quad \int_0^1 \frac{E}{z'+b} dz' = -\log b + 0,3863,$$

und dadurch geht die Gleichung (44.) über in:

$$Q_2 = c \cdot 2aA (-\log b + 0,3863),$$

oder, da nach (39.) $b = 0,350 \sqrt{\frac{c}{a}}$ ist, in:

$$\begin{aligned} Q_2 &= c \cdot 2aA \left[-\log \left(0,350 \sqrt{\frac{c}{a}} \right) + 0,3863 \right] \\ &= c \cdot aA \left(\log \frac{a}{c} + 2,872 \right) \end{aligned}$$

$$(55.) \quad = c \cdot aA \log \frac{17,68a}{c}.$$

Wenn man diesen Ausdruck von Q_2 zu dem in (41.) gegebenen von Q_1 addirt, und statt der Summe $Q_1 + Q_2$ wieder Q setzt, so entsteht die Gleichung:

$$(VI.) \quad Q = A \cdot a^2 \pi \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log \frac{17,68a}{c} \right)$$

und hieraus ergibt sich endlich der gesuchte Ausdruck für A , nämlich:

$$A = \frac{Q}{a^2 \pi \left(1 + \frac{c}{a \pi} \log \frac{17,68 a}{c}\right)}$$

oder:

$$(VII.) \quad A = \frac{Q}{a^2 \pi} \left(1 - \frac{c}{a \pi} \log \frac{17,68 a}{c}\right).$$

Zweitens kann zur Bestimmung von A der Zustand derjenigen Conductoren, von welchen die Platten ihre Elektricität empfangen haben, bekannt seyn. In unserem Falle z. B., wo beide Platten gleich stark positiv und negativ elektrisch sind, können wir annehmen, daß sie zur Ladung mit zwei Conductoren von gleicher aber entgegengesetzter Spannung in Verbindung gesetzt seyen. Dabei soll entweder vorausgesetzt werden, daß die Conductoren durch irgend welche Elektricitätsquellen in constantem Zustande erhalten werden, oder daß der Schlufszustand nach geschעהner Ladung der Platten gegeben sey. Ferner wollen wir die Conductoren als so weit von den Platten entfernt annehmen, daß sie keinen inducirenden Einfluß auf dieselben ausüben, und auch von dem inducirenden Einflusse des Zuleitungsdrathes wollen wir absehen.

Nun ist es ein bekannter Satz, daß, wenn mehrere leitende Körper in Verbindung sind, das elektrische Gleichgewicht sich so herstellt, daß die Potentialfunction im Innern des ganzen Systems überall denselben Werth hat. Sey daher in dem positiven Conductor der Werth der Potentialfunction durch V dargestellt, welche Gröfse hier, wie in vielen Fällen, als das geeignetste Maafs dessen zu betrachten ist, was man gewöhnlich mit dem etwas unbestimmten Ausdrucke Spannung bezeichnet, so gilt derselbe Werth auch für die positive Platte, und wir haben daher nach Gleichung (23.):

$$(VIII.) \quad V = -c.2\pi A$$

und somit:

$$(IX.) \quad A = -\frac{V}{c \cdot 2\pi},$$

und zugleich ergibt sich, wenn man diesen Ausdruck in (VI.) für A einsetzt, folgende Beziehung zwischen Q und V :

$$(X.) \quad Q = -\frac{V \cdot a^2}{2c} \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log \frac{17,68a}{c}\right).$$

Bei allen bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, daß die beiden Platten *mit gleichen Mengen entgegengesetzter Elektricität* geladen seyn, oder daß die Potentialfunction in den beiden ladenden Conductoren gleiche und entgegengesetzte Werthe habe. In der Praxis geschieht aber, wie schon erwähnt, die Ladung in der Regel so, daß nur die Eine Platte mit einem Conductor, die andere dagegen mit der Erde in Verbindung gesetzt wird. Hierbei können wir die Erde ebenfalls als einen Conductor betrachten, in welchem die Potentialfunction den Werth Null hat, und wir wollen daher die Bedingung gleich allgemeiner so stellen, daß die ladenden Conductoren irgend welche *verschiedene Werthe der Potentialfunction* haben, oder daß die Platten mit *verschiedenen Elektricitätsmengen* geladen seyn.

Um für alle diese Fälle die Anordnung der Elektricität sogleich bestimmen zu können, genügt es, wenn wir neben dem bisher betrachteten nur noch Einen Fall untersuchen, nämlich den, wo die beiden Platten mit *gleichen Mengen gleichartiger Elektricität* geladen sind. Wissen wir nämlich, in welcher Weise sich die entgegengesetzten Mengen Q und $-Q$, und die gleichartigen Mengen Q' und Q' , jedes System für sich allein, auf den beiden Platten in das Gleichgewicht setzen, so können wir sicher seyn, daß das Gleichgewicht auch fortbesteht, wenn sich die beiden Systeme mit derselben Anordnung, welche sie vorher einzeln hatten, auf den Platten gleichzeitig übereinander lagern; und aus zwei solchen Systemen können wir jedes andere System zusammensetzen.

Um nun die Anordnung der beiden gleichen und gleich-

artigen Elektricitätsmengen Q' und Q' auf den beiden Platten zu bestimmen, gehen wir von dem Gränzfalle aus, wo der Abstand c der beiden Platten Null ist. Dann können wir sie als Eine Platte mit der Quantität $2Q'$ betrachten, und haben daher nach Gleichung (II.) für die gesammte Dichtigkeit den Ausdruck:

$$\frac{Q'}{a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

und nach (11.) für die Potentialfunction:

$$-\frac{Q'\pi}{a}.$$

Von dem ersteren Ausdrucke kommt auf jede einzelne Platte die Hälfte, der letztere gilt für jede einzelne Platte ganz.

Wenn sich nun die Platten etwas von einander entfernen, so daß c einen angebbaren Werth erhält, so ändert sich auch die Anordnung der Elektricität, aber diese Aenderung der Dichtigkeit ist im Verhältnisse zur ganzen Dichtigkeit im Allgemeinen von der Ordnung $\frac{c}{a}$, und wird nur in unmittelbarer Nähe des Randes von größerer Bedeutung. Da außerdem, wie bald gezeigt werden soll, bei der gewöhnlichen Art der Ladung die ganze Gröfse Q' im Verhältnisse zu Q auch schon von der Ordnung $\frac{c}{a}$ ist, so ist jene Aenderung dabei im Verhältnisse zur Dichtigkeit der Quantität Q von der Ordnung $\left(\frac{c}{a}\right)^2$, und wir wollen sie daher vernachlässigen, und die Anordnung der Elektricität und den Werth der Potentialfunction so annehmen, wie sie für $c=0$ stattfinden würden.

Dann können wir den obigen Gleichungen (V.) bis (X.) entsprechend für dieses zweite System die folgenden Gleichungen bilden:

$$(V'.) \quad Z' = A' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$(VI'.) \quad Q' = A' \cdot 2a^2\pi$$

$$(VII'.) \quad A' = \frac{Q'}{2a^2\pi}$$

$$(VIII'.) \quad V' = -A' \cdot 2a\pi^2$$

$$(IX'.) \quad A' = -\frac{V'}{2a\pi^2}$$

$$(X'.) \quad Q' = -V' \cdot \frac{a}{\pi}.$$

Denken wir uns nun diese beiden Systeme auf einander gelegt, und bezeichnen die dadurch auf den beiden Platten entstehenden Dichtigkeiten respective mit Z_1 und Z_2 , so haben wir:

$$Z_1 = Z + Z' \text{ und } Z_2 = -Z + Z'$$

oder:

$$(XI.) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = A \left\{ 1 + \frac{c}{a\pi} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi}{1-z^2+0,35 \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{1-z^2}} \right\} + A' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \\ Z_2 = -A \left\{ 1 + \frac{c}{a\pi} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi}{1-z^2+0,35 \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{1-z^2}} \right\} + A' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \end{array} \right.$$

worin A und A' nach den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden müssen.

Unter den Gröſſen, welche durch die Bedingungen der Aufgabe explicite oder implicite gegeben seyn, und zur Bestimmung von A und A' angewandt werden können, sind besonders folgende vier hervorzuheben. Erstens die auf den beiden Platten befindlichen *Elektricitätsmengen*, welche wir M und N nennen wollen, und von welchen wir hier voraussetzen müssen, daſs N nahe $= -M$ sey, so daſs die Summe $M+N$ gegen M und N selbst eine Gröſſe von der Ordnung $\frac{c}{a}$ bilde. Zweitens die für die beiden Platten geltenden *Werthe für die Potentialfunction*, welche F und G heißen mögen. Diese können, wie schon oben erwähnt

wurde, dadurch gegeben seyn, daß der elektrische Zustand der Conductoren, von welchen die Platten ihre Electricität empfangen haben, bekannt ist.

Diese vier Größen stehen zu den vorher betrachteten Q , Q' , V und V' in folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} M &= Q + Q', & F &= V + V', \\ N &= -Q + Q', & G &= -V + V', \end{aligned}$$

oder:

$$(56.) \quad Q = \frac{M-N}{2}, \quad V = \frac{F-G}{2}$$

$$(56'.) \quad Q' = \frac{M+N}{2}, \quad V' = \frac{F+G}{2}.$$

Setzt man die Ausdrücke (56.) in (VI.) und (VIII.) ein, und eliminirt dann A , und verfährt man ebenso mit den Ausdrücken (56'.) und den Gleichungen (VI'.) und (VIII'.), so erhält man folgende zwei Gleichungen zwischen M , N , F und G :

$$(XII.) \quad F - G = -\frac{2c}{a^2} \left(1 - \frac{c}{a\pi} \log \frac{17,68a}{c} \right) (M - N)$$

$$XIII.) \quad F + G = -\frac{\pi}{a} (M + N).$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man, wenn zwei der Größen gegeben sind, die übrigen leicht bestimmen. Schreibt man dabei statt $\log \frac{17,68a}{c}$ zur Abkürzung bloß $\log$, so kommt:

$$(57.) \quad \begin{cases} F = -\frac{\pi}{a} \left[(M - N) \frac{c}{a\pi} \left(1 - \frac{c}{a\pi} \log \right) + \frac{M + N}{2} \right] \\ G = \frac{\pi}{a} \left[(M - N) \frac{c}{a\pi} \left(1 - \frac{c}{a\pi} \log \right) - \frac{M + N}{2} \right] \end{cases}$$

$$(58.) \quad \begin{cases} M = \frac{a}{\pi} \left[\frac{G - F}{4} \cdot \frac{a\pi}{c} \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log \right) - \frac{G + F}{2} \right] \\ N = -\frac{a}{\pi} \left[\frac{G - F}{4} \cdot \frac{a\pi}{c} \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log \right) + \frac{G + F}{2} \right] \end{cases}$$

$$(59.) \quad \begin{cases} N = -M - \frac{2a}{\pi} F - \frac{4c}{\pi} \left(\frac{M}{a} + \frac{F}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2) \right] \\ G = F + \frac{4c}{a} \left(\frac{M}{a} + \frac{F}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2) \right] \end{cases}$$

$$(60.) \quad \begin{cases} M = -N - \frac{2a}{\pi} G - \frac{4c}{\pi} \left(\frac{N}{a} + \frac{G}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2) \right] \\ F = G + \frac{4c}{a} \left(\frac{N}{a} + \frac{G}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2) \right] \end{cases}$$

$$(61.) \quad \begin{cases} N = -M - \frac{2a}{\pi} G + \frac{4c}{\pi} \left(\frac{M}{a} + \frac{G}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2) \right] \\ F = G - \frac{4c}{a} \left(\frac{M}{a} + \frac{G}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2) \right] \end{cases}$$

$$(62.) \quad \begin{cases} M = -N - \frac{2a}{\pi} F + \frac{4c}{\pi} \left(\frac{N}{a} + \frac{F}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2) \right] \\ G = F - \frac{4c}{a} \left(\frac{N}{a} + \frac{F}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2) \right]. \end{cases}$$

Wenn so die Größen M , N , F und G bekannt sind so sind es mit ihnen zugleich nach (56.) und (56'.) auch Q , Q' , V und V' , und durch Substitution der letztern in (VII.) und (VII'.) oder (IX.) und (IX'.) ergeben sich A und A' .

Als specielle Anwendung dieser Ausdrücke wollen wir das gewöhnliche Ladungsverfahren betrachten, wobei *die eine Platte mit der Erde in Verbindung gesetzt wird*. Dann haben wir zunächst, wie auch die Ladung der andern Platte geschehen mag:

$$G = -V + V' = 0$$

und daher nach (VIII) und (VIII'): .

$$(63.) \quad \frac{A'}{A} = \frac{c}{a\pi}.$$

Es zeigt sich also, daß für diese Ladungsart wirklich A' gegen A von der Ordnung $\frac{c}{a}$ ist, und dasselbe muß dann natürlich auch in Bezug auf die Quantitäten Q' und Q stattfinden, und somit ist die für die Gültigkeit der Gleichungen (V'.) bis (X'.) nothwendige Bedingung erfüllt.

Außer der Größe G muß nun noch eine der drei andern Größen gegeben seyn.

1) Es sey F gegeben, indem etwa der elektrische Zustand des ladenden Conductors bekannt sey. Dann kommt nach (57.):

$$(64.) \quad \begin{cases} M = -\frac{a^2}{4c} \cdot F \cdot \left[1 + \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right] \\ N = \frac{a^2}{4c} F \left[1 + \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right]. \end{cases}$$

Die Elektrizitätsmenge m , welche eine der Platten für sich allein von demselben Conductor aufnehmen würde, ist dagegen nach (11.):

$$(65.) \quad m = -\frac{2a}{\pi} F,$$

und daraus ergibt sich:

$$(66.) \quad \frac{M}{m} = \frac{a\pi}{8c} \cdot \left[1 + \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right].$$

Man sieht also, daß dieser Bruch $\frac{M}{m}$, welchen man wohl die Verstärkungszahl nennt, nicht bloß von der Dicke der trennenden Schicht, sondern auch von der Gröfse der Platten abhängt. — Für A und A' erhält man die Ausdrücke:

$$(67.) \quad A = -\frac{F}{4c\pi}; \quad A' = -\frac{F}{4a\pi^2}.$$

2) Es sey M gegeben. Dann ergibt sich aus (61):

$$(68.) \quad \begin{cases} N = -M \left\{1 - \frac{4c}{a\pi} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right]\right\} \\ F = -M \frac{4c}{a^2} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right] \end{cases}$$

und für A und A' erhält man:

$$(69.) \quad \begin{cases} A = \frac{M}{a^2\pi} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right] \\ A' = \frac{Mc}{a^3\pi^2} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right]. \end{cases}$$

3) Es sey N gegeben. Dann findet man ganz entsprechend:

$$(70.) \quad \begin{cases} M = -N \left\{1 + \frac{4c}{a\pi} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right]\right\} \\ F = N \frac{4c}{a^2} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right] \end{cases}$$

$$(71.) \quad \begin{cases} A = -\frac{N}{a^2\pi} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right] \\ A' = -\frac{Nc}{a^3\pi^2} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right]. \end{cases}$$

Schließlich wollen wir noch betrachten, welche Form man den Gleichungen (XII.) und (XIII.) geben muß, um sie von der speciellen Bedingung, daß die Gestalt der Platten kreisförmig sey, zu befreien.

In die Gleichung (XII.) führe man dazu statt des Flächeninhaltes $a^2 \pi$ der einen Platte den Buchstaben s ein, dann lautet sie:

$$(XII_*) \quad F - G = -\frac{2\pi c}{s} \left(1 - \frac{c}{a\pi} \log \frac{17,68a}{c}\right) (M - N).$$

Wenn man nun auf der rechten Seite nur das Glied erster Ordnung berücksichtigt, so erhält man:

$$(XIV.) \quad F - G = -\frac{4\pi c}{s} \cdot \frac{M - N}{2},$$

worin man für $\frac{M - N}{2}$ auch M oder $-N$ schreiben kann, da die beiden letzteren Größen der Voraussetzung nach unter sich und von $\frac{M - N}{2}$ nur um ein Glied von der Ordnung $\frac{c}{V_s}$ verschieden seyn können. In dieser Abkürzung ist die Gleichung von der Gestalt der Platten unabhängig, und setzt nicht einmal voraus, daß die Platten *eben* seyen, nur müssen sie *parallel* seyn, so daß die Dicke c der trennenden Schicht constant ist, und müssen ferner so *be-
gränzt* seyn, daß diejenige, deren Flächenraum mit s bezeichnet wird, an keiner Stelle um mehr, als eine Größe von der Ordnung $\frac{c}{V_s}$ über die andere *hervorragt*.

Wenn bei einer Leidener Flasche die Dicke c *nicht überall gleich, aber doch überall gering* ist, so kann man statt (XIV.) allgemein

$$(XIV_*) \quad F - G = -\frac{k}{s} \cdot \frac{M - N}{2}$$

schreiben, worin k eine Größe ist, die sich zwar nicht so leicht bestimmen läßt, aber jedenfalls für eine gegebene Flasche constant, und in Bezug auf den mittleren Werth der Größe c von der ersten Ordnung ist.

Diese beiden Gleichungen (XIV.) und (XIV_a), welche als die Grundgleichungen für die Behandlung der Leidener Flasche bezeichnet werden können, sind implicite schon in den Resultaten der Green'schen Untersuchung ¹⁾ enthalten, und ich will daher auf ihren Beweis hier nicht näher eingehen.

Was die Gleichung (XIII.) anbetrifft, so läßt sich diese in der Weise, daß sowohl M und N als auch F und G zu Summen vereinigt bleiben, nicht verallgemeinern, sondern man muß hier bei den leicht erweislichen allgemeinen Eigenschaften der Größen M , N , F und G stehen bleiben, daß nämlich durch jede zwei derselben die beiden andern bestimmt sind, daß die Gleichungen, mittelst deren sie von einander abhängen, linear sind, und daß für $F=G=0$ auch $M=N=0$ seyn muß. Daraus ergibt sich:

$$(XV.) \quad M+N=-(\alpha F+\beta G),$$

worin α und β zwei Constante sind, welche für jede Flasche besonders bestimmt werden müssen.

Für den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall, wo die eine Platte mit der Erde in Verbindung steht, und also F oder $G=0$ gesetzt werden muß, ist die Gleichung (XIV_a) nicht bloß angenähert, sondern genau richtig. Auch in (XV.) kommt dann nur Eine unbekannte Constante vor, und da in diesem Falle die angebbare Potentialfunction mit der Summe $M+N$, falls diese nicht Null ist, von entgegengesetzten Vorzeichen seyn muß, so sieht man zugleich, daß die Constanten α und β nicht negativ seyn können.

1) *An Essay on the Application etc. Art. 8.*