

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 22.

1. Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen.

I. Der dynamisch und statisch gemessene Elastizitätsmodul; von E. Grüneisen.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Inhalt: *Einleitung.* — 1. Methode der freien Transversalschwingungen. § 1. Die gewöhnliche Formel zur Berechnung von E . § 2. Korrektur wegen der Rotationsenergie. § 3. Korrektur wegen ungleichmäßigen Querschnitts. § 4. Versuchsergebnisse. — 2. Methode der freien Longitudinalschwingungen. — § 5. Korrektur wegen Querkontraktion ist zu vernachlässigen. § 6. Korrektur wegen ungleichmäßigen Querschnitts. § 7. Versuchsergebnisse. — 3. Methode statischer Dehnungen. § 8. Anwendung des Interferenzprinzips auf Dehnungsmessungen. § 9. Haidinger'sche Ringe in planparallelen Platten. § 10. Optische Versuchsanordnung. § 11. Aufhängung und Belastung des Stabes. § 12. Beobachtung der Ringverschiebung und Berechnung der Stabdehnung. § 13. Schutz gegen Temperaturschwankungen. § 14. Vorbereitung und Durchführung der Versuche. § 15. Elastische Nachwirkung und die Versuche am Bleistabe. § 16. Zusammenstellung der Versuchsergebnisse. — 4. Besprechung des Zahlenmaterials. § 17. Vergleich der drei Methoden, mit Rücksicht auf die Homogenität der Stäbe. § 18. Unterschied zwischen isothermem und adiabatischem Elastizitätsmodul. § 19. Änderung des Elastizitätsmoduls mit der Spannung. § 20. Einfluß der mechanischen und thermischen Behandlung, sowie der Zusammensetzung des Materials. § 21. Vergleich mit bisher bekannten Zahlen. — Zusammenfassung der Ergebnisse.

Einleitung.

Der Plan der hier im ersten Teile vorliegenden Untersuchung ist, die elastischen Konstanten für Metalle einer erneuten Bestimmung zu unterziehen. Der Reichsanstalt stehen Metalle in Form von Stäben zur Verfügung, die dadurch einen erheblichen Wert besitzen, daß ihre chemische Zusammensetzung einigermaßen bekannt und eine Anzahl physikalischer Konstanten an ihnen bereits bestimmt ist.¹⁾ Es sind bis auf

1) Besonderer Dank gebührt der Firma Heraeus in Hanau und der Gold- und Silberscheideanstalt in Frankfurt a/M., durch deren Entgegenkommen die wertvollen Stäbe aus Platin, Palladium, Rhodium, Iridium und Gold der Reichsanstalt leihweise zur Verfügung stehen.

wenige Ausnahmen die gleichen Stäbe, welche die Herren Jaeger und Diesselhorst¹⁾ ihren Untersuchungen über Wärme- und Elektrizitätsleitung zugrunde gelegt haben. Seitdem man weiß, welche Bedeutung gerade für die eben genannten Eigenschaften die Reinheit eines Metalles hat, sind viele Unstimmigkeiten früherer Beobachtungen auf diesem Gebiete erklärlich geworden. So liegt der Versuch nahe, auch hinsichtlich der elastischen Eigenschaften Ursachen ausfindig zu machen, welche die zum Teil recht geringe Übereinstimmung zwischen den von verschiedensten Seiten vorliegenden Beobachtungen erklären könnten. Weder der Einfluß mechanischer oder thermischer Behandlung, noch derjenige der chemischen Zusammensetzung scheint mir bisher hinreichend festgestellt zu sein. Nur ein umfangreiches und sicheres Zahlenmaterial kann nach dieser Richtung hin Aufklärung bringen. Daß nebenbei auch die Größe der Deformation und die Art und Weise, wie bleibende Dehnungen oder elastische Nachwirkung in Rechnung gezogen werden, auf den beobachteten Elastizitätsmodul von Einfluß sind, ist seit den Untersuchungen von Miller²⁾, Thompson³⁾, Bach⁴⁾ u. a. bekannt.

Abgesehen von dem technischen Interesse an der Feststellung der elastischen Eigenschaften ist deren Kenntnis auch für molekulartheoretische Betrachtungen grundlegend. Mehr von diesem Gesichtspunkte aus hatte Hr. Voigt⁵⁾ seine Untersuchung über die Elastizitätskonstanten der Metalle unternommen. Die im folgenden mitgeteilten Zahlen dürften eine willkommene Ergänzung der seinigen bilden, zumal sie sich auf sehr kleine Deformationen beziehen, auf die allein theoretische Betrachtungen im allgemeinen anwendbar sein werden. So hat z. B. Hr. Voigt⁶⁾, an ein Resultat Wertheims anknüpfend, theoretisch einen Zusammenhang zwischen den

1) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, *Wissensch. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt* 3. p. 269. 1900.

2) A. Miller, *Münch. Sitzungsber.* 1. p. 9. 1885; *Abh. d. k. bayr. Akad.* 15. p. 707. 1886.

3) J. O. Thompson, *Wied. Ann.* 44. p. 555. 1891.

4) C. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, 4. Aufl. 1902. Einleitung.

5) W. Voigt, *Wied. Ann.* 48. p. 674. 1893.

6) W. Voigt, *Wied. Ann.* 49. p. 396. 1893.

elastischen Konstanten und dem Elementargesetz der Wechselwirkung zwischen zwei Atomen abgeleitet. In Verbindung mit dieser Theorie ergibt sich aus seinen Versuchen, daß für Al, Fe, Au, Ag, Mg, Ni, Zn und Cu die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Atomen bei gleicher Entfernung nahezu gleiche Intensität besitzt, also vom Atomgewicht unabhängig ist. Nur Cd, Bi und Sn machten eine Ausnahme. Meine Versuche zeigen nun aber, daß man doch wohl auch Zn und Fe, besonders aber die Platinmetalle zu den Ausnahmen rechnen muß. Auf diese theoretischen Spekulationen näher einzugehen, wird allerdings erst nach Abschluß der Experimentaluntersuchung ratsam sein.

Bisher liegen meinerseits nur Messungen des Elastizitätsmoduls (E , „Youngs modulus“) vor, welche abgesehen von dem resultierenden Zahlenmaterial dadurch ein selbständiges Interesse haben, daß sie nach verschiedenen Methoden ausgeführt sind und einen Vergleich derselben gestatten.

Die Stabdimensionen (Länge etwa 27 cm, Durchmesser 1 bis 2 cm) ließen eine Methode besonders bequem erscheinen, die verhältnismäßig selten benutzt wird, nämlich die der freien Transversalschwingungen. Es scheint, daß gegen die Anwendung der Transversalschwingungen ein Mißtrauen besteht, das vielleicht durch die in den Wertheimschen¹⁾ Versuchen mangelnde Übereinstimmung mit anderen Methoden hervorgerufen ist. Die hier mitgeteilten Versuche beweisen jedoch, daß man selbst bei ziemlich kurzen, dicken Stäben nach dieser Methode eine zuverlässige Bestimmung des Elastizitätsmoduls ausführen kann, wenn man sich des Grundtons bedient. Mit Oberschwingungen habe ich zu wenige Versuche ausführen können, um die Berechtigung ihrer Anwendung zu prüfen. Es scheint aber, daß hier Vorsicht geboten ist, weil eine wegen des Einflusses der Rotationsbewegung angebrachte, immerhin aber nur angenäherte Korrektur für die erste Oberschwingung bereits mehrere Prozent betragen kann. Neuerdings hat Hr. F. A. Schulze²⁾ Transversalschwingungen einseitig geklemmter dünner Platten zur Messung ihrer Elastizi-

1) G. Wertheim, Pogg. Ann. Ergbd. 2. p. 1. 1848.

2) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 13. p. 583. 1904; 14. p. 848. 1904.

tätsmoduln benutzt und dabei für Grund- und Obertöne übereinstimmende Resultate erhalten.

Mehr Vertrauen wird im ganzen die Methode verdienen, welche auf einfache Dehnungen des Stabes zurückgeht und im folgenden für sehr kleine Deformationen ausgearbeitet worden ist. Eine der bekanntesten Methoden, die der Longitudinalschwingungen, ließ sich nur bei wenigen Stäben anwenden.

1. Methode der freien Transversalschwingungen.

§ 1. Die gewöhnliche Formel zur Berechnung von E .

Bezüglich der Theorie der Transversalschwingungen von Stäben verweise ich auf Lord Rayleighs¹⁾ Sound I, Ch. 8, wo auch die ältere Literatur angegeben ist²⁾, und beschränke mich auf eine kurze Wiedergabe der hier in Betracht kommenden Gleichungen, wobei ich mich an die von Lord Rayleigh gegebene Darstellung anschließe.

Der Stab habe auf seiner ganzen Länge denselben kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d . Seine Längsachse falle in die x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und reiche von $x=0$ bis $x=l$. Die Schwingung finde in der xy -Ebene statt, so daß bei hinreichend kleinen Schwingungen die Verschiebung eines Stabquerschnittes in Richtung der y -Achse fällt. Sie werde mit η bezeichnet. Die bei der Biegung des Stabes notwendig eintretende Drehung der Querschnitte mag vorläufig unbeachtet bleiben, was freilich nur erlaubt ist, wenn der Durchmesser gegen die Länge des Stabes klein ist.

Dann ist nach der Theorie η als Funktion der Abszisse x und der Zeit t gegeben durch

$$(1) \quad \eta = u \cos p t,$$

wo u die Ordinate η zur Zeit größter Elongation bedeutet und sich als Funktion von x darstellen läßt durch

1) Lord Rayleigh, The Theorie of Sound, 2. Ed. London 1894.

2) Über eine angenäherte Theorie, die auf kompliziertere Stabformen anwendbar ist, vgl. J. Morrow, Phil. Mag. (6) 10. p. 113. 1905 und 11. p. 354. 1906.

$$(2) \quad \begin{cases} u = (\sin m - \sin h m) \left(\cos \frac{m x}{l} + \cos h \frac{m x}{l} \right) \\ - (\cos m - \cos h m) \left(\sin \frac{m x}{l} + \sin h \frac{m x}{l} \right). \end{cases}$$

Rechts kann man sich noch einen die Größe der Amplitude bestimmenden konstanten Faktor hinzudenken. Die Zahl m ist eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$\cos m \cdot \cos h m = 1$$

und hat für die Grundschwingung den Wert

$$m = 4,730,$$

für die erste Oberschwingung

$$m = 7,853.$$

Die Frequenz der Schwingung p ist als Funktion der Dimensionen l, d , des Elastizitätsmoduls E und der Dichte s des Stabes gegeben durch

$$p = \frac{m^2 d}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

woraus umgekehrt für den Elastizitätsmodul folgt

$$(3) \quad E = \frac{16}{m^4} \frac{s l^4 p^2}{d^2} \text{ [C.G.S.]},$$

oder, wenn man die Schwingungszahl $n = p/2\pi$ und das in der Physik gebräuchliche Maß des Elastizitätsmoduls $[\text{kg/mm}^2]$ einführt,

$$(3a) \quad E = \frac{64 \pi^2}{981 \cdot 10^5 m^4} \frac{s l^4 n^2}{d^2}.$$

Bei der Berechnung von u ergeben sich für die Grundschwingung zwei Knoten, welche um $0,2242 l$ von den Stabenden entfernt liegen, für die erste Oberschwingung drei Knoten, von denen einer in der Mitte liegt, die beiden anderen um $0,1321 l$ von den Stabenden entfernt sind.

§ 2. Korrektur wegen der Rotationsenergie.

Bisher ist vorausgesetzt, daß jeder Stabquerschnitt nur eine translatorische Bewegung in der y -Richtung ausführt. Es soll jetzt der Einfluß der Drehung der Querschnitte auf die Frequenz der Schwingung berechnet werden. Wir schlagen dabei denselben Weg ein, den Lord Rayleigh in § 186 l. c. beim einseitig geklemmten Stabe benutzt hat.

Nach dem Energieprinzip ist, ungedämpfte Schwingung vorausgesetzt, die potentielle Energie des Stabes zur Zeit größter Elongation gleich der kinetischen Energie beim Durchgang durch die Ruhelage. In der potentiellen Energie tritt E als Faktor auf, daher wird E aus der Gleichung des Energieprinzips zu klein gefunden, wenn für die kinetische Energie nur die Energie der Translationsbewegung eingesetzt wird. Wir machen nun für das Folgende noch die Annahme, daß der Einfluß der Rotationsenergie klein sei und deshalb auch die Form des schwingenden Stabes, die unter Vernachlässigung der Rotationsenergie durch Gleichung (2) gegeben ist, noch nicht merklich verändere. Bezeichnet daher ρ das Verhältnis der Rotationsenergie zur Translationsenergie, so muß der nach der Formel (3) berechnete Elastizitätsmodul im Verhältnis $1 + \rho$ vergrößert werden.

Für die Berechnung der Rotationsenergie ist zu bedenken, daß das Trägheitsmoment eines kreisförmigen Querschnittes q in bezug auf einen Durchmesser gleich ist $q(d^2/16)$. Also ist die Rotationsenergie des ganzen Stabes

$$R = \frac{1}{2} s q \int_0^l \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial x \partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} s q \frac{d^2}{16} \frac{p^2 m^2 \sin^2 p t}{l^2} \int_0^l u'^2 dx.$$

u' soll die Ableitung von u nach mx/l sein. Nun ist nach § 165, (1) (Rayleigh, l. c)

$$\int_0^l u'^2 dx = -\frac{l}{4m} [6 u u' + m u'^2]_{x=0}^l,$$

also wird

$$R = \frac{1}{8} s q p^2 \sin^2 p t \frac{m d^2}{16 l} [6 u u' + m u'^2]_l.$$

Die kinetische Energie der translatorischen Bewegung ist

$$T = \frac{1}{2} s q \int_0^l u^2 p^2 \sin^2 p t dx = \frac{1}{8} s q p^2 \sin^2 p t \cdot l(u^2)_l,$$

weil nach § 164, (9)

$$\int_0^l u^2 dx = \frac{1}{4} l(u^2)_l.$$

Demnach ergibt sich für das oben mit ϱ bezeichnete Verhältnis

$$\varrho = \frac{R}{T} = \frac{m d^2}{16 l^2} \left[6 \frac{u'}{u} + m \left(\frac{u'}{u} \right)^2 \right]_{x=l}.$$

Für den Grundton ($m = 4,730$) findet sich

$$\left(\frac{u'}{u} \right)_l = 0,9825,$$

für den ersten Oberton ($m = 7,853$) würde $(u'/u)_l$ bereits gleich 1 zu setzen sein. Für den Grundton wird also das aus Formel (3) berechnete E zu vergrößern sein um den Faktor

$$1 + \varrho = 1 + 3,09 \left(\frac{d}{l} \right)^2,$$

für den ersten Oberton um den Faktor

$$1 + \varrho = 1 + 6,80 \left(\frac{d}{l} \right)^2.$$

§ 3. Korrektur wegen ungleichmäßigen Querschnitts.

Bisher wurde der Stabquerschnitt als gleichmäßig auf der ganzen Länge des Stabes und als kreisförmig angenommen. Bei einigen der untersuchten Stäbe sind diese Annahmen jedoch nicht mehr hinreichend erfüllt. Es soll hier deshalb eine Korrektur angegeben werden, welche die Ungleichmäßigkeit des Querschnittes längs des Stabes berücksichtigt. Die Annahme der Kreisform aber werde beibehalten (vgl. § 4).

Die von Lord Rayleigh § 185 (l. c.) gegebene Korrektionsformel können wir schreiben, wenn

$$\frac{d_x - d_0}{d_0} = \alpha_x$$

die verhältnismäßige Abweichung des Stabdurchmessers an der Stelle x von seinem Mittelwerte d_0 bezeichnet, und p_0 die Frequenz für den Fall, daß der Stab den gleichmäßigen Durchmesser d_0 besäße,

$$p^2 = p_0^2 \left\{ 1 + \frac{4}{l u_0^2} \int_0^l 4 \alpha_x u''^2 dx - \frac{4}{l u_0^2} \int_0^l 2 \alpha_x u'^2 dx \right\}.$$

Das Integrationsgebiet 0 bis l werde in ν gleiche Teile von

der Länge l/ν zerlegt, wo ν so groß ist, daß für jeden Teil α_x als konstant angesehen werden kann, dann wird

$$p^2 = p_0^2 \left\{ 1 + \frac{8}{l u_t^2} \sum_{t=1}^{t=\nu} \alpha_t \int_{(t-1) \frac{l}{\nu}}^{t \frac{l}{\nu}} (2 u''^2 - u^2) dx \right\}.$$

Führen wir schließlich auch für die Integrale über u''^2 und u^2 Mittelwerte ein durch die Substitutionen

$$\int_{(t-1) \frac{l}{\nu}}^{t \frac{l}{\nu}} u''^2 dx = \frac{l}{\nu} u_t'^2, \quad \int_{(t-1) \frac{l}{\nu}}^{t \frac{l}{\nu}} u^2 dx = \frac{l}{\nu} u_t^2,$$

so ergibt sich

$$p^2 = p_0^2 \left\{ 1 + \frac{8}{\nu u_t^2} \sum_{t=1}^{t=\nu} \alpha_t (2 u_t'^2 - u_t^2) \right\}.$$

Der mit der beobachteten Frequenz p und einem mittleren Durchmesser d_0 aus Gleichung (3) berechnete Elastizitätsmodul E erhält also den Korrektionsfaktor

$$\frac{p_0^2}{p^2} = 1 + \delta,$$

wenn der Kürze halber

$$\delta = - \frac{8}{\nu u_t^2} \sum_{t=1}^{t=\nu} \alpha_t (2 u_t'^2 - u_t^2) = \sum_{t=1}^{t=\nu} \alpha_t A_t$$

gesetzt wird.

Es möge genügen $\nu = 20$ anzunehmen, α werde also gemessen an den 20 Mittelpunkten der Teilstrecken, also bei

$$x = \frac{1}{40} l, \quad \frac{3}{40} l, \quad \dots \quad \frac{39}{40} l.$$

Für dieselben Stellen werde aus Gleichung (2) u_t und u_t' , und schließlich der Koeffizient von α_t berechnet, nämlich

$$A_t = - \frac{8}{\nu u_t^2} (2 u_t'^2 - u_t^2).$$

Dann ergeben sich für die Grundschiwingung folgende Werte dieses Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_{20} = + 0,31, \\
 A_2 &= A_{19} = + 0,17, \\
 A_3 &= A_{18} = + 0,06, \\
 A_4 &= A_{17} = - 0,03, \\
 A_5 &= A_{16} = - 0,11, \\
 A_6 &= A_{15} = - 0,17_5, \\
 A_7 &= A_{14} = - 0,24, \\
 A_8 &= A_{13} = - 0,29_5, \\
 A_9 &= A_{12} = - 0,33_5, \\
 A_{10} &= A_{11} = - 0,35_5,
 \end{aligned}$$

$$\sum_1^{20} A_t = - 2.$$

Sind alle α gleich, ist also der Stabdurchmesser zwar überall gleich, aber bei der Berechnung von E aus Gleichung (3) mit einem falschen Werte d_0 eingesetzt, so wird

$$\delta = - 2 \alpha,$$

wie das auch ohne weiteres aus dem Auftreten von d^3 im Nenner der rechten Seite von Gleichung (3) zu entnehmen ist.

§ 4. Versuchsergebnisse.

Die Grundtöne der freien transversalen Eigenschwingungen der Stäbe wurden erzeugt, indem man die Stäbe an den beiden Knoten in Fadenschlingen horizontal aufhing und in der Mitte mit einem Gummiball anschlug. Ihre Schwingungszahlen wurden, soweit es zugänglich war, aus der Zahl von Schwebungen bestimmt, die sie mit den Grundtönen eines Monochords gaben. Dieses wurde durch Veränderung des spannenden Gewichtes und bei einer zweiten Versuchsreihe durch Veränderung der Saitenlänge einerseits auf die Stabtöne eingestellt, andererseits auf die Grundtöne oder höheren Oktaven von vier Stimmgabeln mit den Schwingungszahlen 323,2; 385,7; 436,5; 510,7. Dadurch konnten unabhängig von der Gültigkeit des Saitengesetzes die Stabtöne indirekt an die Stimmgabeltöne angeschlossen werden.

Nun war es aber nicht immer möglich, länger anhaltende Stabtöne zu erzeugen. Es ist ja bekannt, wie stark der Schall

z. B. im Blei gedämpft wird. In schwächerem, aber noch sehr störendem Maße ist dasselbe der Fall beim Kadmium, Zinn, Wismut, also den Metallen, die nächst dem Blei die stärkste elastische Nachwirkung bei kleinen Dehnungen zeigen (§ 15). Auch der Stab aus Rhodium zeigt starke Dämpfung.¹⁾ Bei solchen Materialien konnte die Tonhöhe des Monochords nur nach dem Gehör mit der des Stabes in Einklang gebracht werden, wobei die Genauigkeit der Tonhöhebestimmung zweifellos geringer einzuschätzen ist, als wenn Schwebungen gezählt werden können.

Eine weitere Schwierigkeit ergab sich dann, wenn der Stab zwei Grundtöne besaß, die miteinander Schwebungen gaben. Sie können mehr oder weniger isoliert erhalten werden, wenn man die Schwingungen in einer der beiden aufeinander senkrechten Ebenen maximalen oder minimalen Biegemomentes erzeugt. Beim Rhodium fand ich z. B. bei einem Versuch für den höheren Ton 996, für den tieferen 986 Schw./Sek. Von den übrigen Stäben zeigten stärkere Schwebungen in sich Zink I und II, Rotguß, Platin, Palladium und Gußeisen A 6. Den möglichen Zusammenhang dieser Erscheinung mit den Abweichungen vom kreisförmigen Querschnitt habe ich nicht verfolgt, da mit gleichem Recht auch Inhomogenitäten des Stabinnern hätten in Betracht gezogen werden müssen. Solche sind in Form von Poren vorhanden im Zink II, Kadmium, Blei, Zinn, Wismut, denn diese Stäbe zeigen schon oberflächlich Löcher. Aber auch bei anderen gegossenen Stäben muß mit der Möglichkeit von Poren oder rißförmigen Zwischenräumen in der kristallinen Struktur gerechnet werden. Später (§ 17) wird hierauf näher eingegangen werden. Da es bei der Unsicherheit über die Verteilung solcher Inhomogenitäten unmöglich ist, ihren Einfluß zahlenmäßig zu berücksichtigen, so habe ich einfach die mittlere Tonhöhe zu bestimmen gesucht und mit einem kreisförmigen, wenn auch variablen Querschnitt und homogenem Material gerechnet (vgl. § 3).

Endlich sei noch erwähnt, daß die Temperatur, für welche die Eigentöne bestimmt sind, durch ein neben den Stab gehängtes Thermometer gemessen wurde. Die von diesem an-

1) Über Dämpfung von Schwingungen in Metallen vgl. E. Warburg, Pogg. Ann. 137. p. 632. 1869; W. Voigt, Wied. Ann. 47. p. 692. 1892.

gezeigten Temperaturen, die zwischen $17,5^{\circ}$ und 19° liegen, können jedoch von den Stabtemperaturen erheblich abweichen, da es sich nicht vermeiden ließ, bei Beobachtung der gedämpfteren Töne das Ohr dicht an den Stab heranzubringen. Die beobachteten Temperaturen, auf die allerdings wegen des geringen Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls hier wenig ankommt, sollen deshalb nicht einzeln angegeben werden.

Aus den erwähnten Fehlerquellen geht hervor, daß die nach der Methode der Transversalschwingungen angestellten Versuche zum Teil nur mäßige Genauigkeit haben können. Dies gilt für fast sämtliche gegossenen Stäbe (Zn, Cd, Pb, Sn, Bi, Pt II, Pd, Rh, Gußeisen A 6, Rotguß).

Tabelle 1.

	l cm	d_0 cm	s	n Schw./Sek.	φ	δ	E kg/mm ²
Aluminium	26,90	1,206 _s	2,71	752,4	+0,0062	-0,0015	713 _o
Kupfer IVa	26,18	1,196 _o	8,96	573,4	,0064		1253 _o
Silber	25,19	1,108 _o	10,53	425,5	,0060	- ,0021	807 _o
Gold I	26,99	1,207 _s	19,22	294,0	,0062		782 _o
„ II	27,69	1,154 _s	19,21	270,3	,0054		801 _o
Nickel	26,93	1,604 ₇	8,81	933,2	,0110		2038 _o
Zink I*	27,01	1,193 ₇	7,17	509	,0060	- ,0064	891 _o
„ II**	26,98	1,805	7,11	905,7	,0138		1287 _o
Kadmium	26,95	1,798	8,63	535	,0138	- ,0021	524 _o
Blei	27,04	1,802 _s	11,32	271,2	,0137		178 _o
Zinn	26,97	1,802 _s	7,28	603	,0138		562 _o
Platin II	27,04	1,614	21,39	550,0	,0110	- ,0059	1717 _o
Palladium	26,98	1,610	11,96	608,0	,0110	+ ,0003	1176 _o
Rhodium	27,05	1,606	12,23	992	,0109	+ ,0001	325 _{oo}
Iridium	26,07	1,733	22,49	1089	,0137	- ,0109	529 _{oo}
Eisen I	26,97	1,300 ₇	7,84	823,5	,0072		2154 _o
„ II	26,94	1,601	7,85	1012	,0109		2148 _o
„ III	27,53	1,802 ₇	7,85	1097	,0132		2176 _o
Stahl	26,98	1,595 ₂	7,82	1002	,0108		2126 _o
Gußeisen A 6	27,51	2,002 _s	7,22	1000	,0164		1348 _o
„ GK 3	27,50	2,010 ₁	7,11	894	,0165		1051 _o
Wismut	26,98	1,795 _s	9,78	403	,0137	- ,0020	339 _o
Rotguß	26,94	1,468	8,40	564,5	,0092	- ,0094	841 _o
Konstantan	26,96	1,997	8,92	1029	,0169	- ,0003	1636 _o
Manganin	26,94	1,806	8,44	838	,0139	+ ,0014	1250 _o

* 1,1 Proz. Blei.

** rein, löcherig.

Die Versuchsergebnisse sind in Tab. 1 vereinigt. Länge l , Durchmesser d_0 (gleich Mittelwert über die ganze Stablänge) und Dichte s sind zum großen Teil von den Herren Jaeger und Diesselhorst¹⁾ übernommen, n gibt die Schwingungszahl des Grundtones in der Sekunde, ρ die Korrektur wegen der Rotationsenergie (§ 2), δ die wegen ungleichmäßigen Durchmessers (§ 3) und E den Elastizitätsmodul, wie er aus der vervollständigten Formel (3a)

$$(3b) \quad E = \frac{64 \pi^2}{981 \cdot 10^6 m^4} \cdot \frac{s l^4 n^2}{d_0^2} (1 + \rho + \delta) \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \right]$$

berechnet wird. Die Korrektur δ , die ohnehin sehr klein ist, brauchte für die Stäbe von gleichmäßigem Querschnitt nicht berechnet zu werden, bei anderen (Pb, Sn, Zn II) wurde sie deshalb fortgelassen, weil die Bestimmung von E aus anderen Gründen zu ungenau ist, als daß diese Korrektur Bedeutung gehabt hätte.

Eine Besprechung des in Tab. 1 gewonnenen Zahlenmaterials folgt weiter unten im 4. Abschnitt § 17 ff.

In der Einleitung ist bereits erwähnt worden, daß meine Versuche, den Elastizitätsmodul aus dem ersten Oberton zu bestimmen, es zweifelhaft lassen, ob dessen Anwendung bei so kurzen und dicken Stäben einwandfrei ist. Hier seien in Tab. 2 diejenigen Versuche angeführt, bei denen der Oberton einigermaßen sicher, d. h. mittels Schwebungen zu bestimmen war. Seine Schwingungszahl werde mit n_1 bezeichnet, ρ_1 sei die Korrektur wegen der Rotationsenergie (§ 2), E_1 der aus Gleichung (3b) berechnete Elastizitätsmodul, wobei jetzt

$$m = 7,853$$

zu setzen ist. Zum Vergleich ist der aus dem Grundton gefundene Wert E neben E_1 aufgeführt.

Tabelle 2.

	n_1 Schw./Sek.	ρ_1	E_1 kg/mm ²	E kg/mm ²
Gold I . . .	804	+0,0136	7760	7820
Gold II . . .	738	0,0118	7900	8010
Palladium . .	1651	0,0242	11550	11760

1) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, l. c. p. 323.

2. Methode der freien Longitudinalschwingungen.

§ 5. Korrektur wegen Querkontraktion ist zu vernachlässigen.

Es mögen zunächst die Korrekturen besprochen werden, welche den in §§ 2 und 3 für die Transversalschwingungen abgeleiteten entsprechen.

Ist p die Frequenz ($n =$ Schwingungszahl) der longitudinalen Grundschwingung eines Stabes von der Länge l , so ist es gebräuchlich, E aus der Formel

$$E = \frac{p^2 l^2 s}{\pi^2} = 4 n^2 l^2 s$$

zu berechnen. Dabei wird nicht darauf Rücksicht genommen, daß der Stab bei den Längsschwingungen auch Querschwingungen vollführt, indem sich der Querschnitt bei Dehnung zusammenzieht und umgekehrt. Lord Rayleigh (l. c. § 157) gibt einen Korrekturfaktor an, der die Querkontraktionsenergie berücksichtigt. Demnach wäre E noch zu multiplizieren mit

$$1 + \frac{\mu^2 \pi^2 a^2}{8 l^2},$$

wo μ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation bedeutet und ungefähr den Wert von $1/4$ bis $1/3$ hat. Da selbst beim dicksten Stabe (Konstantan) die Korrektur unter 1 Promille bleibt, habe ich sie nicht angebracht.

§ 6. Korrektur wegen ungleichmäßigen Querschnittes.

Geringe Abweichungen vom gleichförmigen Querschnitt können in folgender Weise berücksichtigt werden.

Bezeichnet ξ die Verschiebung des longitudinal schwingenden Stabes, q wieder den Querschnitt, so ist seine potentielle Energie

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} E q \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx,$$

die kinetische Energie der Longitudinalbewegung

$$L = \int_0^l \frac{1}{2} s q \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Der Querschnitt q sei längs x variabel und darstellbar durch

$$q = q_0(1 + \varepsilon_x),$$

wo q_0 den Mittelwert des Stabquerschnittes bezeichnet. Das Verhältnis ε_x sei so klein gegen 1, daß es auf die Gestalt des schwingenden Stabes ohne merkbaren Einfluß ist. Wir nehmen also die Verschiebung ξ in der für gleichmäßigen Durchmesser geltenden Form an

$$\xi = \cos \frac{\pi x}{l} \sin p t,$$

wo p die wirkliche Frequenz der Grundschwingung ist.

Führt man die Ausdrücke von ξ und q in V und L ein, so folgt

$$V = \frac{1}{2} E q_0 \frac{\pi^2}{l^2} \sin^2 p t \left[\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \int_0^l \varepsilon_x \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \right],$$

$$L = \frac{s q_0}{2} p^2 \cos^2 p t \left[\int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx + \int_0^l \varepsilon_x \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx \right].$$

Ebenso wie in § 3 denken wir uns hier wieder die Stablänge l in ν Abschnitte eingeteilt, für deren jeden ε_x als konstant angesehen werden darf. Für den t^{ten} Abschnitt gelte ε_t . Dann lassen sich auch die an zweiter Stelle stehenden Integrale in den [] abschnittsweise ausrechnen, und es wird

$$V = \frac{\pi^2 E q_0}{2 l^2} \sin^2 p t \left[\frac{l}{2} + \sum_{t=1}^{\nu} \frac{l}{2} \varepsilon_t \left\{ \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right\} \right],$$

$$L = \frac{s q_0}{2} p^2 \cos^2 p t \left[\frac{l}{2} + \sum_{t=1}^{\nu} \frac{l}{2} \varepsilon_t \left\{ \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right\} \right].$$

Die potentielle Energie im Zeitpunkt größter Elongation

$$V_{\text{max.}} = \frac{\pi^2 E q_0}{4 l} \left[1 + \sum_t \varepsilon_t \left\{ \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right\} \right]$$

muß gleich sein der kinetischen Energie beim Durchschreiten der Ruhelage

$$L_{\max.} = \frac{1}{4} p^2 s q_0 l \left[1 + \sum_t \varepsilon_t \left\{ \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right\} \right],$$

woraus für die Frequenz p mit Rücksicht auf die Kleinheit der Summenausdrücke die Beziehung folgt

$$p^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{E}{s} \left[1 - \sum_t \frac{\varepsilon_t}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right],$$

während für gleichmäßigen Querschnitt q_0 die bekannte Beziehung gelten würde

$$p_0^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{E}{s}.$$

Also wäre der nach der letzten Formel, aber mit der beobachteten Frequenz p berechnete Elastizitätsmodul zu korrigieren im Verhältnis

$$\frac{p_0^2}{p^2} = 1 + \delta,$$

wenn

$$\delta = \sum_t \frac{\varepsilon_t}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right)$$

gesetzt wird.

Führen wir statt des Querschnittsfehlers ε_t durch die Substitution

$$\varepsilon_t = 2 \alpha_t$$

wieder den des Durchmessers ein (vgl. p. 807), so nehmen die Koeffizienten von α_t ,

$$A_t = \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right),$$

für den Fall, daß $\nu = 20$ gesetzt wird, folgende Zahlenwerte an, mit denen

$$\delta = \sum_{t=1}^{20} A_t \alpha_t$$

zu berechnen ist.

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{20} = + 0,197 = - A_{10} = - A_{11}, \\ A_2 &= A_{19} = + 0,18 = - A_9 = - A_{12}, \\ A_3 &= A_{18} = + 0,14 = - A_8 = - A_{13}, \\ A_4 &= A_{17} = + 0,09 = - A_7 = - A_{14}, \\ A_5 &= A_{16} = + 0,03 = - A_6 = - A_{15}. \end{aligned}$$

Ungleichmäßigkeiten des Querschnittes auf $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ der Stablänge sind also einflußlos, an den Enden aber absolut genommen vom gleichen Einfluß wie in der Mitte.

§ 7. Versuchsergebnisse.

Die Methode der Longitudinalschwingungen konnte nicht auf alle Stäbe angewandt werden. Ihre Grundtöne lagen entsprechend den geringen Stablängen so hoch (5000 bis 8000 Schw./Sek.), daß nur die Kundtsche Methode der Staubfiguren zur Messung der Schwingungszahlen in Betracht kam. Diese verlangt aber starkes Tönen, das ich nur durch kräftige Hammerschläge gegen die Stabenden erzeugen konnte und natürlich nur bei Material, dessen Schwingungen wenig gedämpft sind. Da außerdem die durch das Schlagen bewirkte dauernde Deformation der Stabenden möglichst vermieden werden sollte, so habe ich mich darauf beschränkt, diese Messungen bei Platin, Palladium, Rotguß, Konstantan und Manganin durchzuführen. Diese Stäbe gaben einerseits gute Staubfiguren, andererseits ließen sie die Anwendung einer dritten Methode wegen mangelnder Übereinstimmung der beiden übrigen (vgl. Tab. 8, p. 838) wünschenswert erscheinen.

Die Stäbe gaben in einem Glasrohr von 78 cm Länge und 2,1 cm lichter Weite gut ausmeßbare Figuren aus Korkstaub oder Lycopodiumsamen. Die Anordnung der Versuche unterschied sich nicht wesentlich von der üblichen.¹⁾ Der Elastizitätsmodul wurde berechnet nach der Formel

$$(4) \quad E = \frac{331^2 (1 + 0,00367 \vartheta) l^2 s}{9810 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{e}{b}\right) \lambda^2} \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \right],$$

wo ϑ die vom Eispunkt an gerechnete Temperatur der Luft im Rohre, l die Stablänge, s die Dichte, λ den Abstand zweier Knoten im Rohre, b den Luftdruck und e den Partialdruck des Wasserdampfes daselbst bedeutet. Bei den ersten Versuchen wurde die Luftfeuchtigkeit nicht gemessen, deshalb nach der abgekürzten Formel²⁾

$$E = \frac{331^2 (1 + 0,004 \vartheta) l^2 s}{9810 \lambda^2}$$

1) Vgl. z. B. F. Kohlrausch, Lehrbuch X. Aufl. 53 u. 56 I, 1905.

2) F. Kohlrausch, l. c. p. 230.

gerechnet, den Versuchen aber nur halbes Gewicht gegeben. Bei den späteren Versuchen würde die abgekürzte Formel um etwa 3 Promille zu große E ergeben.

Tabelle 3.

	ϑ	$E_{\text{unkorr.}}$	A	δ	$E_{\text{korr.}} \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \right]$
Platin	18,8 ^o	17265	-0,0060	-0,0077	17021
	18,7 } 18,7 ₅	17250 } 17257			
Palladium	15,8	11531	- ,0057	- ,0005	11470
	17,5* } 16,8	11613* } 11542			
	18,0 }	11518 }			
Rotguß	18,0*	8380*	- ,0056	- ,0061	8244
	15,2* } 17,3	8375* } 8341			
	18,1 }	8329 }			
Konstantan	19,0*	16612*	- ,0048	- ,0003	16555
	17,9* } 18,7	16637* } 16640			
	18,9 }	16656 }			
Manganin	17,7	12684*	- ,0051	+ ,0011	12599
	17,7 } 17,7	12681 }			

* Gewicht $\frac{1}{2}$.

In Tab. 3 sind neben den Versuchstemperaturen die nach den genannten Formeln berechneten Werte für E unter $E_{\text{unkorr.}}$ verzeichnet. Sie bedürfen aber, abgesehen von der in § 6 abgeleiteten Korrektur δ wegen variablen Durchmessers, noch einer zweiten wegen des Unterschiedes der Schallgeschwindigkeit im Rohre v gegen die in freier Luft v_0 . Nach der von G. Kirchhoff¹⁾ erweiterten Helmholtzschen²⁾ Korrektionsformel ist für ein Rohr vom Durchmesser D und einen Ton von der Schwingungszahl n

$$v = v_0 \left(1 - \frac{\gamma}{D \sqrt{\pi n}} \right),$$

wo γ nach Kirchhoff für jedes Gas sich aus dem Reibungskoeffizienten μ , der Wärmeleitfähigkeit κ , der Dichte σ , dem

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 134. p. 177. 1868.

2) H. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. I. p. 383.

Verhältnis der spezifischen Wärmen k und der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen c_v in folgender Weise zusammensetzt¹⁾:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left\{ \sqrt{\mu} + \left(\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \sqrt{\frac{\pi}{c_v}} \right\}.$$

Bei experimentellen Prüfungen ist die Korrektur hinsichtlich der Abhängigkeit von D und n bestätigt worden, doch ist, wie auch schon Kirchhoff für wahrscheinlich hielt, ein empirischer Wert für γ einzusetzen, der etwas größer ist, als der theoretische (etwa 0,59 [C.G.S.] für Luft). Nach den Bestimmungen von Low²⁾, Stevens³⁾, J. Müller⁴⁾ wähle ich für mein Rohr

$$\gamma = 0,8.$$

Diese Zahl gilt, wenn D in cm, n in sek^{-1} gemessen wird.⁵⁾

Da in E das Quadrat von v eingeht, so ist der aus Gleichung (4) berechnete Wert zu multiplizieren mit

$$1 + \Delta = 1 - \frac{2\gamma}{D\sqrt{\pi n}}.$$

Die Δ sind in der vierten Kolonne von Tab. 3 verzeichnet. Kolonne 6 gibt die endgültigen Werte des Elastizitätsmoduls aus Longitudinalschwingungen, die sehr nahe übereinstimmen mit den aus Dehnungsversuchen gefundenen (vgl. Tab. 8, p. 838).

3. Methode statischer Dehnungen.

§ 8. Anwendung des Interferenzprinzips auf Dehnungsmessungen.

Den Elastizitätsmodul aus Längsdehnungen zu bestimmen, hat den Vorteil, daß alle Teile des Materials in der gleichen Weise beansprucht werden, daß man also am ehesten einen Mittelwert des Moduls erhält. Nun gehören aber erhebliche

1) Vgl. S. Valentiner, Ann. d. Phys. 15. p. 93. 1904.

2) W. Low, Wied. Ann. 52. p. 641. 1894; Phil. Mag. (5) 38. p. 249. 1894.

3) E. H. Stevens, Ann. d. Phys. 7. p. 285. 1902.

4) J. Müller, Ann. d. Phys. 11. p. 331. 1903.

5) Der im Lehrbuch von F. Kohlrausch, X. Aufl. p. 231 (56 I, 2), 1905 angegebene Korrekturterm für die Luftwellenlänge entspricht einem fast doppelt so großen Werte für γ .

Kräfte dazu, die fingerdicken Metallstäbe so stark zu dehnen, daß die üblichen Methoden zur Messung der Verlängerung angewandt werden können. In den modernen mechanisch-technischen Laboratorien sind Festigkeitsprobiermaschinen aufgestellt, in denen die Probestäbe auf hydraulischem Wege mit vielen Tonnen Gewicht auf Zug und Druck beansprucht werden können.¹⁾ Zur Messung der Verlängerung dienen dort verschiedene Formen von Spiegelapparaten. Hr. Martens²⁾ gibt an, daß seine Apparate in Verbindung mit Fernrohr und Skala Längenänderungen „bis auf Größen von der Ordnung 0,0001 mm schätzen lassen, gelegentlich aber auch schon bis auf 0,00002 mm benutzt wurden. Die Ablesungen können dabei bis auf wenige Schätzungseinheiten zuverlässig ausgeführt werden“. Doch ist dabei zu beachten, daß die Angaben der Spiegelapparate gerade nach kleinen Dehnungen hin unsicher werden können³⁾, insofern eine Art „toter Gang“ nicht ausgeschlossen erscheint.⁴⁾

Abgesehen davon, daß mir eine Festigkeitsprobiermaschine nicht zur Verfügung stand, und die Versuchsstäbe nicht die für deren Einspannvorrichtungen notwendige Form besitzen, erschien es auch aus dem Grunde wünschenswert, eine Methode für kleinere Dehnungen auszuarbeiten, weil der Elastizitätsmodul für eine Anzahl von Metallen sich als abhängig von der Größe der Deformation erwiesen hat (vgl. § 19), und es zunächst im Interesse der Physik liegt, den Grenzwert des Moduls für kleine Deformationen kennen zu lernen. Ein weiterer Grund für die Wahl kleiner Deformationen liegt in der Annehmlichkeit, von der elastischen Nachwirkung befreit zu sein.

Die eleganteste Methode, kleine Verlängerungen zu messen, beruht auf der Anwendung von Interferenzerscheinungen. Solche sind seit langer Zeit gebräuchlich zur Beobachtung thermischer Ausdehnungen und auch elastischer Deformationen.⁵⁾

1) A. Martens, *Materialienkunde* 1. Berlin 1898.

2) Das Königl. Materialprüfungsamt der Techn. Hochschule Berlin, *Denkschrift* bearb. von A. Martens u. M. Guth, p. 324. 1904.

3) C. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, IV. Aufl. p. 42 Anm. 1902.

4) A. Martens, *Materialienkunde* 1. p. 456. 1898.

5) Die einschlägige Literatur vgl. z. B. in Winkelmanns *Handbuch* 2. Aufl. VI Optik. p. 978. 1906.

Einfache elastische Dehnungen scheinen bisher jedoch noch nicht nach dem Interferenzprinzip gemessen zu sein. Eine ausführliche Beschreibung des benutzten Apparates ist an anderer Stelle gegeben worden.¹⁾ Hier genügt es, sein Prinzip klar zu legen. Bemerket sei noch, daß sich Hr. F. Kohlrausch schon früher mit Plänen zu solchen Messungen beschäftigt hat.

§ 9. Haidingersche Ringe in planparallelen Platten.

Die Haidingerschen Ringe²⁾, welche ich benutzt habe, entstehen z. B., wenn monochromatisches Licht durch eine planparallele Schicht hindurchtritt, deren Grenzflächen das auffallende Licht teils durchlassen, teils reflektieren, durch die Interferenz der direkt und nach mehrfacher Reflexion hindurchgekommenen parallelen Strahlen. Vereintigt man diese durch eine Sammellinse auf deren Brennebene, so entsteht hier ein System von hellen und dunklen Ringen.

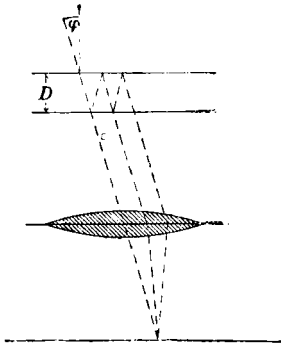


Fig. 1.

Betrachten wir einen Strahl, der aus Luft kommend mit dem Einfallswinkel φ auf die Luftschicht von der Dicke D trifft (Fig. 1). Die spiegelnden Grenzflächen seien durch einseitige schwache Versilberungen auf planparallelen Glasplatten gebildet. Dann ist der Gangunterschied zwischen den direkt und nach wiederholter Reflexion austretenden Strahlen

$$(5) \quad g = 2 D \cos \varphi,$$

oder ein ganzzahliges Vielfaches dieser Größe. Entsprechend diesem Gangunterschiede besteht eine bestimmte Helligkeit im Vereinigungspunkte der Strahlen in der Brennebene der auffangenden Linse. Gleiche Helligkeit herrscht auf dem

1) E. Grüneisen, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 27. p. 38. 1907.

2) Eine ausführlichere theoretische Behandlung vgl. z. B. bei O. Lummer, Müller-Pouillet's Lehrbuch 9. Aufl. 2. 1. § 349. 1897 und W. Feussner, Winkelmann's Handbuch 2. Aufl. VI Optik. p. 984. 1906.

ganzen Kreise, in dem sich alle die Strahlen des auffallenden Lichtes vereinigen, die den Neigungswinkel φ mit der Normalen der Planparallelschicht bilden.

Eine Änderung des Gangunterschiedes g um eine ganze Zahl von Wellenlängen λ des benutzten Lichtes wird die Helligkeit in jenem Vereinigungspunkte unverändert lassen.

Nun ändere sich g um $\nu \lambda$ ($\nu = 1, 2, 3 \dots$) *erstens* dadurch, daß D um

$$(6) \quad \Delta D = \frac{\nu \lambda}{2 \cos \varphi}$$

sich ändert, während der Einfallswinkel φ konstant bleibt. Dann werden sich die betrachteten Strahlen stets an demselben Punkte der Brennebene vereinigen, ihr Gangunterschied und damit die Helligkeit wird hier aber ν -mal wechseln, bis der ursprüngliche Wert wieder erreicht ist.

Eine Änderung von g kann aber *zweitens* dadurch hervorgerufen werden, daß das einfallende Licht seinen Einfallswinkel φ ändert, während die Schichtdicke D konstant bleibt. Für $\varphi = 0$ ist der Gangunterschied $2D$. Nehmen wir speziell an, $2D$ sei ein ganzzahliges Vielfaches von λ , so geben die Strahlen $\varphi = 0$ ein Ringzentrum mit maximaler Helligkeit. Lassen wir φ wachsen, bis g um $\varrho \lambda$ abgenommen hat ($\varrho = 1, 2, 3 \dots$), so wiederholt sich zum ϱ^{ten} Male ein Helligkeitsmaximum im Vereinigungskreise der austretenden Strahlen. Die Winkel φ_e , bei denen dies geschieht, sind gegeben durch

$$2D - 2D \cos \varphi_e = \varrho \lambda$$

oder

$$\cos \varphi_e = 1 - \frac{\varrho \lambda}{2D}$$

Wenn man nun, wie es hier geschah, bei Beobachtung des Ringsystems am Orte des zweiten oder dritten Ringes eine feste Marke anbringt, an der die bei einer Änderung von D vorüberwandernden Ringe gezählt werden, so hat man für ϱ einzusetzen 2 oder 3. Bei Benutzung grünen Quecksilberlichtes ist $\lambda/2 = 0,000273$ mm, D wurde zwischen 2 und 3 mm gewählt. Daraus folgt, daß $\cos \varphi_e$ nur um etwa 0,0003 von 1 verschieden ist.

Man darf daher unter den angegebenen Verhältnissen auch in Gleichung (6) $\cos \varphi = 1$ setzen und schreiben

$$(7) \quad \Delta D = v \frac{\lambda}{2}.$$

Die Dickenänderung der Planparallelschicht, welche am Orte des zweiten oder dritten Interferenzringes zum v^{ten} Male wieder die gleiche Helligkeit hervorbringt, kann also gleich dem v -fachen der halben Wellenlänge des benutzten Lichtes gesetzt werden.

§ 10. Optische Versuchsanordnung.

Um die soeben abgeleitete einfache Beziehung zur Messung der elastischen Stabdehnungen verwerten zu können, handelt es sich wesentlich darum, plane schwach versilberte Glasflächen so mit dem Stabe zu verbinden, daß sie einerseits eine zur Stabrichtung senkrechte, planparallele Luftschicht von etwa 2—3 mm Dicke begrenzen, andererseits die Abstandsänderung zweier möglichst voneinander entfernter Stabquerschnitte bei der Dehnung des Stabes mitmachen. Dann gibt nach § 9 die Anzahl der hervorquellenden oder versinkenden Ringe die Entfernungszunahme oder -abnahme jener Querschnitte in halben Lichtwellen.

Zur Verwirklichung des angegebenen Prinzips ist die in Fig. 2 schematisch skizzierte Anordnung getroffen.

S_1, S_2 und S_1', S_2' stellen zwei Glasplattenpaare vor, zwischen deren durchlässig versilberten inneren, d. h. einander gegenüberstehenden Grenzflächen die Interferenzringe erzeugt werden können. S_1 und S_1' sitzen an einem mit dem Querschnitt Q_1 des Stabes starr verbundenen Träger. Dieser hat die Form eines den Stab eng umschließenden Rohres aus Aluminium, an dessen unterem Ende drei Spitzenschrauben den Querschnitt Q_1 fassen, während am anderen Ende eine ringförmige Aluminiumplatte aufgesetzt ist mit zwei symmetrisch zur Mitte gebohrten Diaphragmen für die Platten S_1 und S_1' . Außerdem ist eine in der Figur nicht angedeutete Feinverstellung der Platten gegen den röhrenförmigen Träger bez. den Querschnitt Q_1 vorgesehen.

Die entsprechende Anordnung ist für die Platten S_2 u. S_2' getroffen.

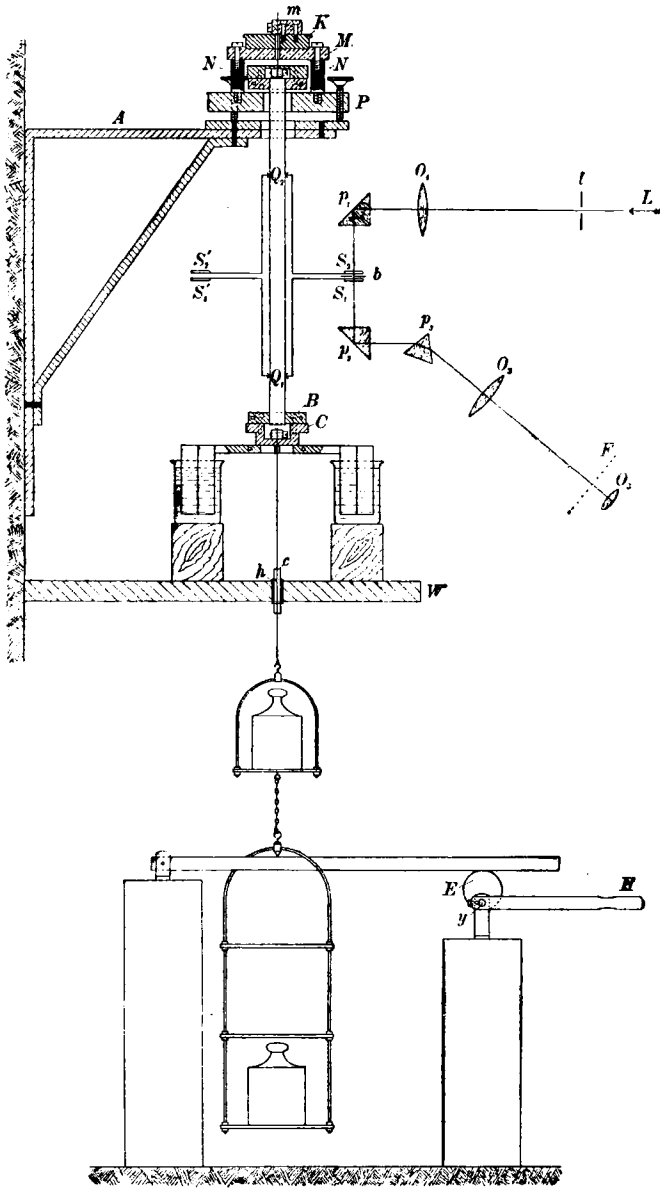


Fig. 2.

Die beiden Plattenpaare S_1, S_2 und S_1', S_2' sind notwendig, weil bei der Dehnung des Stabes *unvermeidliche Biegungen* auftreten¹⁾, die, wie leicht ersichtlich, zur gemessenen Abstandsänderung der spiegelnden Flächen einen Beitrag liefern können, offenbar aber eliminiert werden durch Beobachtung an zwei symmetrisch zur Stabachse gelegenen Planparallelschichten. *Das arithmetische Mittel der beiderseits gemessenen Verschiebungen gibt die wahre vom Biegungseinfluß befreite Dehnung.*

Die Symmetrie der wirksamen Plattenteile zur Stabachse wurde dadurch gesichert, daß man den Stab um seine Achse drehbar aufhing und die beiden durch eine halbe Umdrehung des Stabes vertauschbaren Plattenpaare nacheinander an derselben vom Stabe getrennt aufgestellten Blende b (Fig. 2) wirken ließ.

Infolgedessen bedurfte es auch nur *einer* vom Stabe getrennt aufgestellten optischen Einrichtung zur Erzeugung und Beobachtung der Interferenzringe. Sie ist in Fig. 2 schematisch angedeutet. Das von einer Quecksilberlampe L kommende Licht beleuchtet den Spalt t , dessen durch die Linse O_1 parallel gemachtes Licht vom Prisma p_1 total reflektiert und so durch die horizontale Interferenzluftplatte zwischen S_1 und S_2 geschickt wird. Hier entstehen die in § 9 besprochenen Interferenzen, die auf der Netzhaut eines auf Unendlich eingestellten Auges das in den Farben der Quecksilberlinien bunte Bild der Haidingerschen Ringe erzeugen, aus dem der Spalt t einen Streifen ausblendet. Zwecks genauer Messung der Ringverschiebung wird das aus S_1 austretende Licht durch das total reflektierende Prisma p_2 horizontal gerichtet, durch ein geradsichtiges Prisma p_3 (in Fig. 2 als gewöhnliches gezeichnet spektral zerlegt und durch das Objektiv O_2 des Fernrohres konvergent gemacht. Durch das Okular O_3 des Fernrohres sieht man dann in der Brennebene F von O_2 ein vergrößertes Bild der nach den Farben getrennten Ringsysteme. Alle Beobachtungen wurden an dem grünen System ($\lambda = 0,546 \mu$) ausgeführt, das hinreichend von den benachbarten gelben iso-

1) Biegungen können auch bei völlig zentriertem Angriff der Zugkräfte entstehen, wenn der Stab von vornherein Durchbiegungen besitzt oder inhomogen ist.

liert war. Der in der Brennebene sich gleichfalls abbildende Spalt wird so gerückt, daß er einen horizontalen, durch das Ringzentrum gehenden Streifen ausblendet (Fig. 3).

§ 11. Aufhängung und Belastung des Stabes.

Aus der in § 10 gegebenen Beschreibung der optischen Einrichtung ergeben sich folgende zwei Forderungen für die Aufhänge- und Belastungsvorrichtung des Stabes:

1. *Der Stab soll um seine Achse drehbar aufgehängt sein.*
2. *Bei beliebig häufiger Wiederholung der gleichen Belastung soll auch die gleiche, möglichst biegungsfreie Deformation des Stabes auftreten.*

Die Erfüllung der ersten Bedingung ist leicht, die der zweiten machte anfangs Schwierigkeiten.¹⁾ Schließlich wurde die Aufgabe gelöst durch folgende Anordnung.

Der Stab wird am oberen Ende seiner Längsachse von einer im Vergleich mit ihm selbst sehr dünnen, bez. biegsamen Stahlsaite getragen, die andererseits an einem Wandarm befestigt ist. Am unteren Ende der Stabachse greifen die Belastungsgewichte mittels einer gleichen Stahlsaite an.

Die Verbindung der Saitenenden mit den Stabenden geschieht durch Klemmvorrichtungen, die hier nicht näher beschrieben werden sollen.

Das obere Ende der oberen Saite von nur 2,5 cm freier Länge und 0,55 mm Durchmesser wird zwischen Klemmbacken *m* gehalten, die ihrerseits auf der drehbar gelagerten Kopfscheibe *K* so befestigt sind, daß die Saite und damit auch die Stabachse in die Drehachse von *K* zu liegen kommen. Das Lager von *K* ruht auf dem eisernen Wandarm *A*.

Die untere etwa 30 cm lange Saite ist mit möglichst geringer Reibung durch das Wandbrett *W* geführt, indem ein auf ihr *leicht gleitendes* Zylinderchen *c* mit schwacher Reibung in eine feste Hülse *h* des Wandbrettes paßt. Durch diese

1) Ein vergeblicher Versuch bestand z. B. darin, mit dem Stabe zwei in der Verlängerung seiner Achse liegende, ihm zugekehrte *Spitzen* starr zu verbinden, auf deren einer der Stab frei beweglich hing, während an der anderen die Belastungsgewichte angriffen. Die Spitzen bildeten offenbar keinen hinreichend konstanten Angriffspunkt.

Führung wird die Übertragung von Pendelungen der Gewichtsschalen auf den Stab ausgeschlossen. Die obere der beiden Schalen (0,27 kg) ist in eine Öse des Drahtes eingehängt und trägt die Dauerbelastung von meist 5 kg. Mit ihr ist durch eine kurze eiserne Kette die größere, zwecks bequemer Zentrierung der Gewichte dreiteilige Schale (1,12 kg) der Zusatzbelastungen verbunden, die durch einen Hebelarm bis zur Entlastung der Kette gehoben werden kann.

Dadurch ließ sich die Belastung und Entlastung des Stabes völlig *erschütterungsfrei* ausführen. Drehende oder pendelnde Schwingungen der Gewichtsschalen wurden durch weiche Pinsel, Erschütterungen des Stabes selbst durch zwei in Glyzeringefäße tauchende Dämpferflügel, die an der unteren Klammvorrichtung des Stabes befestigt waren (Fig. 2), so gut wie vollständig beseitigt.

§ 12. Beobachtung der Ringverschiebung und Berechnung der Stabdehnung.

Fig. 3 soll das im Fernrohr gesehene Bild wiedergeben. Die Ringe sind vollständig gezeichnet, obwohl der außerhalb

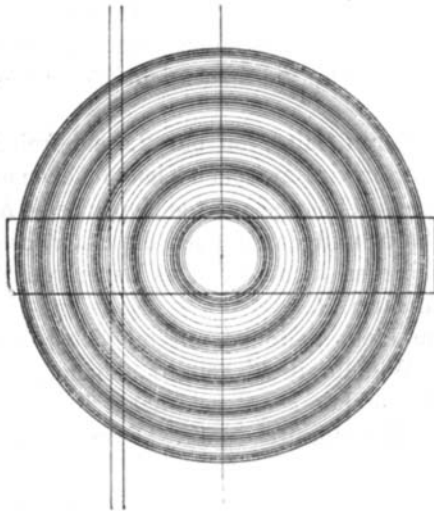


Fig. 3.

des horizontalen, durch das Spaltbild ausgeblendeten Streifens liegende Teil in Wirklichkeit nur schwach zu sehen ist. Auf diesem Streifen heben sich ein durch das Zentrum gehender, senkrechter Faden und ein auf den dritten hellen Ring links eingestellter Doppelfaden ab. Jener ist fest, dieser mikrometrisch in horizontaler Richtung verstellbar.

Tritt beim Belasten des Stabes lediglich eine Parallelverschiebung der Glasplatten ein, so wird das Ringzentrum an seinem Orte bleiben, die Ringe selbst aber werden

nach außen wandern. Ihre Verschiebung könnte, außer durch Abzählung der am Doppelfaden vortübergewanderten Streifen, durch Nachstellen des Doppelfadens auf den nächsten hellen Streifen mit der Mikrometerschraube ausgemessen werden. *Es ist aber zweckmäßiger, die Belastungsgewichte so abzugleichen, daß eine ganze Zahl von Ringen vorüberwandert*, also nach der Belastung das Ringbild die gleiche Gestalt hat wie vorher. Steht anfangs der Doppelfaden auf der Mitte eines hellen Streifens ein, so ist das auch nach der Belastung der Fall. Die Vorteile dieser Beobachtungsweise liegen in der wegen des Temperatureinflusses und elastischer Nachwirkung erwünschten Schnelligkeit und in der Bequemlichkeit, von Mikrometerablesungen befreit zu sein.

Nun erleiden aber die Platten kaum jemals eine reine Parallelverschiebung, sondern führen wegen der Biegung des Stabes zugleich kleine Drehungen aus, infolge deren sich das Ringzentrum im Gesichtsfelde des Fernrohres etwas verschieben kann. Während eine geringe Verschiebungskomponente in Richtung der Fäden ohne störenden Einfluß ist, wird durch eine gleiche Komponente senkrecht zu den Fäden bewirkt, daß verschiedene Belastungen π_l und π_r dazu gehören, um links und rechts vom Zentrum ν Ringe vorbeizuwandern zu lassen, oder m. a. W. daß die auf Einheitsbelastung umgerechneten Verschiebungen ν/π_l und ν/π_r links und rechts verschieden sind. Ihr arithmetisches Mittel gibt die Verschiebung im Ringzentrum mit Elimination der seitlichen Bewegung. Dieser Verschiebung entspricht eine Belastung π , die gegeben ist durch

$$\frac{\nu}{\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\pi_l} + \frac{\nu}{\pi_r} \right),$$

oder

$$(8) \quad \pi = \frac{1}{2} (\pi_l + \pi_r) \left[1 - \left(\frac{\pi_l - \pi_r}{\pi_l + \pi_r} \right)^2 \right].$$

Der Unterschied von π gegen das arithmetische Mittel von π_l und π_r kommt also nur bei starker seitlicher Verschiebung des Ringzentrums in Betracht.

Für die so berechneten Werte π ergab sich häufig schon für jedes einzelne Plattenpaar *Proportionalität* mit den zugehörigen ν . Dann berechnet man aus einer Wertereihe (ν, π)

den wahrscheinlichsten Wert¹⁾ der für die Belastung 1 wandernden Ringzahl δ aus der Formel

$$\delta = \frac{\sum \nu^2}{\sum \nu \pi}.$$

Ergeben sich so für die zwei Plattenpaare verschiedene δ , so gibt deren Mittelwert die der wahren Stabdehnung entsprechende Ringverschiebung.

Nun kommt es aber auch vor, daß zwischen der an einem Plattenpaar beobachteten Verschiebung und der Belastung *keine Proportionalität* besteht. Bildet man aber für ein und dieselbe Belastung das Mittel der an *beiden* Plattenpaaren beobachteten *Verschiebungen*, eliminiert man also den Biegungseinfluß, so erweist sich dies Mittel wiederum der Belastung proportional. Die Erscheinung rührt also daher, daß in diesen Fällen die Biegung nicht proportional der Belastung ist. Aus den erhaltenen Mittelwerten, deren jeder der wahren Stabdehnung entspricht, wird dann wieder nach der angegebenen Formel der wahrscheinlichste Wert für δ abgeleitet.

Multipliziert man δ mit der halben Lichtwellenlänge $\lambda/2$, so erhält man nach § 9 (Gleichung (7)) die Dehnung des Stabes zwischen Q_1 und Q_2 für die Belastung 1 im gewöhnlichen Längenmaße.

§ 13. Schutz gegen Temperaturschwankungen.

Obwohl bei Temperaturschwankungen nur die Differenz der thermischen Ausdehnung von Stab und Glasplattenträgern zur Wirkung kommt, so genügt diese doch bei vielen Stäben, um Ringverschiebungen hervorzubringen, die bei Temperaturänderungen von etwa $0,2^\circ$ C. von der Größenordnung eines Ringes sind. Nun erfordert aber die in § 12 besprochene Beobachtungsweise lediglich, daß während der Belastungs- oder Entlastungsdauer von nur einigen Sekunden der Temperatureinfluß unmerkbar sei. Einen hierfür ausreichenden Temperaturschutz gab ein auf das Wandbrett *W* (Fig. 2) gestellter, nach der Wand hin offener Holzkasten, der den ganzen über dem Wandbrett befindlichen Apparat einschloß und nur zwei

1) Wegen der linearen Abhängigkeit von π und ν ist es gleichgültig, welche von beiden Größen als mit Beobachtungsfehlern behaftet gilt.

Glasfenster für Ein- und Austritt der Lichtstrahlen besaß. Er konnte bequem gehoben und gesenkt werden. Ein in der Decke des Kastens montiertes, außen ablesbares $\frac{1}{10}^{\circ}$ -Thermometer gab die Temperatur im Innern des Kastens an.

Alle Versuche wurden bei *Zimmertemperatur* ausgeführt. Ihre Änderung während der ziemlich lange Zeit dauernden Versuchsreihen (vgl. § 15) war wegen des kleinen Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls von geringer Bedeutung.

§ 14. Vorbereitung und Durchführung der Versuche.

Nachdem das eine Ende des Stabes in der Aufhängung festgeklemmt ist, so daß er frei beweglich an der kurzen oberen Saite pendelt, werden die Träger der Glasplattenpaare S_1, S_1' und S_2, S_2' mit ihren je drei Spitzenschrauben in den Querschnitten Q_1 und Q_2 festgeklemmt.¹⁾ Darauf wird die Klemmvorrichtung der unteren Saite am Stabe befestigt, eine passende Belastung angebracht und nunmehr die Aufhängevorrichtung des Stabes auf dem Wandarm A so lange verschoben, bis das auf der unteren Saite gleitende Zylinderchen c , das anfangs aus der Hülse h herausgezogen ist, in dieselbe zurückgleitet, wo es mit leichter Reibung sitzen bleibt. *Dann kann die Stabachse als senkrecht gelten.*

Es kommt nun darauf an, *die spiegelnden Flächen der Glasplatten einander parallel und horizontal* zu richten. Man verstellt S_2 und S_2' gegen ihren Träger, bis ihre versilberten Schichten ein Senkel nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen ungebrochen spiegeln. Von da ab bleiben diese Platten unverändert. Die Interferenzerscheinung wird lediglich durch Verstellung der Platten S_1 bez. S_1' gegen ihren Träger erzeugt.

Von der äußeren optischen Einrichtung sind alle Teile vom vorigen Versuche her an ihrer Stelle geblieben, nur die Blende b und das untere Prisma p_2 sind wieder an ihren Platz zu bringen. Danach wird der Temperaturschutzkasten heruntergelassen.

Es sei hier nun kurz der Verlauf der Versuche mit dem Stabe „Eisen II“ von 1,6 cm Durchmesser und 27 cm Gesamt-

1) Die Eindrücke der Spitzen im Stabe gestatten nachträglich den Abstand der Querschnitte Q_1, Q_2 auszumessen.

länge beschrieben, da für ihn die Elimination des Biegungeinflusses besonders auffallend bewiesen wird.

Zwei Beobachtungsreihen am Plattenpaar 1, die hier nicht einzeln angeführt werden sollen¹⁾, ergaben Proportionalität zwischen Ringverschiebung und Belastung, und im Mittel die in Tab. 4 unter Versuch 1 verzeichnete Verschiebung δ_1 . Zwischen beiden Beobachtungsreihen war durch Drehung der Kopfscheibe K um 180° das Plattenpaar 2 in den Strahlengang gebracht worden, wobei die Verschiebung δ_2 (Versuch 1) beobachtet wurde. δ ist das arithmetische Mittel von δ_1 und δ_2 und gibt nach § 12 die Dehnung der Meßlänge L (gleich Abstand der Querschnitte Q_1, Q_2) für die Belastung von 1 kg in halben Lichtwellenlängen ($\lambda/2 = 273 \cdot 10^{-7}$ cm). Endlich ist noch unter ε die Längsdilatation ($\lambda \delta/2 L$) für 1 kg Belastung angegeben.

Tabelle 4.

Eisen II $Q = 2,014 \text{ cm}^2$	δ_1 Ring/kg	δ_2 Ring/kg	δ Ring/kg	L cm	$\varepsilon \times 10^7$ 1/kg
Versuch 1	0,1102	0,1683	0,1393	16,354	2,325
„ 2	0,1565	0,1199	0,1382	,305	2,314
„ 3	0,1452	0,1320	0,1386	,336	2,316

Im Mittel: 2,318

Der Unterschied von δ_1 und δ_2 rührt von der Stabbiegung her. Die Versuche 2 und 3 zeigen, wie diese Biegung tatsächlich durch Mittelnahme eliminiert wird. Sie unterscheiden sich nämlich von Versuch 1 dadurch, daß die röhrenförmigen Plattenträger *nach einer Drehung* (von 45° bez. 22°) *um die Stabachse* wieder an den Stab geklemmt sind, wodurch die Biegung einen wesentlich anderen Einfluß auf die Beobachtung an *einem* Plattenpaar gewinnt. Trotzdem zeigen die aus den Mitteln δ gewonnenen Längsdilatationen ε für die drei Versuche gute Übereinstimmung. Im Mittel folgt für den Elastizitätsmodul

$$E = \frac{1}{\varepsilon Q} = 21420 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} (17,1^\circ).$$

1) Man findet das Versuchsprotokoll in Zeitschr. f. Instrumentenk. 27. p. 48. 1907.

§ 15. Elastische Nachwirkung und die Versuche
am Bleistabe.

Es war bereits gesagt (§ 8), daß ein Vorteil der hier benutzten Methode in der Befreiung vom Einfluß der elastischen Nachwirkung liegt. In der Tat wurde diese nur bemerkt beim Blei, Zinn, Kadmium und Wismut. Hier machte sie sich durch ein mehr oder minder schnelles Weiterwandern der Ringe in der Richtung der durch die Belastung oder Entlastung eingeleiteten Bewegung bemerkbar. Mein Bestreben war, die bei sehr schneller Belastungsänderung sofort eingetretene Längenänderung zu beobachten, also die elastische Nachwirkung möglichst zu eliminieren.

Diese selbst zu verfolgen, eignete sich die vorliegende Versuchsanordnung deshalb nicht, weil 1. für die beobachtete Verschiebung ein fester, stets wieder zu erkennender Nullpunkt fehlt, 2. die Einflüsse der elastischen Nachwirkung von denen der Temperaturänderungen nicht zu trennen sind (vgl. § 13). Doch ist zu bemerken, daß sich jedenfalls der Temperatureinfluß für einen bestimmten Stab fast ganz eliminieren ließe, wenn man die röhrenförmigen Träger der Interferenzglasplatten, deren Gesamtlänge nahe gleich der Meßlänge des Stabes ist, aus einem Material herstellte, dessen thermische Ausdehnung der des Stabes nahe gleich ist.

Aus den angeführten Gründen habe ich über die elastische Nachwirkung nur *qualitative*, keine quantitativen Angaben notiert, z. B. im Protokoll der Versuche mit dem Bleistabe, Tab. 5 und 6, das hier ausführlich mitgeteilt werden soll, da gerade für derartiges Material die hier angewandte Methode *kleiner* Dehnungen zur Messung des Elastizitätsmoduls vor anderen geeignet erscheint. Die beiden Versuchsreihen unterscheiden sich u. a. durch die benutzten Dauerbelastungen von 2 bez. 5 kg.

Im Kopf der Tab. 5 und 6 sind Datum, Meßlänge L und deren mittlerer Querschnitt Q angegeben, in den Tabellen selbst neben der Zeit die Temperatur ϑ (Kolumne 2), die Dauerbelastung β (Kolumne 3) abgesehen von dem Gewicht des Stabes selbst und der Schale (0,27 kg), ferner in Kolumne 4 die Anzahl ν der am Doppelfaden vorüber gewanderten Ringe.

Tabelle 5. Blei.

Versuch 1 vom 15. 12. 05. Meßlänge $L = 16,327$ cm; $Q = 2,553$ cm³.

1	2	3	4	5	6	7	8	Bemerkungen
	ϑ ° C.	β kg	ν Ringe	π_1 kg	π_2 kg	π kg	π/ν kg/Ring	
Plattenpaar 2								
1 ^{er} 28 ^m	18,79	2	2	1,450	1,420	1,435	0,7175	
43	,65	"	4	2,980	2,940	2,984	,7210	
55	,58	"	6	4,400	4,300	4,849	,7248	Nachwirkung bemerkt
1	,51	"	8	5,880	5,780	5,880	,7288	"
20	,51	"	10	7,350	7,250	7,900	,7300	störend
Plattenpaar 1								
2 ^{te} 58 ^m	18,66	"	10	(6,430)	(7,130)	(6,795)	(0,6795)	} Unsicher wegen starker Nachwirkung
5	17,92	"	2	1,870	1,420	1,395	,6975	
27	"	"	4	2,690	2,760	2,725	,6812	Nachwirkung bemerkt
38	,91	"	5	3,860	3,440	3,400	,6800	"
41	,89	"	6	4,010	4,070	4,040	,6733	schon sehr störend
50	,88	"	3	2,040	2,100	2,070	,6900	"
Plattenpaar 2								
7 ^{te} 8 ^m	18,14	"	2	1,440	1,420	1,480	0,7150	} Keine Nachwirkung beobachtet
18	"	"	3	2,190	2,140	2,165	,7317	
25	"	"	4	2,920	2,870	2,895	,7288	
34	?	"	6	4,880	4,330	4,355	,7258	

Tabelle 5a.

π_1 kg	$(\pi/\nu)_1$ kg/Ring	$(\pi/\nu)_2$ kg/Ring	δ_1 Ring/kg	δ_2 Ring/kg	δ Ring/kg
1,395	0,697 _s	0,715 _s	1,434	1,397	1,415
2,070	,690 _o	,721 _o	1,449	1,387	1,418
2,725	,681 _z	,722 _z	1,468	1,385	1,426
3,400	,680 _o	,723 _z	1,471	1,382	1,426
4,040	,678 _s	,724 _z	1,485	1,380	1,432
6,795	(,679 _s)	,729 _s	(1,472)	1,371	(1,421)

In Kolumne 5 und 6 stehen die Gewichte π_1 und π_2 , welche eine Verschiebung von ν Streifen links und rechts vom Zentrum bewirkten (vgl. § 12). Diese Gewichte setzen sich aus dem der größeren Schale (1,120 kg) und den darauf gelegten Gewichtsstücken zusammen. Das aus Formel (8) (p. 827) berechnete π gibt die Belastung, welche einer Verschiebung von ν Ringen im Zentrum des Ringsystems entspricht.

Die in Kolumne 8 berechneten π/ν zeigen nun, daß zwischen der an *einem* Plattenpaar beobachteten Verschiebung und der Belastung keine Proportionalität besteht. Entsprechend dem in § 12 angedeuteten Verfahren sind daher bei Versuch 1 (Tab. 5) durch Interpolation aus den beobachteten π/ν am Plattenpaar 2 solche Werte $(\pi/\nu)_2$ abgeleitet, welche den beim Plattenpaar 1 gebrauchten Belastungen π_1 entsprechen. Sie sind in Tab. 5a zusammengestellt mit den zu den π_1 direkt beobachteten $(\pi/\nu)_1$. Ihre Reziproken δ_1 und δ_2 (Kolumne 4 und 5) geben die Ringverschiebungen für 1 kg Belastung, aus denen in jeder Horizontalreihe das Mittel δ gebildet ist. Bei Versuch 2 (Tabb. 6 und 6a p. 834) wurde entsprechend verfahren.

Was nun die *Nachwirkung* betrifft, so trat eine die Beobachtung störende, d. h. mit störender Geschwindigkeit einsetzende Wanderung etwa bei den folgenden Zusatzbelastungen (in Kilogramm) auf:

	β	π_1	π_2
Versuch 1	2	4	7
„ 2	5	(7)	3

Tabelle 6. Blei.

Versuch 2 vom 20. 3. 06. Meßlänge $L = 16,296$ cm; $Q = 2,553$ cm².

1	2	3	4	5	6	7	8	Bemerkungen	
	ϑ °C.	β kg	ν Ringe	π_1 kg	π_2 kg	π kg	π/ν kg/Ring		
Plattenpaar 2									
1 ^a 9 ^m	16,44	5	2	1,385	1,395	1,990	0,6950	Nachwirkung nur bei längerer Belastungsdauer merkbar	
32	,38	"	3	2,075	2,070	2,072	,6907		
48	,38	"	4	2,745	2,755	2,750	,6875		Nachwirkung innerhalb der ersten Sekunden deutlich
50	,37	"	5	3,435	3,445	3,440	,6880		
Plattenpaar 1									
2 ^b 51 ^m	16,52	"	2	1,465	1,440	1,452	0,7280	Nachwirkung noch sehr schwach	
3	,47	"	4	2,900	2,860	2,880	,7200		
10	,45	"	3	2,185	2,155	2,170	,7232	Nachwirkung erst nach einigen Sekunden merkbar	
18	,43	"	5	3,605	3,575	3,590	,7180		
—	—	—	—	7,520	—	—	—	Starke Nachwirkung!	

Tabelle 6a.

π_3 kg	(π/ν) kg/Ring	(π/ν) kg/Ring	δ_1 Ring/kg	δ_2 Ring/kg	δ Ring/kg
1,890	0,7262	0,6950	1,377	1,439	1,408
2,072	,7287	,6907	,382	,448	,415
2,750	,7206	,6875	,388	,455	,421
3,440	,7184	,6880	,392	,453	,422

Die auffallende Erscheinung, daß die elastische Nachwirkung am einen Plattenpaar bereits störend auftritt, während sie am anderen noch kaum merkbar ist, weiß ich nicht sicher zu erklären. Sie zeigte sich auch bei den anderen oben genannten Metallen.

Da die Anfangsgeschwindigkeit der Nachwirkung mit der Größe der Deformation *sehr schnell* anwächst, so werden die kleineren Dehnungen prozentisch genauer beobachtet, als die größeren.¹⁾ Je größer die Dehnung ist, um so eher kann sie durch den Einfluß der Nachwirkung zu groß beobachtet sein. Deshalb kann auch aus dem Anstieg der δ -Werte mit zunehmender Belastung (Tabb. 5a und 6a) noch nicht mit Sicherheit geschlossen werden, daß für die von Nachwirkung befreite „vollkommen elastische“ Dehnung die Proportionalität mit der Spannung aufgehört hat. Fassen wir zur Berechnung des Elastizitätsmoduls nur die δ -Werte zusammen, bei denen elastische Nachwirkung noch nicht gestört haben kann, also in Tabb. 5a und 6a je die beiden obersten, so erhalten wir

Blei $Q = 2,553 \text{ cm}^3$	δ Ring/kg	L cm	$\varepsilon \times 10^6$ 1/kg
Versuch 1	1,416s	16,327	2,368
„ 2	1,411s	16,296	2,364

Mittel: 2,366

woraus folgt

$$E = \frac{1}{\varepsilon Q} = 1656 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} (17,3 \%).$$

§ 16. Zusammenstellung der Versuchsergebnisse.

Für die übrigen Stäbe genügt es, die Resultate (Tab. 7) anzugeben. Es bedeutet Q den mittleren Querschnitt der Meßlänge L , δ die für 1 kg Belastung beobachtete Verschiebung in Ringen ($= 273 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$), ϑ die mittlere Temperatur während des Versuches, ε die Längsdilatation für 1 kg Belastung, E den Elastizitätsmodul in kg/mm^2 .

1) Im Gegensatz hierzu nimmt J. O. Thompson Proportionalität der Nachwirkung mit der Größe der Dehnung an. Wied. Ann. 44. p. 561. 1891.

Tabelle 7.

	Q cm ²	L cm	δ 273 · 10 ⁻⁷ cm	ϑ C. °	$s \cdot 10^6$ 1/kg	E kg mm ²
Aluminium .	1,1437	16,302 ,328	0,728 ₄ 0,724 ₅	17,6 17,6	1,219 ₈ 1,211 ₈	1,215 ₈ } 719 ₀
Kupfer IV a	1,123 ₄	,249 ,301	0,423 ₅ 0,425 ₈	16,4 16,1	0,711 ₆ 0,713 ₁	0,712 ₈ } 1250 ₀
Silber . . .	0,966 ₆	,285	0,767	16,9	1,286	805 ₀
Gold I . . .	1,146	,333 ,322	0,671 ₈ 0,669 ₂	16,8 16,2	1,122 ₆ 1,119 ₂	1,121 ₀ } 778 ₀
Gold II . . .	1,047	,316	0,703	16,5	1,176	812 ₀
Nickel . . .	2,022	,319	0,1489	17,4	0,2407	2054 ₀
Zink I . . .	1,121	,282	0,634	18,0	1,063	839 ₀
Zink II . . .	2,55 ₉	,338 ,285	0,1792 0,1771	17,7 17,6	0,2995 0,2989	0,2982 } 1310 ₀
Kadmium . .	2,541	,282 ,331	0,460 0,463	16,9 16,9	0,771 ₈ 0,774 ₀	0,772 ₆ } 509 ₀
Blei	2,553	,327 ,296	1,416 1,411	18,2 16,5	2,368 2,364	2,366 } 165 ₀
Zinn	2,552	,296	0,422	16,9	0,707 ₀	554 ₀
Platin II . .	2,051	,322	0,1701	18,7	0,284 ₅	0,2857 } 1708 ₀
	2,048	,293	0,1712	17,4	0,286 ₈	
Palladium . .	2,084	,298	0,2557	15,1	0,428 ₈	1148 ₀
Rhodium . . .	2,030	,362	0,1063	17,8	0,1774	277 ₀
	2,026	,360	0,1048	16,9	0,1749	282 ₀
		,306	0,0479	16,7	0,0802	0,0804 } 525 ₀
Iridium . . .	2,369	,328	0,0484	16,7	809	
		,376	0,0481	16,0	802	
		,272	0,0479	17,0	804	
Eisen I . . .	1,829	,380	0,2082	18,4	0,3471	2168 ₀
		,354	0,1893	16,4	0,2325	0,2318 } 2142 ₀
Eisen II . . .	2,014	,305	0,1882	18,0	0,2314	
		,336	0,1886	17,0	0,2316	
Eisen III . . .	2,551	,337	0,1079	17,9	0,1803	2174 ₀
Stahl	1,999	,338	0,1404	16,8	0,2347	2132 ₀
Gußeisen A6	3,150	,315	0,1428	16,4	0,2339	1829 ₀
„ GK3	3,173	,425	0,1798	17,3	0,2988	1054 ₀
Wismut . . .	2,535	,328	0,725	16,8	1,212	325 ₀
Rotguß . . .	1,697	,369	0,428 ₈	18,2	0,714 ₈	0,714 ₈ } 824 ₀
	1,699	,265	0,425 ₆	16,4	0,714 ₈	
Konstantan .	3,182	,345	0,1152	18,4	0,1924	1659 ₀
Manganin . .	2,560	,322 ,289	0,1848 0,1844	18,3 17,7	0,3091 0,3091	0,3091 } 1264 ₀

Bei Platin II, Rhodium und Rotguß sind für den Querschnitt zwei etwas verschiedene Zahlen angegeben. Diese Stäbe zeigen nämlich solche Ungleichmäßigkeiten im Querschnitt, daß dessen Mittelwert für die beiden Meßlängen, die um 2 cm gegeneinander verschoben waren, bereits merkbare Unterschiede gab. Bei Rhodium ist für jede der beiden Meßlängen auch der Elastizitätsmodul einzeln berechnet, da sich eine Differenz ergibt, die sich kaum durch Versuchsfehler erklären läßt. Es mag sein, daß sich hier der Einfluß von unregelmäßig verteilten Poren oder Rissen zeigt, deren Existenz im Rhodiumstabe wahrscheinlich ist (vgl. § 17). Für Kadmium, Blei, Zinn und Wismut sind wegen der elastischen Nachwirkung nur die Versuche bei kleinsten Belastungen benutzt (§ 15).

4. Besprechung des Zahlenmaterials.

§ 17. Vergleich der drei Methoden mit Rücksicht auf die Homogenität der Stäbe.

In Tab. 8 sind die nach den drei Methoden gefundenen Elastizitätsmoduln $E_{transv.}$, $E_{long.}$ und $E_{stat.}$ zusammengestellt. Die Unterschiede der $E_{stat.}$ und $E_{long.}$ sind kleiner als die möglichen Fehler des Versuchs und der Rohrweitenkorrektion (§ 7), man kann daher sagen, daß die Dehnungsversuche und die Longitudinalschwingungen zum gleichen Elastizitätsmodul führen. Weniger gut ist die Übereinstimmung zwischen der statischen und Transversalschwingungsmethode. Zwar ist sie bei den *gezogenen* Stäben im großen und ganzen so gut, als man es nur erwarten kann. Größere Abweichungen bis zu $1\frac{1}{2}$ Proz., für die ich besondere Gründe nicht anzugeben vermag, zeigen nur Gold II, Konstantan und Manganin. Dagegen sind die Abweichungen bei den *gegossenen* Stäben zum Teil sehr viel größer und überschreiten die möglichen Versuchsfehler (vgl. § 4).

Soweit die Stäbe schon äußerlich Poren zeigen, wie Zink II, Kadmium, Blei, Zinn, Wismut, wird man von vornherein darauf verzichten müssen, nach irgend einer der drei Methoden den wahren Elastizitätsmodul des Materials zu finden. Die Dehnungsversuche werden ihn sicher zu klein geben, da ja der wirksame Querschnitt geringer ist, als er aus der Messung des

Tabelle 8.

Geogene Stäbe	Chemische Zusammensetzung	$E_{\text{transv.}}$ kg/mm ²	$E_{\text{long.}}$ kg/mm ²	$E_{\text{stat.}}$ kg/mm ²	E von gegossenen Platten, nach Voigt	E Mittel nach Kohlransch
Aluminium .	99 Al; 0,5 Fe; 0,4 Cu	7130		7190 ($\epsilon = 2,71$)*	6570 ** ($\epsilon = 2,676$)*	6500
Kupfer IV a	rein	12530		12500 (8,96)	10850 ** (8,86)	12000
Silber . . .	999,8 fein	8070		8050 (10,65)	7790 (10,49)	7300
Gold I . . .	99,8 Au; 0,1 Fe; 0,1 Cu; Spur Ag	7830		7780 (19,22)		
Gold II . . .	rein	8010		8130 (19,21)	7580 (19,28)	8000
Nickel . . .	97,0 Ni; 1,4 Co; 0,4 Fe; 1,0 Mn; 0,1 Cu; 0,1 Si	20380		20540 (8,81)	20300 (8,785)	20000
Eisen I . . .	0,1 C; Metalle nicht bestimmt	21540		21680 (7,84)		19000
” II	99,5 Fe; 0,1 C; 0,2 Si; 0,1 Mn; (P, S, Cu)	21480		21430 (7,86)		
” III	Schmiedeeisen	21760		21740 (7,86)		
Stahl	1,0 C; Metalle nicht bestimmt	21260		21830 (7,82)		21000
Konstantan .	60 Cu; 40 Ni	16360	16580	16590 (8,92)	20400 (7,826)	
Manganin .	84 Cu; 4 Ni; 12 Mn	12500	12600	12640 (8,44)		

Gegossene Stäbe					Gegossene Platten
Zink I . . .	98,6 Zn; 1,1 Pb; 0,08 Cd; 0,25 Cu; 0,03 Fe . .	8910			8300 (7,17)
" II . . .	rein; [0,01 Pb; 0,01 Cd; 0,01 Fe]	12870			10900 ** (7,212)
Kadmium . .	rein; [Pb; Zn; Fe] < 0,05	5240			7070 (8,66)
Zinn	rein; [Pb] < 0,03	5690			5410 (7,828)
Blei	rein; [Cu; Bi; Fe; Ni] < 0,05	1780			1650 (11,92)
Wismut . . .	rein; [Pb; Fe] < 0,03	8300			3190 (10,06)
Rhodium . .	rein	82500			28000 (12,28)
Palladium . .	rein	11700	11470		11400 (11,98)
Platin II . .	rein	17170	17020		17000 (21,88)
Iridium . . .	rein	52900			52500 (22,49)
Gußeisen A6	2,7 Graphit; 0,8 geb. C; 0,5 Mn; 1,2 Si; 0,3 P; und 0,2 Cu, Ni, Co, S.	13400			13200 (7,22)
" GK3	3,0 Graphit; 0,5 geb. C; 0,7 Mn; 1,7 Si; 0,5 P; und 0,2 Cu, Ni, Co, S.	10510			10540 (7,11)
Rotguss . . .	85,7 Cu; 7,15 Zn; 6,39 Sn; 0,58 Ni	8410	8240		8240 (8,40)

* Die kleinen geklammerten Zahlen bedeuten die Dichten.

** Unreines Material.

Durchmessers hervorgeht. Bei den akustischen Methoden kommt es darauf an, wie die Poren im Stabe verteilt sind.

Ist die Verteilung längs des Stabes gleichmäßig und symmetrisch zur Stabachse, herrscht also in koaxialen Zylinderschichten gleiche Porosität, so ergibt die Methode der Longitudinalschwingungen den richtigen Wert von E , insofern die Poren nur einer gleichmäßigen Verringerung des Querschnittes gleich kommen, die Methode der Transversalschwingungen kann zu große oder zu kleine Werte liefern, je nachdem die Poren in den inneren oder äußeren Schichten des Stabes sich häufen. Denn die Schwingungszahl des transversal schwingenden Stabes hängt von dem Verhältnis ab, in dem das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf den auf der Schwingungsebene senkrechten Durchmesser, zum Querschnitt selbst steht, und dies Verhältnis ist größer, wenn die Poren im Innern liegen.¹⁾

Ist die Verteilung der Poren längs des Stabes ungleichmäßig, so können die Longitudinal-, wie die Transversalschwingungen zu große oder zu kleine Werte E liefern. Bezüglich der Longitudinalschwingungen geht der Einfluß der Poren parallel dem (in § 6 besprochenen) Einfluß variablen Querschnittes, bezüglich der Transversalschwingungen nur dann, wenn die Poren an der Oberfläche des Stabes liegen.

Man kann die Homogenität längs des Stabes dadurch prüfen, daß man den elektrischen Widerstand einzelner Stababschnitte vergleicht. Die Herren Jaeger u. Diesselhorst²⁾ haben diese Messung an verschiedenen Stäben ausgeführt. Dabei haben sich nur für Zinn bedeutende Unregelmäßigkeiten ergeben, während die äußerlich Poren zeigenden Metalle Blei, Zink II, Kadmium, Wismut elektrisch ziemlich homogen waren. Das beweist aber noch nichts über die Homogenität im Querschnitt, auf die es hier ebenfalls ankommt.

Abgesehen von Poren und Rissen sind auch Inhomogenitäten denkbar, die aus einer den Stab nach Art der bekannten

1) Infolge einer zylindrischen Bohrung, die mit dem Stabe koaxial dessen ganze Länge durchlief, würde der Elastizitätsmodul eines sonst homogenen Stabes für Transversalschwingungsvorgänge im gleichen Verhältnis zu groß erscheinen, wie er nach den Dehnungsversuchen zu klein erscheint, d. h. im Verhältnis der Querschnittsverringerung.

2) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, l. c. p. 350.

Gußhaut umhüllenden Schicht bestehen, welche andere elastische Eigenschaften besitzt, als das Innere des Stabes. Hr. Bach¹⁾ stellte durch Dehnungsversuche fest, daß der Elastizitätsmodul eines Gußeisenstabes kleiner wurde, als man die Gußhaut durch Abdrehen entfernt hatte. Es ist sicher anzunehmen, daß hier anfangs die Transversalschwingungsmethode einen größeren Wert für E ergeben hätte als die Dehnungsversuche. Denn es läßt sich leicht berechnen, daß durch eine dünne Oberflächenschicht größeren Elastizitätsmoduls der aus Transversalschwingungen berechnete Modul gegen den wahren für das Innere geltenden Wert doppelt so stark vergrößert erscheint, wie der aus Longitudinalschwingungen oder Dehnungsversuchen berechnete. Die beiden letztgenannten Methoden würden hier jedoch den gleichen Wert geben, falls nicht zugleich Dichteänderungen in der Oberfläche eingetreten sind.

Man sieht, wie außerordentlich verwickelt und quantitativ kaum abschätzbar der Einfluß von Inhomogenitäten auf die Bestimmung des Elastizitätsmoduls ist. Man kann eigentlich nur mit Wertheim²⁾ sagen, daß die Übereinstimmung der verschiedenen Methoden ein Kriterium für die Homogenität des Materials bildet.

Was nun die Zahlen der Tab. 8 betrifft, so zeigt sich bei den gegossenen Stäben fast immer $E_{transv.} > E_{stat.}$, woraus man also auf eine Häufung von Poren im Innern oder das Vorhandensein einer äußeren Schicht von größerem Elastizitätsmodul schließen könnte. Ob solche Ursachen auch bei den Stäben aus Rotguß, Platin II, Palladium, Gußeisen A6 zutreffen, oder ob hier wegen der Schwebungen des Grundtones (vgl. § 4) und wegen des ungleichmäßigen Querschnittes größere Versuchsfehler bei der Transversalschwingungsmethode vorliegen, möchte ich dahingestellt sein lassen. Beim Rhodium kann man wohl nicht umhin, Poren oder Risse im stark kristallinen Material anzunehmen. Nach Aussage der Firma Heraeus, die den Stab gegossen hat, ist es kaum möglich, Poren beim Guß auszuschließen, weil beim Erstarren absor-

1) C. Bach, *Mittel. über Forsch.-Arb.* Heft 1. p. 22. 1901; auch *Elastizität und Festigkeit* 4. Aufl. § 22 Schluß. 1902.

2) G. Wertheim, *Pogg. Ann. Ergbd.* 2. p. 22. 1848.

biertes Gas frei wird. Endlich kann auch angeführt werden, daß die Dichte des Stabes (12,23) kleiner ist, als sie an „reinem“, sicherlich porenfreiem Rhodiumblech gefunden wurde (= 12,44).¹⁾

Eine auffallende Ausnahme hinsichtlich der Abweichungsrichtung des $E_{\text{transv.}}$ vom $E_{\text{stat.}}$ bildet der Stab Zink II, doch ist gerade dieser an der äußeren Oberfläche stark löcherig. Wäre er im Innern dichter, so wäre die Abweichungsrichtung erklärt.

§ 18. Unterschied zwischen isothermem und adiabatischem Elastizitätsmodul.

Daß aus den statischen und akustischen Messungen kein Unterschied zwischen isothermem und adiabatischem Elastizitätsmodul zutage tritt, hat zwei Gründe. Einmal findet die Beobachtung der Dehnung so bald nach eingetretener Deformation statt, daß bis dahin nur ein kleiner Teil der mit der Deformation verbundenen Temperaturänderung des Stabes zurückgegangen ist. Das zeigten einige Dehnungsversuche am Kupfer, bei denen die Stabtemperatur mittels Thermoelements verfolgt wurde. *Die statische Methode liefert also auch nahezu den adiabatischen Modul.* Zweitens aber beträgt der ganze Unterschied zwischen isothermem und adiabatischem Modul in der Regel nur wenige Promille, wie aus folgender Zusammenstellung ersichtlich ist.

Bezeichnen die Indizes i und a isotherm bez. adiabatisch, so ist nach den Gleichungen der Thermodynamik²⁾ die Temperaturänderung bei einer *adiabatischen* Dilatation ϵ_a des Stabes

$$dT = -\epsilon_a T \frac{\alpha E_a}{s c_p},$$

wo T die absolute Temperatur, α den linearen Ausdehnungskoeffizienten, s die Dichte, c_p die spezifische Wärme des Stabes bei konstantem Druck, gemessen in Erg, bezeichnet. Bei isothermer Dilatation wird der Stab sich stärker dehnen, und zwar im Verhältnis

$$\epsilon_i = \epsilon_a - \alpha dT = \epsilon_a \left(1 + \alpha T \frac{\alpha E_a}{s c_p} \right).$$

1) L. Holborn, L. Austin u. F. Henning, *Wissensch. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt* 4, p. 87. 1903.

2) Vgl. R. Clausius, *Mech. Wärmetheorie* 2. Aufl. 1. p. 200. 1876.

Das Verhältniß der isothermen zur adiabatischen Dilatation, bez. das Verhältniß des adiabatischen zum isothermen Elastizitätsmodul ist daher

$$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} = \frac{E_a}{E_i} = 1 + \alpha^2 T \frac{E_a}{s c_p}$$

In Tab. 9, Kolumne 6 ist die für die Temperaturänderung maßgebende Größe $\alpha E_a / s c_p$ berechnet, wobei für α meist die Zahlen aus Kohlrauschs Lehrbuch entnommen sind, da α die einzige nicht an den Stäben selbst bestimmte Konstante ist. Für c_p und s sind die Jaeger-Dieselhorstschen Zahlen, für E_a die $E_{stat.}$ aus Tab. 8 in [C.G.S.] eingesetzt. Kol. 7 gibt das Verhältniß der Elastizitätsmoduln, welches so nahe gleich der Einheit ist, daß der Unterschied zwischen adiabatischer und isothermer Dehnung bei den meisten Metallen sich nur schwer feststellen läßt.¹⁾ Zink und Kadmium, die den größten Unterschied zeigen, eignen sich aus anderen Gründen nicht zu exakten Messungen.

Tabelle 9.

1	2	3	4	5	6	7
	$\alpha \cdot 10^6$	$E \cdot 10^{-11}$	$c_p \cdot 10^{-7}$	s	$\left(\frac{\alpha E_a}{c_p s}\right)_{18^\circ}$	$\frac{E_a}{E_i}$
Al	24	7,0	0,90	2,7	0,69	1,0048
Cu	16,1	12,2	,38	9,0	0,57	0,97
Ag	18,4	7,9	,23	10,5	0,60	0,92
Au II	13,8	8,0	,13	19,2	0,44	0,18
Ni	12,4	20,1	,45	8,8	0,63	0,23
Fe	11	21,1	,45	7,8	0,66	0,21
Zn II	28,6	12,8	,38	7,1	1,36	1,13
Cd	28,6	5,0	,23	8,6	0,72	0,60
Pb	27,5	1,6	,13	11,3	0,30	0,24
Sn	21,3	5,4	,22	7,3	0,72	0,44
Bi	12,8	3,2	,12	9,8	0,34	0,13
Pt	8,9	16,7	,13	21,4	0,53	0,14
Pd	11,7	11,3	,24	12,0	0,46	0,16
Rh	8,3	29,4*	,26	12,2	0,77	0,19
Ir	6,5	51,5	,13	22,5	1,14	0,22

* Mittel aus $E_{stat.}$ und $E_{transv.}$

1) Wertheim glaubte aus seinen Versuchen einen Unterschied nachweisen zu können, l. c. p. 62. Vgl. auch J. O. Thompson, l. c. p. 559.

Es sei hier noch daran erinnert, daß das Verhältnis des adiabatischen zum isothermen *Volumelastizitätsmodul* ($H_a : H_i$), bez. das der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und Volumen ($c_p : c_v$), nicht gleich dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln ist, sondern mit diesem zusammenhängt durch die Gleichung

$$\frac{c_p}{c_v} - 1 = \frac{H_a}{H_i} - 1 = \frac{3}{1 - 2\mu_a} \left(\frac{E_a}{E_i} - 1 \right),$$

wo μ_a das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation bei adiabatischer Dehnung ist. Nehmen wir hierfür etwa 0,25 als Mittelwert an, so wird $c_p/c_v - 1$ etwa 6mal größer sein, als der Überschuß über 1 in der 7. Kolumne von Tab. 9.¹⁾

§ 19. Änderung des Elastizitätsmoduls mit der Spannung.

Bei allen drei Methoden gilt der gefundene Elastizitätsmodul für sehr schwache Deformationen, z. B. ist bei den Dehnungsversuchen die maximale Längsdilatation, entsprechend der größten vorgenommenen Belastung von etwa 25 kg, gegeben durch 25 ϵ (Tab. 7).²⁾ Für eine Reihe von Metallen, wie Gußeisen, Messing, Silber, Kupfer, Stahl, ist nachgewiesen³⁾, daß der Elastizitätsmodul mit wachsender Spannung oder Deformation abnimmt, was natürlich beim Vergleich verschiedener Methoden zu beachten ist. Zur Orientierung über die Größe dieser Veränderlichkeit mit der Spannung seien hier einige Formeln angeführt, die den Elastizitätsmodul $E = d\sigma/d\epsilon$ ($\sigma =$ Spannung in kg/mm^2 , $\epsilon =$ Längsdilatation) als lineare Funktion der Spannung darstellen, also in der Form

$$(9) \quad E = E_0 - c\sigma.$$

1) Vgl. F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 712. 1893.

2) Über eine Schätzung der Deformationsgröße bei den Transversalschwingungen vgl. E. Grüneisen, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. 4. p. 469. 1906.

3) A. Miller, Bayr. Sitzungsber. 1. p. 9. 1885; Abhandl. d. bayr. Akad. 15. p. 707. 1886 und 16. p. 571. 1888; C. Bach, Elast. u. Festigkeit, 4. Aufl. 1902, Einleitung, wo auf die ältere Literatur hingewiesen ist; J. O. Thompson, Wied. Ann. 44. p. 555. 1891.

So gilt z. B. für zwei Gußeisenstäbe¹⁾, die aus dem gleichen Guß stammen, wie die in Tab. 8,

$$G K 3: E = 10608 - 923 \sigma,$$

$$A 1^2): E = 14019 - 505 \sigma.$$

Weiter ergibt sich für ein von Hrn. Bach untersuchtes³⁾

$$\text{weiches Kupfer, Zug: } E = 11732 - 184,7 \sigma.$$

Aus J. O. Thompsons⁴⁾ Messungen folgt

$$\text{Messingdraht: } E = 10576 - 29,829 \sigma,$$

$$\text{Kupferdraht: } E = 12920 - 23,665 \sigma,$$

$$\text{Silberdraht: } E = 8462 - 9,786 \sigma,$$

$$\text{Stahldraht: } E = 19975 - 17,730 \sigma.$$

Die von Thompson nach einer kubischen Formel mit *drei* Konstanten, die natürlich die Versuche etwas besser wiedergibt, extrapolierten E_0 sind der Reihe nach 10370, 12890, 8490, 20050. Die Unterschiede sind in Anbetracht der z. T. weiten Extrapolation gering, bez. praktisch von geringer Bedeutung.

§ 20. Einfluß der mechanischen und thermischen Behandlung, sowie der Zusammensetzung des Materials.

Die in den Abschnitten 17 und 19 besprochenen Punkte sind zu beachten, wenn man die Ergebnisse verschiedener Beobachter vergleichen will. Denn es zeigt sich, wie schon für dieselbe Materialprobe unter Umständen recht verschiedene Elastizitätsmoduln gefunden werden können, je nach der angewandten Methode und Deformationsgröße. Sofern aber den Untersuchungen auch verschiedenes Material zugrunde liegt, kommt noch der Einfluß mechanischer oder thermischer Behandlung, sowie der der chemischen Zusammensetzung in Betracht.

1) C. Bach, *Mitteil. üb. Forsch.-Arb.* Heft 9. p. 70. 1903; E. Grüneisen, *Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch.* 4. p. 469. 1906.

2) $A 1$ ist aus gleichem Guß wie $A 6$ in Tab. 8. Über die Abweichung der Konstante 14019 von dem in Tab. 8 gefundenen Werte 13300 vgl. die in der vorigen Anmerkung zitierte Stelle.

3) C. Bach, *Elast. u. Fest.* 4. Aufl. p. 56. 1902. (Rundstab II.)

4) l. c.

Nur hinsichtlich des letzteren liefert die vorliegende Untersuchung einen Beitrag, da vorläufig tiefgreifende Änderungen der Metallstäbe durch thermische oder mechanische Behandlung vermieden werden sollten.¹⁾ Es wird jedoch für die richtige Beurteilung des Zahlenmaterials nötig sein, zunächst an einige wichtige Ergebnisse anderer Beobachter zu erinnern, die sich gerade auf den Einfluß solcher Behandlung beziehen.

Vor allem erscheint als feststehend ²⁾, daß Änderungen der Dichte mit solchen des Elastizitätsmoduls verbunden sind. Jede Behandlungsweise, die eine Auflockerung des Materials zur Folge hat, verringert den Elastizitätsmodul, und umgekehrt. Bleibt dagegen trotz verschiedenartigster Behandlung die Dichte unverändert, so ist das häufig auch mit dem Elastizitätsmodul der Fall.³⁾

Es kommen jedoch auch Veränderungen des Elastizitätsmoduls vor, ohne daß erhebliche Dichteänderungen nachweisbar sind.⁴⁾ Sie werden hervorgebracht durch übermäßige Beanspruchung des Materials auf Zug oder Druck. Sie sind verhältnismäßig gering, aber dadurch von erhöhtem Interesse, daß sie langdauernde Nachwirkungen zeigen können, die im allgemeinen mit einer Erhöhung des Elastizitätsmoduls über seinen ursprünglichen Wert endigen. Bei Schweißisen, Flußisen, Bessemerstahl, Aluminium rechnet die Zeit bis zur Erreichung des Endzustandes nach Tagen oder Monaten, kann aber durch mäßiges Erwärmen (bis 100°) abgekürzt werden, bei Kupfer und Rotguß ist sie sehr klein. Ausglühen scheint das Material wieder dem ursprünglichen Zustande zu nähern.

Das gewöhnliche Ziehen des Materials wird nach dem Vorigen eine kleine Erhöhung des Elastizitätsmoduls zur Folge

1) Die Stäbe sind seit den Untersuchungen von W. Jaeger und H. Diessehorst unverändert geblieben.

2) G. Wertheim, l. c. p. 69; J. O. Thompson, l. c. p. 573; G. Angenheister, Ann. d. Phys. 11. p. 188. 1903.

3) z. B. bei Stahl. Vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 48. p. 702. 1893.

4) J. Bauschinger, Der Zivilingenieur. 25. p. 80. 1879; 27. p. 289. 1881; Mitt. aus dem Mech.-Techn. Laborat. München. Heft 13. 1886; J. A. Ewing, Proc. Roy. Soc. 58. p. 123. 1895; J. Muir, Phil. Trans. Roy. Soc. 193. p. 1. 1900; A. Morley u. G. A. Tomlinson, Phil. Mag.

(6) 11. p. 380. 1906; G. Angenheister, l. c.

haben, um so mehr, wenn die Dichte zunimmt. Zeitliche Änderungen des Moduls unmittelbar nach dem Ziehen sind wohl nicht beobachtet, aber durchaus nicht unwahrscheinlich.¹⁾

Bedeutsamer erscheint der Einfluß mechanischer und thermischer Behandlung auf die „Proportionalitätsgrenze“, d. h. auf die Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls mit der Spannung (§ 19). Nach den Versuchen von Bauschinger, Ewing etc. ist anzunehmen, daß mit der Vergrößerung von E_0 (vgl. Formel 9, § 19) eine Verkleinerung von c Hand in Hand geht. Als Beispiel hierfür können die in § 19 gegebenen Formeln für weiches Kupfer (Bach) und Kupferdraht (Thompson) gelten.

Der Einfluß der chemischen Zusammensetzung des Materials ist unter der Fragestellung zu betrachten: Gilt für die elastischen Eigenschaften die Mischungsregel? Hierauf lautet nach den bisherigen Untersuchungen die Antwort, daß zwar Fälle vorkommen, in denen die Mischungsregel ziemlich gut stimmt, daß aber andererseits deutliche Ausnahmen bekannt sind. Wertheim²⁾ fand die Mischungsregel für den Elastizitätsmodul mit Ausnahme einiger Legierungen von Zink und Kupfer bestätigt, doch darf man wohl seinem Zahlenmaterial nicht allzuviel Vertrauen schenken, denn die nach den verschiedenen Methoden gefundenen Moduln stimmen im allgemeinen sehr schlecht überein. Nach Angenheister³⁾ hat man besonders für den Volumelastizitätsmodul und das Verhältnis μ von Querkontraktion zu Längsdilatation Abweichungen von der Mischungsregel zu erwarten, doch zeigt sich für die von ihm untersuchten Silber-Kupfer-Legierungen auch hinsichtlich des Moduls E eine auffallende Abweichung. Obwohl nämlich Kupfer einen größeren Modul besitzt als Silber, wird durch den ersten Kupferzusatz (0,01 Äq.-Gew.) der Modul des Silbers um etwa 4 Proz. herabgedrückt. Bei größerem Kupfergehalt jedoch übersteigen die Abweichungen von der Mischungsregel nicht einige Prozent.

Man könnte zweifelhaft sein, ob dieses erste Sinken des

1) Für ausgeglühte Drähte findet Cl. Schaefer merkwürdig niedrige E -Werte (Ann. d. Phys. 5. p. 220. 1901).

2) G. Wertheim, l. c. p. 98.

3) G. Angenheister, l. c.

Modul wirklich dem Kupferzusatz zuzuschreiben ist. Das möchte ich doch annehmen, denn auch die Zahlen von Tab. 8 deuten auf dergleichen Anomalien hin. So wird der Elastizitätsmodul reinen *Goldes* schon durch 2 Promille Fremdkörper um 3 Proz. herabgedrückt. Am empfindlichsten scheint in dieser Beziehung aber *Zink* zu sein. Für das reine Zink II ist hier ein Modul beobachtet, der wegen der Porosität des Materials jedenfalls noch zu klein ist, dennoch aber alle bisher für Zink beobachteten Zahlen weit übertrifft. Der Grund ist sicherlich wohl darin zu suchen, daß die Beimengungen, die das Zink erst zu dichtem Guß brauchbar machen und deshalb von den anderen Beobachtern mit in den Kauf genommen wurden, den Modul außerordentlich herabdrücken, wie z. B. auch beim Stabe Zink I.

In Legierungen wirkt Zink erniedrigend auf den Elastizitätsmodul. Für *Messing* mit 60 Proz. Cu, 40 Proz. Zn findet Hr. Voigt $E = 9220$, während nach der Mischungsregel ein Wert zwischen $12\text{—}13000\text{ kg/mm}^2$ folgen würde. Für den *Rotgußstab*, der neben 85,7 Proz. Cu nur 7,15 Proz. Zn, 6,39 Proz. Sn und 0,58 Proz. Ni enthält, würde nach der Mischungsregel etwa $E = 12000$ zu erwarten sein, während beobachtet wurde 8300 kg/mm^2 (Tab. 8). Sind dagegen nur Kupfer, Zinn und Nickel ohne Zink legiert, so gilt die Mischungsregel annähernd, so bei der *Bronze* von Voigt, die mit 88 Proz. Cu und 12 Proz. Sn etwa $E = 11700$ erwarten läßt, während 10600 kg/mm^2 beobachtet wurde, und beim *Konstantan*, das mit 60 Proz. Cu und 40 Proz. Ni nach der Mischungsregel etwa $E = 15700$, in den Versuchen 16500 kg/mm^2 gibt.¹⁾

Bekanntlich treten auch bei den Nickelstählen Anomalien hinsichtlich der Mischungsregel auf. Guillaume²⁾ hat den Verlauf des Elastizitätsmoduls der *Nickelstähle* mit steigendem

1) Die von Hrn. F. A. Schulze (l. c.) ausgesprochene Vermutung, daß die Anomalie der Elastizitätsverhältnisse von Legierungen parallel gehe derjenigen des elektrischen und thermischen Leitvermögens, scheint also durch die vorliegenden Versuche nicht gestützt zu werden, da für *Konstantan*, die bekannte Legierung mit maximalem Leitungswiderstand, keine Anomalie eintritt. Doch kann die Frage nach Angenheister erst entschieden werden, wenn der Volumelastizitätsmodul bestimmt ist.

2) Ch.-Éd. Guillaume, Compt. rend. 124. p. 753. 1897.

Nickelgehalt untersucht, wobei sich zeigt, daß die „Invar“ genannte Legierung von 36 Proz. Ni mit $E = 14700 \text{ kg/mm}^2$ ein Minimum des Elastizitätsmoduls erreicht, nachdem bei 22 Proz. Ni sich ein schwaches Maximum (19700) ausgebildet hat. Man bringt wohl mit Recht diese Änderungen der elastischen Eigenschaften ebenso wie der thermischen mit der Verwandlung der verschiedenen Modifikationen des Eisens (α - und γ -Eisen) in Zusammenhang. Insofern ist die Ausnahmestellung dieser Legierungen von vornherein wahrscheinlich.

Eins der auffallendsten Beispiele für den Einfluß von Fremdkörpern im Material bildet das gewöhnliche *Gußeisen*. *Graues* Gußeisen, aus dem die Stäbe *A 6* und *G K 3* bestehen, enthält die Kohle zumeist in Form von Graphit¹⁾, also *freiem* Kohlenstoff, Eisen und Stahl enthalten die Kohle *gebunden* im Cementit (Fe_3C), Perlit (eutektisches Gemenge von Ferrit und Cementit) und Martensit (feste Lösung von C in Eisen). Man kann auch durch schnelles Abkühlen geschmolzenen Gußeisens die Ausscheidung von Graphit hindern und erhält dann *weißes* Gußeisen mit *gebundenem* Kohlenstoff. Zusätze von C, Si etc., wie sie im Stahl vorkommen, d. h. etwa bis $1\frac{1}{2}$ Proz., ändern den Elastizitätsmodul wenig. Auch für Hartguß, d. h. beim Guß schnell gekühltes, daher graphitarmes weißes Eisen, fand Hr. Bach²⁾ einen gegen reines Eisen verhältnismäßig wenig erniedrigten Modul, etwa 18000 kg/mm^2 , während gewöhnliches, langsam gekühltes graues Eisen aus derselben Pfanne 13000 kg/mm^2 gab. Daraus geht hervor, daß *der Einfluß gebundenen Kohlenstoffs auf den Elastizitätsmodul des Eisens verhältnismäßig gering ist, daß aber die Anwesenheit von freiem Kohlenstoff ihn stark herunterdrückt*. Die Ausscheidung des Graphits ist mit einer bedeutenden Auflockerung des Materials verbunden, die Dichte sinkt von etwa 7,6—7,7 (weißes Eisen) auf 7,1—7,2 (graues Eisen).

§ 21. Vergleich mit bisher bekannten Zahlen.

Aus den vorigen Abschnitten geht hervor, wie wenig vergleichbar die Zahlen verschiedener Beobachter sind, wenn

1) Vgl. die Analysen Tab. 8.

2) C. Bach, Mitt. üb. Forsch.-Arb. Heft 1. p. 1. 1901.

nicht Methode und Deformationsgröße, Zusammensetzung und Vorgeschichte des Materials in Betracht gezogen werden. Selbst wenn eine Erörterung aller dieser Punkte für das bisher vorliegende Zahlenmaterial möglich wäre, würde sie hier zu weit führen. Deshalb habe ich mich darauf beschränkt, in Tab. 8 neben den von mir gefundenen Zahlen erstens diejenigen Elastizitätsmoduln anzuführen, die Hr. Voigt an gegossenen Platten von 10 cm Länge, 0,6 cm Breite, 0,1 cm Dicke und von bekannter Zusammensetzung gefunden hat (die Dichten sind zur Charakterisierung des Materials in Klammern beigefügt), und zweitens die abgerundeten Mittelwerte, wie sie Hr. F. Kohlrausch für die Tab. 20 seines Lehrbuches ¹⁾ aus dem bisherigen Zahlenmaterial abgeleitet hat. Im allgemeinen liegen meine Zahlen höher als die Voigtschen, doch nicht um so viel, daß die Unterschiede in der Reinheit und Dichte des Materials nicht zur Erklärung genügten. Dagegen bleibt meine Zahl für Kadmium bedeutend hinter der Voigtschen zurück. Hr. Voigt gibt an, daß sein Material anscheinend ganz dicht war, was ich von meinem Stabe nicht behaupten kann. Dennoch halte ich den Unterschied der Zahlen für zu groß, um ihn auf die Existenz von Poren zurückzuführen. Von anderer Seite liegen Beobachtungen über Kadmium meines Wissens nicht vor.

Überraschend groß haben sich die bisher wohl unbekanntenen Elastizitätsmoduln von *Iridium* und *Rhodium* ergeben. Iridium übertrifft noch um ein geringes den *Korund*, für den Hr. Auerbach ²⁾ $E = 52000 \text{ kg/mm}^2$ fand, während Rhodium etwa den gleichen Elastizitätsmodul hat wie der *Topas* ($E = 30000 \text{ kg/mm}^2$). Der Härte nach stehen Iridium und Rhodium unter den Metallen gleichfalls obenan ³⁾, bleiben aber noch hinter dem *Topas* zurück. Rhodium reiht sich zwischen Apatit und Hornblende ein, Iridium zwischen Hornblende und Feldspat. ⁴⁾ Diese Angaben gelten für die vorliegenden Stäbe. Bei anders

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Physik. 10. Aufl. 1905.

2) F. Auerbach, Wied. Ann. 58. p. 381. 1896.

3) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, l. c. p. 322.

4) Vgl. über Beziehungen zwischen Härte und Elastizitätsmodul F. Auerbach, Wied. Ann. 53. p. 1000. 1894; über „absolute“ Härte der Minerale 58. p. 380. 1896.

behandeltem Material kann sich die Reihenfolge bezüglich der Härte ändern.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Die Messung elastischer Dehnungen mittels Interferenzen bildet eine auf *alle* Materialien, auch solche mit großer elastischer Nachwirkung, anwendbare Methode zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben.

Für homogenes Material führt diese statische Methode zum gleichen Resultat, wie die dynamischen Methoden der Transversal- und Longitudinalschwingungen. Unterschiede deuten auf Inhomogenitäten.

Für inhomogenes Material entspricht die aus der statischen Methode abgeleitete Zahl im allgemeinen am besten dem mittleren Elastizitätsmodul.

An dem erhaltenen Zahlenmaterial bestätigt sich die bekannte Tatsache, daß die Mischungsregel für den Elastizitätsmodul nur in manchen Fällen annähernd gilt. Silber, Gold, Zink scheinen durch kleine Mengen fremder Stoffe eine unverhältnismäßig große Erniedrigung des Elastizitätsmoduls zu erleiden. Zink drückt auch in Legierungen den Modul stark herab. Im Eisen wirkt besonders der als Graphit ausgeschiedene Kohlenstoff erniedrigend auf den Elastizitätsmodul.

Iridium steht mit seinem Elastizitätsmodul von 52500 kg/mm^2 unter den bisher untersuchten Metallen und Mineralen an erster Stelle.

(Eingegangen 1. März 1907.)