Zur Theorie der Dedekind'schen Ideale.

Von

LUDWIG BAUR in Mainz.

In der Abhandlung der Herren Dedekind und Weber „Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen“ (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 92, p. 181—290) bedeutet

$$f(\Theta, z) = \Theta^n + b_1 \Theta^{n-1} + \dots + b_{n-1} \Theta + b_n = 0,$$

unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten $b_1, \dots, b_n$ ganze oder gebrochene rationale Functionen von z ohne gemeinsamen Theiler sind, eine irreductibele algebraische Gleichung. Das System aller rationalen Functionen von Θ und z bildet einen Körper algebraischer Functionen Ω vom Grade n , und die Functionen $1, \Theta, \Theta^2, \dots, \Theta^{n-1}$ eine Basis dieses Körpers. Durch ν wird der Inbegriff aller ganzen algebraischen Functionen von z in Ω ; durch $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ eine Basis von ν bezeichnet.

Hieran schliessen sich folgende Bemerkungen, die dazu dienen können, der ganzen Theorie eine etwas concretere Gestalt zu geben. Die eingeklammerten Citate beziehen sich stets auf die genannte Abhandlung.

I. Ist

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$$

ein beliebiger Modul, und bedeuten $p_1, p_2, \dots, p_s$ beliebige ganze rationale Functionen von z , so ist

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \dots + p_s \alpha_s],$$

denn offenbar ist jede Function des ersten Moduls in dem zweiten Modul enthalten und umgekehrt. Die $(s+1)$ Functionen

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, p_1 \alpha_1 + \dots + p_s \alpha_s$$

bilden eine reductibele Basis des Moduls α .

II. Ein jeder Modul α bleibt ungeändert, wenn man eine Basisfunction α ersetzt durch irgend eine Function β , die ihr congruent ist

in Bezug auf den Modul, dessen Basisfunctionen die $(s - 1)$ übrigen Basisfunctionen des Moduls α sind.

Es ist z. B.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s] = [\beta_1, \alpha_2, \dots \alpha_s],$$

wenn

$$\beta_1 \equiv \alpha_1 \pmod{[\alpha_2, \dots \alpha_s]},$$

d. h. wenn

$$\beta_1 = \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \dots + p_s \alpha_s,$$

denn offenbar ist auch hier wieder jede Function des einen Moduls in dem anderen enthalten.

Ein einfaches Beispiel möge die Anwendung dieser Regeln zeigen.

Es sei

$$f(\Theta, z) = \Theta^2 - R(z) = 0,$$

$$R(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2q+1}),$$

und keine 2 der Grössen a_i einander gleich; ferner

$$\alpha = [z - a_1, \Theta],$$

$$\beta = [z - a_2, \Theta],$$

so ist

$$\begin{aligned} \alpha \beta &= [(z - a_1)(z - a_2), (z - a_1)\Theta, (z - a_2)\Theta, R(z)] \\ &= [(z - a_1)(z - a_2), (z - a_1)\Theta, (z - a_2)\Theta, 0] \\ &= [(z - a_1)(z - a_2), (z - a_1)\Theta, (a_1 - a_2)\Theta] \\ &= [(z - a_1)(z - a_2), 0, (a_1 - a_2)\Theta] \\ &= [(z - a_1)(z - a_2), \Theta]. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\alpha^2 = [(z - a_1)^2, (z - a_1)\Theta, R(z)].$$

Bedeutet nun allgemein $\text{Th}(x_1, x_2, \dots)$ den grössten gemeinsamen Theiler der ganzen rationalen Functionen $x_1, x_2, \dots$, so ist

$$\text{Th}((z - a_1)^2, R(z)) = z - a_1,$$

und man kann daher zwei ganze rationale Functionen von z , etwa p und q so bestimmen, dass

$$p \cdot (z - a_1)^2 + q \cdot R(z) = z - a_1,$$

und es ist dann

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= [(z - a_1)^2, (z - a_1)\Theta, z - a_1] \\ &= [0, (z - a_1)\Theta, z - a_1] \\ &= [1, \Theta](z - a_1) = \nu(z - a_1). \end{aligned}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass überhaupt, wenn in der Basis eines Moduls mehrere ganze rationale Functionen $x_1, x_2, \dots$ von z vorkommen, dieselben stets ersetzt werden können durch $\text{Th}(x_1, x_2, \dots)$.

III. Bilden die n ganzen Functionen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ eine Basis von ν , so kann eine von ihnen stets gleich 1 gesetzt werden.

Beweis: Bilden $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ eine Basis von ν , ohne dass eine dieser Functionen den Werth 1 hat, so muss es doch, da die Function 1 ebenfalls in ν enthalten ist, n ganze rationale Functionen $a_{11}, \dots, a_{1n}$ von z geben derart, dass

$$1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n.$$

Enthielten nun $a_{11}, \dots, a_{1n}$ einen gemeinsamen Factor $z - c$, so würde die Division der beiden Seiten der vorstehenden Gleichung durch $z - c$ zeigen, dass auch $\frac{1}{z - c}$ eine Function des Moduls ν , d. h. eine ganze Function von z ist. Dies ist unmöglich, da eine ganze Function von z für einen endlichen Werth von z niemals unendlich gross werden kann. Es muss also $\text{Th}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{const.}$, und deshalb müssen andere ganze rationale Functionen von $z, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ so bestimmbar sein, dass $\Sigma \pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn} = 1$ (§ 4. 1). Setzt man dann:

$$\omega_1 = a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n,$$

$$\omega_2 = a_{21}\alpha_1 + \dots + a_{2n}\alpha_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\omega_n = a_{n1}\alpha_1 + \dots + a_{nn}\alpha_n,$$

so bilden die n Functionen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, von denen die erste den Werth 1 hat, ebenfalls eine Basis von ν (§ 3. 7). Damit ist der Satz bewiesen.

IV. Es sei nunmehr α ein beliebiges Ideal, so besitzt dasselbe eine irreductible Basis, die aus n ganzen Functionen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ besteht (§ 7); und es ist daher

$$\alpha = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n],$$

$$\beta_1 = b_{11}\omega_1 + \dots + b_{1n}\omega_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\beta_n = b_{n1}\omega_1 + \dots + b_{nn}\omega_n,$$

wo die b_{ix} ganze rationale Functionen von z und so beschaffen sind, dass

$$N(\alpha) = (\nu, \alpha) = \sum \pm b_{11} \dots b_{nn} \neq 0. *)$$

Da $N(\alpha) \cdot \omega_x$ eine Function des Moduls α ist, so können die Basisfunctionen $\omega_1, \dots, \omega_n$ von ν durch Multiplication mit von 0 verschiedenen ganzen rationalen Functionen von z in Functionen des

*) Durch $a \neq b$ soll bezeichnet werden, dass a einen von b verschiedenen Werth hat.

Primideal $\mathfrak{p}$, dessen Norm $N(\mathfrak{p}) = z - z_0$ ist, darstellbar in der Form:

$$\mathfrak{p} = [z - z_0, \omega_2 - c_2, \dots, \omega_n - c_n],$$

wo die Grössen $c_2, \dots, c_n$ constante Grössen sind. Umgekehrt ist auch jedes in dieser Form enthaltene Ideal ein Primideal, denn es ist $N(\mathfrak{p}) = z - z_0$ eine lineare Function von z .

Die Bedeutung der Constanten $c_2, \dots, c_n$ ist klar. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{P}$ den Punkt, der das Primideal $\mathfrak{p}$ erzeugt, so muss jede Function des Ideals $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{P}$ den Werth 0 erhalten, d. h. in $\mathfrak{P}$ muss $z = z_0, \omega_2 = c_2, \dots, \omega_n = c_n$ sein. Umgekehrt ist auch der Punkt $\mathfrak{P}$ durch diese Forderung vollständig definirt.

Besonders anschaulich gestaltet sich die Form der Primideale, wenn $\Delta(1, \Theta, \dots, \Theta^{n-1})$ keinen quadratischen Factor enthält, wenn also — beiläufig gesagt — die von Riemann mit r bezeichnete Zahl den Werth 0 hat und keine 2 Verzweigungspunkte zusammenfallen und sich aufheben (Riemann, ges. W. p. 104, 105). In diesem Falle bilden nämlich die Functionen $1, \Theta, \dots, \Theta^{n-1}$ eine Basis nicht nur für Ω , sondern auch für $\mathfrak{o}$. Dies geht direct aus § 3, 7 der Dedekind-Weber'schen Abhandlung hervor, da dort gezeigt wurde, dass, wenn die n ganzen Functionen $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine Basis von Ω bilden und eine Function in $\mathfrak{o}$ existiren würde, die nicht in dem Modul $[\omega_1, \dots, \omega_n]$ enthalten wäre, dann nothwendig $\Delta(\omega_1, \dots, \omega_n)$ durch einen Factor $(z - c)^2$ theilbar sein müsste. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ eines solchen speciellen Körpers, kann dann, wenn $N(\mathfrak{p}) = z - z_0$, in die Form gesetzt werden

$$\mathfrak{p} = [z - z_0, \Theta - \Theta_0, \Theta^2 - \Theta_0^2, \dots, \Theta^{n-1} - \Theta_0^{n-1}],$$

wo Θ_0 jede Wurzel der Gleichung $f(\Theta, z_0) = 0$ sein darf.

Die genannte Bedingung ist z. B. erfüllt bei einem hyperelliptischen Gebilde, wo

$$f(\Theta, z) = \Theta^2 - R(z) = 0,$$

$$R(z) = (z - a_1) \dots (z - a_{2\varrho+1})$$

und keine 2 der Grössen a gleich gross sind. Es ist nämlich dann

$$\text{const. } \Delta(1, \Theta) = \begin{vmatrix} S(1) & S(\Theta) \\ S(\Theta) & S(R(z)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2R(z) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(1, \Theta) = R(z),$$

und

$$\mathfrak{p} = [z - z_0, \Theta - \Theta_0].$$

Mainz, März 1888.