Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen.

(Von Herrn *J. Thomae* in Halle.)

In einem kleinen Aufsatze Bd. 66 dieses Journals habe ich $d\lg\vartheta(0,0,\dots 0)$ als ein Differential der Klassenmoduln dargestellt. Die Integration dieses Ausdruckes kann ich nur für den Fall ausführen, in welchem die p Variabeln der Function

$$\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p) = (\sum_{-\infty}^{+\infty})^p e^{(\sum_1^p)^2 a_{\mu\mu'}.m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_1^p v_\mu m_\mu}$$

(worin die Summationen im Exponenten sich auf μ und μ', die äussern Summationen auf $m_1, m_2, \dots m_p$ beziehen) die p überall endlichen Integrale algebraischer nur *zweiwerthiger* Functionen sind. Die Ausführung der Integration für diesen Fall habe ich, wenn $p = 2$ ist, bereits in einer im März des Jahres 1865 zu Halle gedruckten Abhandlung (später auch in der *Schlömilch*schen Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 17, pag. 427) geliefert. Es ist jedoch wünschenswerth, für den ausführbaren Fall nicht bloss die Methode, sondern völlig fertige Resultate zu haben. Deshalb wird in der nachfolgenden Abhandlung $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ nebst mehreren andern Constanten als Function der Verzweigungswerthe einer $2p+1$ fach zusammenhängenden *Riemann*schen Fläche T dargestellt, wenn diese eine Ebene nur zweifach überall bedeckt. *Riemann* nennt $2p-1$ dieser Verzweigungspunkte die Moduln einer Klasse gleichverzweigter Flächensysteme, oder algebraischer wie jene verzweigter Functionen, weshalb $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ als Function der Klassenmoduln angesehen werden kann. Ich werde im Folgenden mit (R. pag.) die *Riemann*sche Abhandlung über *Abel*sche Functionen Bd. 54 citiren und die dort angewandte Bezeichnung überall beibehalten.

Der erste Artikel enthält nun die Beschreibung und Bezeichnung der unsern Untersuchungen zu Grunde liegenden Fläche T, welche von $2p+1$ fachem Zusammenhange ist, aber eine Ebene nur zweifach überall bedeckt, und es werden darin die Werthe der p von einander unabhängigen Integrale für die $2p+2$ Verzweigungspunkte tabellarisch aufgestellt. Diese Integrale enthalten je eine willkürliche additive Constante. Ueber diese Constanten wird im zweiten Artikel eine Verfügung getroffen, welche für die Darstellung *Abel*scher Functionen durch jene Integrale mittels der ϑ-Functionen besonders bequem ist. Im dritten Artikel wird gezeigt, dass jedes Integral zweiter Gattung dargestellt werden könne mittels nach den Verzweigungswerthen genommener Differentialquotienten der Integrale erster Gattung, und durch algebraische Functionen. Durch Vergleich der directen Darstellung mit der durch ϑ-Functionen ergeben sich brauchbare (für den Fall $p=1$ von *Jacobi* Fundamenta nova pag. 74 in anderer Weise gefundene) Relationen zwischen den Differentialquotienten der Moduln der ϑ-Functionen und Periodicitätsmoduln der überall endlichen Integrale. Im vierten Artikel wird $\vartheta(0,0,\dots 0)$ als Function der $2p+2$ Verzweigungswerthe vollständig dargestellt. Daran schliesst sich im folgenden Artikel in einfacher Weise die Bestimmung von

$$e^{\frac{1}{4}(\sum\limits_{1}^{p})^2_{(\varrho\varrho')} a_{\varrho\varrho'} h_\varrho h_{\varrho'}} . \vartheta\left(\dots, \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} a_{\mu\varrho} h_\varrho + \frac{i\pi}{2} g_\mu, \dots\right),$$

wenn h_ϱ, g_ϱ beliebige ganze Zahlen sind. Es soll aber der Ausdruck

$$\vartheta_{h_1, h_2, \dots h_p; g_1, g_2, \dots g_p}(\dots, v_p, \dots)$$
$$= e^{\sum\limits_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho v_\varrho + \frac{1}{4}(\sum\limits_{1}^{p})^2_{(\varrho\varrho')} a_{\varrho\varrho'} h_\varrho h_{\varrho'}} . \vartheta\left(\dots, v_\mu + \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} a_{\mu\varrho} h_\varrho + \frac{i\pi}{2} g_\mu, \dots\right)$$

kurz eine gerade ϑ-Function genannt werden, wenn

$$\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho g_\varrho \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$

ist, und eine ungerade, wenn

$$\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho g_\varrho \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2)$$

ist. Im fünften Artikel sind für verschwindende Argumente sämmtliche gerade ϑ-Functionen, soweit sie nicht verschwinden, als Functionen der Verzweigungswerthe bestimmt, und es wird eine Relation abgeleitet zwischen geraden ϑ-Functionen und der Functionaldeterminante von p ungeraden ϑ-Functionen für verschwindende Argumente. Ausserdem enthält dieser Artikel noch die Darstellung einer Klasse in T zweiwerthiger (*Abel*scher) Functionen durch ϑ-Quotienten. Wäre diese Relation (14.), bei deren Herleitung die $\frac{p.(p+1)}{2}$ Moduln der ϑ-Function nur eine $2p-1$ fache Variabilität besitzen, auch noch für beliebige Moduln giltig, so würde durch dieselbe $\vartheta(0,0,\dots 0)$ in jedem

Falle als Function der Klassenmoduln leicht bestimmbar sein, der Beweis derselben für den allgemeinen Fall ist mir jedoch nicht gelungen. Der sechste Artikel stellt die partiellen Differentialquotienten der ungeraden ϑ-Functionen für verschwindende Argumente durch die Verzweigungswerthe dar, so weit diese Differentialquotienten nicht selbst verschwinden.

Der Kürze wegen bemerken wir hier gleich noch, dass in dieser Abhandlung unter $|x_{\lambda\lambda'}|$ oder $|x_\lambda^{(\lambda')}|$ und ähnlichen Ausdrücken die Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pp} \end{vmatrix} \quad \text{bez.} \quad \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(p)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_p^{(1)} & x_p^{(2)} & \dots & x_p^{(p)} \end{vmatrix}$$

und ähnliche verstanden werden, und dass wir mit dem Differentialzeichen δ eine partielle oder rein formale Differentiation andeuten wollen. Ferner wollen wir mit $\overset{n}{\underset{1}{\Pi}}{}_{(\varrho)}(\varphi(\varrho))$ das Product $\varphi(1).\varphi(2)\dots\varphi(n)$ bezeichnen; wenn aber in demselben der Factor $\varphi(\nu)$ fehlt, also für $\overset{n}{\underset{1}{\Pi}}{}_{(\varrho)}(\varphi(\varrho)):\varphi(\nu)$, wollen wir $\overset{n}{\underset{1}{\Pi}}{}_{(\varrho)}^{(\nu)}\varphi(\varrho)$ schreiben.

1.

Mit T bezeichnen wir eine $2p+1$fach zusammenhängende *Riemann*sche Fläche, welche die die Werthe der complexen Variabeln z repräsentirende Ebene überall zweifach bedeckt, und sich um die $2p+2$ Verzweigungspunkte

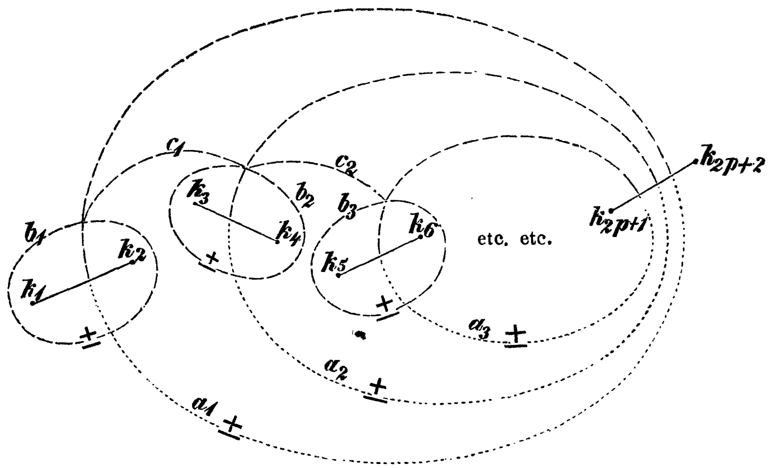
$$k_1, \quad k_2, \quad \dots \quad k_{2p+1}, \quad k_{2p+2}$$

herum aus einem Flächenblatte in das andere fortsetzt. Jeder Punkt ε von T kann dann als Repräsentant eines zusammengehörigen Werthepaares der Grösse z und der zweiwerthigen Function derselben

$$s = \sqrt{\overset{2p+2}{\underset{1}{\Pi}}{}_{(\varrho)}(z-k_\varrho)} = \sqrt{(z-k_1).(z-k_2)\dots(z-k_{2p+2})}$$

angesehen werden. Wir denken uns, dass die Fortsetzung des einen Blattes der Fläche T in das andere längs Linien stattfinde, welche zwischen k_1 und k_2, zwischen k_3 und k_4, ... zwischen $k_{2\varrho-1}$ und $k_{2\varrho}$, ... zwischen k_{2p+1} und k_{2p+2} so gezogen sind, dass sie sich weder selbst, noch unter einander schneiden. (Cf. umstehende Fig.) Die Zerschneidung der Fläche T führen wir nach der von *Riemann* im Art. 19 der *Abel*schen Functionen (*R.* pag. 143) gegebenen Vor-

26 *



schrift aus. Dies kann auf unendlich viele Arten geschehen, und es entspricht der Uebergang von einem Schnittsystem zu einem andern je einer linearen Transformation der ϑ-Functionen und umgekehrt; bei der hier getroffenen Wahl sind besondere Gesichtspunkte nicht massgebend gewesen.

Wir ziehen um k_1, k_2 herum eine in sich zurücklaufende, immer in *einem* Blatte der Fläche T bleibende und diese nicht zerstückelnde Linie b_1 und führen dann einen Querschnitt a_1 von der positiven (innern) Seite von b_1 auf die negative zum Anfangspunkte zurück, indem wir a_1 über die Linie $\overline{k_1 k_2}$ in den andern Flächenast, und von da, die Verzweigungspunkte $k_2, k_3, \ldots k_{2p+1}$ zur Linken lassend, über die Linie $\overline{k_{2p+1} k_{2p+2}}$ in den ersten Flächenast zurückführen. (In der Figur sind die Linien in dem einen Blatte durch unterbrochene Striche, in dem andern durch Punkte, die beiden zugleich angehörenden durch einen continuirlichen Zug angegeben.) Ganz ebenso ziehen wir in demselben Blatte, in welchem b_1 liegt, um k_3, k_4 herum eine geschlossene Curve b_2, welche a_1, b_1 nicht trifft, und die Fläche T nicht zerstückelt. Von dem positiven Ufer dieser Curve führen wir einen Querschnitt a_2 über die Linie $\overline{k_3 k_4}$ in den andern Flächenast, von da über die Linie $\overline{k_{2p+1} k_{2p+2}}$ in das erste Blatt und auf das negative Ufer zum Anfangspunkte zurück, so dass bei der ganzen Führung a_1 zur Rechten, die Verzweigungspunkte $k_4, k_5, \ldots k_{2p+1}$ zur Linken geblieben sind. Weiter führen wir um k_5, k_6 herum eine geschlossene T nicht zerstückelnde Curve b_3, welche mit b_1, b_2 in demselben Blatte von T liegt, und a_1, a_2; b_1, b_2 nirgend trifft. Von dem positiven Ufer von b_3 führen wir, a_2 immer zur Rechten, $k_6, k_7, \ldots k_{2p+1}$ zur Linken behaltend, einen Querschnitt a_3 über die Linie $\overline{k_5 k_6}$ in das andere

Blatt und von da über die Linie $\overline{k_{2p+1}k_{2p+2}}$ in das erste Blatt zum Anfangspunkt auf das negative Ufer von b_3 zurück. Und so fahren wir fort, bis wir p Systeme $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots a_p, b_p$ gezogen haben und ein ähnliches nicht mehr möglich ist. Verbinden wir nun noch a_1 durch eine T nicht zerstückelnde Linie c_1 mit b_2, a_2 durch c_2 ebenso mit b_3 etc., a_{p-1} durch c_{p-1} mit b_p, so ist durch das System der Linien a, b, c die Fläche T in eine einfach zusammenhängende T' der Art zerschnitten, wie es *Riemanns* erwähnte Vorschrift verlangt.

Es existiren nun p (und nur p von einander unabhängige) überall endliche und stetige in T' einändrige Functionen, die sich zu beiden Seiten der Querschnitte a, b um längs je eines derselben constante Grössen, welche Periodicitätsmoduln heissen, unterscheiden, zu beiden Seiten der Linien c aber dieselben Werthe annehmen. Es sind dies die p Integrale

$$w_1(s, z) = \int \frac{dz}{s}, \quad w_2(s, z) = \int \frac{z\,dz}{s}, \quad \ldots \quad w_p(s, z) = \int \frac{z^{p-1}\,dz}{s}.$$

Es sei w_μ auf dem positiven Ufer von a_ν um den Periodicitätsmodul $A_\mu^{(\nu)}$, auf dem positiven Ufer von b_ν um den Periodicitätsmodul $B_\mu^{(\nu)}$ grösser als auf dem negativen. Es ist dann $A_\mu^{(\nu)}$ das Integral $\int \frac{z^{\mu-1}\,dz}{s}$ genommen über den Querschnitt b_ν, und $B_\mu^{(\nu)}$ dasselbe Integral genommen über den Querschnitt a_ν, was wir durch Anhängung von b_ν bez. a_ν wie eine untere Grenze andeuten.

Aus den Grössen $w_1, w_2, \ldots w_p$ setzt man leicht p solche überall endliche Integrale $u_1(s, z), u_2(s, z), \ldots u_p(s, z)$ zusammen, die an je einem der Querschnitte $a_1, a_2, \ldots a_p$ den von Null verschiedenen Periodicitätsmodul $i\pi$, an den anderen von ihnen aber den Null haben. Setzt man nämlich

$$\alpha_\varrho^{(\mu)} = i\pi \cdot \frac{\delta \lg |A_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta A_\varrho^{(\mu)}},$$

so ist der Ausdruck $u_\mu(s, z)$ oder

$$u_\mu = \sum_1^p{}_{(\varrho)} \alpha_\varrho^{(\mu)} w_\varrho$$

eine Function, welche am Querschnitt a_μ den Periodicitätsmodul $i\pi$, am Querschnitt $a_{\mu'}$ $(\mu' \gtrless \mu)$ den Null hat. Am Querschnitt b_ν aber hat u_μ den Periodicitätsmodul

$$a_{\mu\nu} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} \alpha_\varrho^{(\mu)} . B_\varrho^{(\nu)} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} \alpha_\varrho^{(\nu)} . B_\varrho^{(\mu)} = a_{\nu\mu}.$$

Beim Uebergange über die Linien c ändern sich diese Integrale stetig.

Lassen wir nun zunächst die additiven Constanten in $u_1, u_2, \dots u_p$ unbestimmt, und setzen

$$2u_\mu(0, k_1) = x_\mu + a_{\mu 1},$$

so findet man die Werthe, welche $u_1, u_2, \dots u_p$ in den Verzweigungspunkten annehmen, leicht durch die Ueberlegung, dass das Integral u_μ auf dem Wege von einem Verzweigungspunkte zum folgenden um ebenso viel in dem einen Blatte wächst, als rückwärts auf dem congruenten Wege in dem andern Blatte, und dass der ganze Zuwachs ein Periodicitätsmodul ist. Jn der folgenden Tabelle sind diese Werthe in leicht übersichtlicher Weise zusammengestellt:

	$2u_1 - x_1,$	$2u_2 - x_2,$		$2u_\mu - x_\mu,$		$2u_p - x_p$
$k_1;$	$a_{11},$	$a_{21},$	$\dots$	$a_{\mu 1},$	$\dots$	a_{p1}
$k_2;$	$a_{11}+i\pi,$	$a_{21},$	$\dots$	$a_{\mu 1},$	$\dots$	a_{p1}
$k_3;$	$a_{12}+i\pi,$	$a_{22},$	$\dots$	$a_{\mu 2},$	$\dots$	a_{p2}
$k_4;$	$a_{12}+i\pi,$	$a_{22}+i\pi,$	$\dots$	$a_{\mu 2},$	$\dots$	a_{p2}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$k_{2\mu-1};$	$a_{1\mu}+i\pi,$	$a_{2\mu}+i\pi,$	$\dots$	$a_{\mu\mu},$	$\dots$	$a_{p\mu}$
$k_{2\mu};$	$a_{1\mu}+i\pi,$	$a_{2\mu}+i\pi,$	$\dots$	$a_{\mu\mu}+i\pi,$	$\dots$	$a_{p\mu}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$k_{2p-1};$	$a_{1p}+i\pi,$	$a_{2p}+i\pi,$	$\dots$	$a_{\mu p}+i\pi,$	$\dots$	a_{pp}
$k_{2p};$	$a_{1p}+i\pi,$	$a_{2p}+i\pi,$	$\dots$	$a_{\mu p}+i\pi,$	$\dots$	$a_{pp}+i\pi$
$k_{2p+1};$	$i\pi,$	$i\pi,$	$\dots$	$i\pi,$	$\dots$	$i\pi$
$k_{2p+2};$	$0,$	$0,$	$\dots$	$0,$	$\dots$	$0.$

Es ist nun für unsere Untersuchungen von Wichtigkeit, zu zeigen, dass die Function $\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)$, wenn für die Moduln $\dots, a_{\mu\mu'}, \dots$ in ihr die gleich bezeichneten Periodicitätsmoduln der Integrale $u_1, u_2, \dots u_p$ gesetzt werden, sich dem Werthe 1 nähert, wenn der Verzweigungspunkt k_2 an k_1, k_4 an $k_3, \dots k_{2p}$ an k_{2p-1} unendlich nahe gerückt wird. In diesem Falle bleiben die Integrale $w_1, w_2, \dots w_p$, über die Querschnitte $b_1, b_2, \dots b_p$ erstreckt, endlich, und zwar nimmt nach dem *Cauchy*schen Satz $A_\mu^{(\nu)}$ den Werth an

$$A_\mu^{(\nu)} = \int_{b_\nu} \frac{z^{\mu-1}.dz}{\sqrt{(z-k_{2p+1}).(z-k_{2p+2})}.\prod_1^p{}_{(\varrho)}(z-k_{2\varrho-1})}$$

$$= \frac{2\pi i k_{2\nu-1}^{\mu-1}}{\sqrt{(k_{2\nu-1}-k_{2p+1})(k_{2\nu-1}-k_{2p+2})}.\prod_1^p{}_{(\varrho)}^{(\nu)}(k_{2\nu-1}-k_{2\varrho-1})},$$

und daraus ergiebt sich für die Determinante $|A_\lambda^{(\lambda')}|$ der durch die folgende Gleichung bestimmte Werth:

$$\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|\cdot\sqrt{\prod_{1}^{p}{}_{(\varrho)}((k_{2p+1}-k_{2\varrho-1})(k_{2p+2}-k_{2\varrho-1}))}}{(2\pi i)^p} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \dots & k_1^{p-1} \\ 1 & k_3 & k_3^2 & \dots & k_3^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k_{2p-1} & k_{2p-1}^2 & \dots & k_{2p-1}^{p-1} \end{vmatrix}}.$$

Die Integrale $B_\mu^{(\nu)}$ aber wachsen ins Unendliche, wenn man jenes Zusammenrücken der Verzweigungspunkte vornimmt. Aber die Verhältnisse der Grössen $B_\mu^{(1)}, B_\mu^{(2)}, \dots B_\mu^{(p)}$, wenn $k_2 = k_1+\varDelta_1$, $k_4 = k_3+\varDelta_2$, $\dots$ $k_{2p} = k_{2p-1}+\varDelta_p$ genommen wird, können durch geeignete Wahl der Verhältnisse der ins Unendliche abnehmenden Grössen $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots \varDelta_p$ beliebige sein, während die Grenzwerthe der Grössen $A_\mu^{(\nu)}$ von diesen Verhältnissen nicht abhängen. Nun hat man (*R.* pag. 144) die Relation

$$\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)}(A_\mu^{(\varrho)}B_{\mu'}^{(\varrho)}-A_{\mu'}^{(\varrho)}B_\mu^{(\varrho)}) = 0,$$

woraus sich mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit der Verhältnisse $B_\mu^{(1)}:B_\mu^{(2)}:B_\mu^{(3)}\dots$ und der Constanz der Grössen $A_\mu^{(\varrho)}$ die Verhältnisse ergeben

$$B_\mu^{(\varrho)}:B_{\mu'}^{(\varrho)} = A_\mu^{(\varrho)}:A_{\mu'}^{(\varrho)} \quad \text{oder} \quad B_\mu^{(\varrho)} = f^{(\varrho)}.A_\mu^{(\varrho)}$$

für verschwindende $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots \varDelta_p$. Daraus folgt unmittelbar, dass für $\mu \gtrless \mu'$

$$a_{\mu\mu'} = i\pi\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)}\frac{\delta\lg|A_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta A_\varrho^{(\mu)}}\cdot B_\varrho^{(\mu')}$$

$$= i\pi.f^{(\mu')}.\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)}\frac{\delta\lg|A_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta A_\varrho^{(\mu)}}\cdot A_\varrho^{(\mu')} = i\pi f^{(\mu')}.0$$

im Verhältniss zu den Grössen

$$a_{\mu\mu} = i\pi f^{(\mu)}.\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)}\frac{\delta\lg|A_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta A_\varrho^{(\mu)}}A_\varrho^{(\mu)} = i\pi f^{(\mu)},$$

weil die Grössen $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots f^{(p)}$ in endlichen Verhältnissen zu einander stehen, wenn die Verhältnisse $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots \varDelta_p$ endlich sind, verschwindend klein sind. Bei Annahme solcher endlichen Verhältnisse, (welche übrigens nicht nöthig aber bequem ist) sieht man sofort ein, dass die $p$fach unendliche Reihe für $\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)$ sich auf das Glied der Ordnung Null, also auf die Zahl 1 reducirt.

2.

Setzt man für die Variabeln der ϑ-Function $v_1, v_2, \dots v_p$ bez. die Grössen

$$u_1(s, z) - \sum_1^p {}_{(\varrho)} u_1(s_\varrho, z_\varrho), \quad u_2(s, z) - \sum_1^p {}_{(\varrho)} u_2(s_\varrho, z_\varrho), \dots u_p(s_\varrho, z_\varrho) - \sum_1^p {}_{(\varrho)} u_p(s_\varrho, z_\varrho)$$

und für die Moduln die Periodicitätsmoduln $\dots, a_{\mu\mu'}, \dots$ der Integrale u_1, $u_2, \dots u_p$, so kann man die in den letzteren noch willkürlich gelassenen Constanten auf eine und nur eine Weise so bestimmen, dass $\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)$ in den Punkten $(s_1, z_1), (s_2, z_2), \dots (s_p, z_p)$ der Fläche T verschwindet. Die Mittel zu dieser Bestimmung hat *Riemann* im Art. 23 seiner *Abel*schen Functionen (*R.* pag. 148) angegeben. In unserem speciellen Falle lautet die dort gegebene Vorschrift dahin, dass $\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)$ verschwinden muss, wenn $\dots$, $v_\mu, \dots$ durch die Summen $\dots, \sum_{(\varrho)}^{(p-1)} u_\mu(0, k_\varrho), \dots$ ersetzt werden, worin die Summation über jede beliebige Combination von $p-1$ Verzweigungswerthen k_ϱ zu erstrecken ist, und gleichzeitig muss

$$\left(2 \sum_{(\varrho)}^{(p-1)} u_1(0, k_\varrho), \quad 2 \sum_{(\varrho)}^{(p-1)} u_2(0, k_\varrho), \quad \dots \quad 2 \sum_{(\varrho)}^{(p-1)} u_p(0, k_\varrho)\right) \equiv (0, 0, \dots 0)$$

nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u sein. Aus diesen Bedingungen geht hervor, dass x_μ in der Form $\frac{1}{p-1} \sum_1^p {}_{(\varrho)} \delta_\varrho . a_{\mu\varrho} + \gamma_\mu \frac{i\pi}{p-1}$ enthalten sein muss, wenn $\delta_\varrho, \gamma_\varrho$ ganze Zahlen sind. Bildet man die Summen der Werthe von $\dots, 2u_\mu(s, z), \dots$ für $p-1$ Verzweigungspunkte, so erhält man mit Hilfe der Tabelle des ersten Artikels Ausdrücke von der Form

$$\dots, \sum_1^p {}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho} + g_\mu i\pi, \dots$$

und setzt man die Hälften dieser Summen für die Variabeln, $\dots, v_\mu, \dots$ in die Function $\vartheta(\dots, v_\mu, \dots)$ ein, so verschwindet diese nach einer in der Einleitung gemachten Erinnerung dann, wenn $\sum_1^p {}_{(\varrho)} h_\varrho g_\varrho \equiv 1 \pmod{2}$ ist. Es müssen daher die Grössen $\gamma_\varrho, \delta_\varrho$ so bestimmt werden, dass diese Forderung erfüllt ist. Wir bezeichnen nun die Summe

$$u_\mu(0, k_\lambda) + \sum_1^{p-2} {}_{(\varrho)} u_\mu(0, k_{2\varrho-1})$$

mit $U_\mu^{(\lambda)}$ und setzen

$$1+\delta_1=h_1,\quad 1+\delta_2=h_2,\ \dots,\ 1+\delta_{p-2}=h_{p-2},\ \delta_{p-1}=h_{p-1},\quad \delta_p=h_p,$$

$$p-3+\gamma_1=g_1,\ p-4+\gamma_2=g_2,\ \dots,\ 1+\gamma_{p-3}=g_{p-3},\ \gamma_{p-2}=g_{p-2},\ \gamma_{p-1}=g_{p-1},\ \gamma_p=g_p,$$

so finden wir

$$(A.)\qquad 2U_\mu^{(2\nu)} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho}+g_\mu i\pi+a_{\mu\nu}+\theta_\mu i\pi,$$

worin $a_{\mu p+1}=0$ zu setzen ist, wenn die Gleichung für $\nu=p+1$ gebildet wird, und $\theta_\mu=1$ für $\mu\leqq\nu$, $\theta_\mu=0$ für $\mu>\nu$ und für $\nu=p+1$ zu nehmen ist. Ferner ist

$$(B.)\qquad 2U_\mu^{(2p-3)} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho}+a_{\mu\, p-1}+g_\mu i\pi+\varepsilon_\mu i\pi,$$

worin $\varepsilon_\mu=1$ für $\mu\leqq p-2$, $\varepsilon_\mu=0$ für $\mu=p-1$, p zu setzen ist. Weiter ist

$$(C.)\qquad 2U_\mu^{(2p-1)} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho}+a_{\mu p}+g_\mu i\pi+\eta_\mu i\pi,$$

worin $\eta_1=\eta_2=\cdots=\eta_{p-1}=1$, $\eta_p=0$ ist. Endlich ist

$$(D.)\qquad 2U_\mu^{(2p+1)} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho}+i\pi g_\mu+i\pi.$$

Da nun $\vartheta(\dots, U_\mu^{(\lambda)}, \dots)$ verschwinden muss, so folgt aus $(A.)$ für $\nu=p+1$ zuerst die Bedingung

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho g_\varrho \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

und wenn man dies in Rücksicht zieht, für jeden andern Werth von ν

$$\sum_1^\nu{}_{(\varrho)} h_\varrho + g_\nu \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2)$$

und hieraus, wenn die Congruenz von der, in welcher $\nu+1$ statt ν gesetzt ist, abgezogen wird,

$$(a.)\qquad g_{\nu+1}-g_\nu \equiv h_{\nu+1} \qquad (\text{mod. } 2).$$

Aus $(B.)$ folgt

$$\sum_1^{p-2}{}_{(\varrho)} h_\varrho + g_{p-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2),$$

aus $(C.)$ und $(D.)$

$$\sum_1^{p-1}{}_{(\varrho)} h_\varrho + g_p \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2), \qquad \sum_1^p h_\varrho \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

und aus diesen Congruenzen zieht man durch sehr einfache Combinationen die Resultate

$$(b.)\qquad g_p \equiv g_{p-2} \equiv h_p \equiv h_{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } 2), \qquad g_{p-1} \equiv 0 \ (\text{mod. } 2).$$

Setzen wir nun weiter

$$V_\mu^{(\lambda)} = \sum_1^{p-2}{}_{(\varrho)} u_\mu(0, k_{2\varrho}) + u_\mu(0, k_\lambda),$$

so ist

$$2V_\mu^{(2\nu-1)} = \sum_1^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho} + a_{\mu\nu} + g_\mu i\pi + \zeta_\mu i\pi,$$

worin

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_{\nu-1} = 2, \quad \zeta_\nu = \zeta_{\nu+1} = \cdots = \zeta_{p-3} = 1, \quad \zeta_{p-2} = \zeta_{p-1} = \zeta_p = 0$$

ist. Da nun $\vartheta(\ldots, V_\mu^{(\lambda)}, \ldots)$ verschwindet, so folgt hieraus, wenn $\nu \leqq p-2$ ist, mit Vernachlässigung ganzer Multipla von 2

$$g_\nu \equiv 1 + h_\nu + h_{\nu+1} + \cdots + h_{p-2} \qquad \text{(mod. 2)},$$

woraus wieder folgt

$$(c.) \qquad g_{\nu+1} - g_\nu \equiv h_\nu \qquad \text{(mod. 2)},$$

und für $\nu = p-2$ hat man $h_{p-2} \equiv g_{p-2} - 1$ und nach $(b.)$ $h_{p-2} \equiv 0$ (mod. 2), also

$$h_1 \equiv h_2 \equiv \cdots \equiv h_{p-2} \equiv 0, \quad h_{p-1} \equiv h_p \equiv 1$$

und durch $(c.)$

$$g_{p-2\nu-1} \equiv 0, \qquad g_{p-2\nu} \equiv 1 \quad \text{(mod. 2)}.$$

Hieraus schliesst man, dass für die Zahlen γ_ϱ, δ_ϱ die Werthe gewählt werden können:

$$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_p = 1, \quad \gamma_p = 1, \quad \gamma_{p-1} = 2, \quad \ldots, \quad \gamma_1 = p,$$

und man erhält hieraus für die Integrale u in den Punkten k_1 die folgenden Werthe *):

$$2u_1(0, k_1) = \frac{p\,i\pi}{p-1} + \frac{1}{p-1}\sum_1^p{}_{(\varrho)} a_{1\varrho} + a_{11},$$

$$2u_2(0, k_1) = \frac{(p-1)\,i\pi}{p-1} + \frac{1}{p-1}\sum_1^p{}_{(\varrho)} a_{2\varrho} + a_{21},$$

. . . .

$$2u_\nu(0, k_1) = \frac{(p-\nu+1)\,i\pi}{p-1} + \frac{1}{p-1}\sum_1^p{}_{(\varrho)} a_{\nu\varrho} + a_{\nu 1},$$

. . . .

$$2u_p(0, k_1) = \frac{i\pi}{p-1} + \frac{1}{p-1}\sum_1^p{}_{(\varrho)} a_{p\varrho} + a_{p1}.$$

---

*) Dieselben Anfangswerthe sind auch von Herrn *Neumann* gewählt worden.

3.

Ist nun wie früher $v_\mu = u_\mu(s,z) - \sum_1^p{}_{(\varrho)} u_\mu(s_\varrho, z_\varrho)$, so ist

$$\frac{d\lg\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)}{dz}$$

als Function von (s_ν, z_ν) in T' einwerthig, nimmt zu beiden Seiten der Linien c und der Querschnitte a denselben Werth an und ist auf der positiven Seite des Querschnittes $b_\varkappa$ um

$$2\frac{du_\varkappa(s,z)}{dz} = 2\sum_1^p{}_{(\varrho)} \frac{\alpha_\varrho^{(\varkappa)} z^{\varrho-1}}{s}$$

grösser als auf dem negativen, und wird im Punkte (s,z), der durch ε bezeichnet werden soll, unendlich gross wie $\frac{1}{z-z_\nu}$, und ist sonst in T' überall stetig und endlich. Durch diese Eigenschaften ist aber eine solche Function, die wir mit

$$t(\varepsilon;\ s_\nu, z_\nu)$$

bezeichnen, bis auf eine von z_ν unabhängige additive Constante schon bestimmt, wenn auch der Werth der Periodicitätsmoduln an den Querschnitten $b_1, b_2, \ldots b_p$ nicht gegeben ist; weil die Differenz zweier solcher etwa vorhandener verschiedener Functionen in T' allenthalben stetig sein würde und an p Querschnitten den Periodicitätsmodul Null hätte, folglich constant sein müsste. Nun ist

$$\frac{\partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\partial k_\mu}$$

ein in T' einwerthiges Integral, welches nur für $z_\nu = k_\mu$ in der ersten Ordnung unendlich gross wird, aber sonst in T' und beim Uebergang über die Linien c und a stetig ist, und mit $\sqrt{z_\nu - k_\mu}$ multiplicirt für $z_\nu = k_\mu$ den Werth annimmt

$$\lim_{z_\nu = k_\mu} \sqrt{(z_\nu - k_\mu)}\cdot\frac{\partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu} = -\sum_1^p{}_{(\varrho')} \frac{\alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\mu^{\varrho'-1}}{\prod_1^{2p+2}{}_{(\varrho)}^{(\mu)}(k_\mu - k_\varrho)}.$$

Man kann daher in der Gleichung

$$t(\varepsilon;\ s_\nu, z_\nu) = \sum_{(\varrho)}^{(p)} \frac{\partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\partial k_\varrho} c_{\varkappa\varrho} + \frac{s\cdot\prod_{(\varrho)}^{(p)}(z_\nu - k_\varrho) + s_\nu\prod_{(\varrho)}^{(p)}(z - k_\varrho)}{2s\cdot(z - z_\nu)\prod_{(\varrho)}^{(p)}(z_\nu - k_\varrho)},$$

in welcher $\varkappa$ willkürlich ist, und die Summation und die Producte über p willkürlich gewählte Verzweigungspunkte zu erstrecken sind, — man kann in dieser Gleichung die p Grössen $c_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 2}, \ldots c_{\varkappa p}$ so bestimmen, dass die

Function nur für $(s_\nu, z_\nu) = (s, z)$ unendlich gross wird, (was wie $\frac{1}{z-z_\nu}$ geschieht). Man erreicht dies, wenn man

$$c_{\varkappa\varrho} = \frac{\overset{2p+2}{\underset{1}{\Pi}}{}^{(\varrho)}_{(\varrho')}(k_\varrho - k_{\varrho'}) \cdot \overset{(p)}{\underset{(\varrho')}{\Pi}}(z - k_{\varrho'})}{\overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho')}\alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\varrho^{\varrho'-1} . 2s(z-k_\varrho)\overset{(p)}{\underset{(\varrho')}{\Pi}}{}^{(\varrho)}(k_\varrho - k_{\varrho'})}$$

setzt. Daraus ergiebt sich die Gleichung

$$(1.)\left\{\begin{aligned} & t(\varepsilon; s_\nu, z_\nu) \\ & = \overset{(p)}{\underset{(\varrho)}{\Sigma}}\left\{\overset{(p)}{\underset{(\varrho')}{\Pi}}{}^{(\varrho)}\frac{(z-k_{\varrho'})}{(k_\varrho - k_{\varrho'})} \cdot \frac{\overset{2p+2}{\underset{1}{\Pi}}{}^{(\varrho)}_{(\varrho')}(k_\varrho - k_{\varrho'}) . \partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho')}\alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\varrho^{\varrho'-1} . 2s\,\partial k_\varrho}\right\} + \frac{s\overset{(p)}{\underset{(\varrho)}{\Pi}}(z_\nu - k_\varrho) + s_\varrho \overset{(p)}{\underset{(\varrho)}{\Pi}}(z - k_\varrho)}{2s.(z-z_\nu)\overset{(p)}{\underset{(\varrho)}{\Pi}}(z_\nu - k_\varrho)}.\end{aligned}\right.$$

Die additive Constante in $t(\varepsilon; s_\nu, z_\nu)$ wollen wir so wählen, wie sie in dieser Gleichung (1.) sich vorfindet. Hieraus folgt die Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{d\lg\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)}{dz} = \overset{p}{\underset{1}{\Pi}}{}_{(\varrho)} t(\varepsilon; s_\varrho, z_\varrho) + C,$$

worin C von s und z abhängt, von s_ν, z_ν ganz unabhängig ist. Man hat Mittel, die Grösse C als Function von z und den Grössen $k_1, k_2, \dots k_{2p+2}$ zu bestimmen, z. B. dadurch, dass man $(v_1, v_2, \dots v_p) \equiv (0, 0, \dots 0)$ setzt nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u, was bei jeder Lage von ε geschehen kann. Es mag genügen diese Constante für den Fall auszuwerthen, in welchem ε auf einen Verzweigungspunkt k_ν fällt. Für diesen Fall geht die Gleichung (2.) über in

$$(3.)\quad \overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho)}\frac{\partial\lg\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial v_\varrho} \cdot \overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho')}\alpha_{\varrho'}^{(\varrho)} k_\nu^{\varrho'-1} = \overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho)}\frac{\overset{2p+2}{\underset{1}{\Pi}}{}^{(\nu)}_{(\varrho')}(k_\nu - k_{\varrho'}) . \partial u_\varkappa(s_\varrho, z_\varrho)}{2\overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho')}\alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\nu^{\varrho'-1} . \partial k_\nu} + K_{\varkappa\nu},$$

worin $K_{\varkappa\nu}$ offenbar nur von den Verzweigungswerthen abhängt. Vergleichen wir zunächst die Periodicitätsmoduln der beiden Seiten der Gleichung (3.) am Querschnitt $b_{\varkappa'}$ in Bezug auf die Variable z_ϱ, so folgt

$$(4^a.)\qquad 2\overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho)}\alpha_\varrho^{\varkappa'} . k_\nu^{\varrho-1} = \frac{\overset{2p+2}{\underset{1}{\Pi}}{}^{(\nu)}_{(\varrho)}(k_\nu - k_\varrho) . \partial a_{\varkappa\varkappa'}}{2\overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho')}\alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\nu^{\varrho'-1}\partial k_\nu},$$

woraus wir die wichtige Beziehung erhalten:

$$(4.)\qquad \frac{\partial a_{\mu\mu'}}{\partial k_\nu} = \frac{4\overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho)}\alpha_\varrho^{(\mu)} k_\nu^{\varrho-1} . \overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{(\varrho')}\alpha_{\varrho'}^{(\mu')} k_\nu^{\varrho'-1}}{\overset{2p+2}{\underset{1}{\Pi}}{}^{(\nu)}_{(\varrho)}(k_\nu - k_\varrho)}.$$

Die Constante $K_{\varkappa\nu}$ aber ist diese

$$(5.)\qquad K_{\varkappa\nu} = -\frac{\prod_{1}^{2p+2}{}_{(\varrho)}^{(\nu)}(k_\nu - k_\varrho).\partial[u_\varkappa(0, k_\nu)]}{2\sum_{1}^{p}{}_{\varrho}\,\alpha_\varrho^{(\varkappa)} k_\nu^{\varrho'-1}.\partial k_\nu},$$

(worin hinter das Differentialzeichen eine Klammer gesetzt ist, um anzudeuten, dass man nicht, das Integral im Sinne habend, die Grenze als variabel ansehen darf). Setzt man nämlich, was immer geschehen kann, für $z_1, z_2, \dots z_p$ solche von k_ν verschiedene Verzweigungspunkte, für welche, unter h_ϱ, g_ϱ ganze Zahlen verstanden,

$$(v_1, v_2, \dots v_p) \equiv (\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} a_{1\varrho} h_\varrho + g_1 i\pi, \dots \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} a_{p\varrho} h_\varrho + g_p i\pi)$$

ist, so nimmt die linke Seite der Gleichung (3.) vermöge bekannter Eigenschaften der ϑ-Functionen den Werth an

$$-2\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho . \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho')} \alpha_{\varrho'}^{(\varrho)} k_\nu^{\varrho'-1} = -\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho . \frac{\prod_{1}^{2p+2}{}_{\varrho'}^{(\nu)}(k_\nu - k_{\varrho'})}{2\sum_{1}^{p}{}_{\varrho'}\,\alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\nu^{\varrho'-1}} . \frac{\partial a_{\varkappa\varrho}}{\partial k_\nu},$$

worin die rechte Seite aus (4^a.) folgt, und worin $\varkappa$ willkürlich ist. Genau denselben Werth nimmt aber die rechte Seite der Gleichung (3.) an, wenn $K_{\varkappa\nu}$ in ihr die Bedeutung (5.) hat, weil sie in die Form gebracht werden kann

$$-\frac{\prod_{1}^{2p+2}{}_{(\varrho')}^{(\nu)}(k_\nu - k_{\varrho'})}{2\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho')}\,\alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\nu^{\varrho'-1}} . \frac{\partial\left(\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} u_\varkappa(s_\varrho, z_\varrho) - u_\varkappa(0, k_\nu)\right)}{\partial k_\nu},$$

woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Setzen wir in der Gleichung (1.) ε_μ statt ε, womit ein Punkt (s_μ, z_μ) bezeichnet wird, und statt des Punktes (s_ν, z_ν) jener Gleichung (s, z), so finden wir durch Grenzübergang die Gleichung:

$$(6.)\qquad \lim_{z = k_\nu} . \frac{\partial t(\varepsilon_\mu; s, z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_\varkappa(s_\mu, z_\mu)}{\partial z_\mu \partial k_\nu} . \frac{\prod_{1}^{2p+2}{}_{(\varrho)}^{(\nu)}(k_\nu - k_\varrho)}{\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)}\,\alpha_\varrho^{(\varkappa)} k_\nu^{\varrho-1}}.$$

Um die Function $\frac{\partial \lg \vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial v_\varrho}$, in so weit sie von (s, z) abhängt, zu bestimmen, haben wir zu beachten, dass sie an den Linien c und a in T die Periodicitätsmoduln Null hat, dass sie auch an den Linien $b_1, b_2, \dots b_p$ ausser an b_ϱ die Periodicitätsmoduln Null hat, an b_ϱ aber den -2, dass sie für (s, z) gleich (s_1, z_1), (s_2, z_2), ... (s_p, z_p) unendlich wird, sonst aber in T' endlich und stetig ist. Dieselben Eigenschaften besitzt die Function

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_p} \\ -t(\varepsilon_1; s, z) & -t(\varepsilon_2; s, z) & \dots & -t(\varepsilon_p; s, z) \\ \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1} & \frac{\partial u_p}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix} : \left| \frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda} \right|,$$

$\frac{\partial u_\varkappa}{\partial z_\nu}$ kurz für $\frac{\partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu}$ gesetzt. Diese beiden Functionen können sich nur durch eine von (s, z) unabhängige additive Constante unterscheiden. Die Differenz der beiden Functionen ist nämlich in T einwerthig und in p und nur p *willkürlich* vorgegebenen Punkten (s_1, z_1), (s_2, z_2), ... (s_p, z_p) unendlich gross erster Ordnung. Eine solche Function ist nothwendig in Bezug auf (s, z) constant, weil zwischen den p Punkten, in denen eine Function einer $2p+1$ fach zusammenhängenden Fläche T unendlich gross erster Ordnung wird, nothwendig eine Relation stattfinden muss (R. pag. 122). Differentiiren wir die hieraus entspringende Gleichung nach z, so ist der Differentialquotient von jener Constanten frei und man hat

$$(7.)\quad \left\{ \begin{aligned} & -\left| \frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda} \right| \cdot \sum_1^p{}_{\varrho'} \frac{\partial \lg \vartheta^2(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial v_\varrho \partial v_{\varrho'}} \frac{\partial u_{\varrho'}(s, z)}{\partial z} \\ & = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_p} \\ t'(\varepsilon_1; s, z) & t'(\varepsilon_2; s, z) & \dots & t'(\varepsilon_p; s, z) \\ \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1} & \frac{\partial u_p}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix}, \end{aligned} \right.$$

wenn unter $t'(\varepsilon_\mu; s, z)$ der Differentialquotient $\frac{\partial t(\varepsilon_\mu; s, z)}{\partial z}$ verstanden wird.

4.

Multipliciren wir nun die Gleichung (7.) mit s und setzen $z = k_\mu$, so folgt daraus mit Rücksicht auf (6.)

$$\left|-\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda}\right| \cdot \sum_1^p{}_{\varrho'} \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial v_\varrho . \partial v_{\varrho'}} \cdot \frac{\sum_1^p{}_{(r)} \alpha_r^{(\varrho')} k_\mu^{r-1} . \sum_1^p{}_{(r')} \alpha_{r'}^{(\varkappa)} k_\mu^{r'-1}}{\prod_1^{2p+2}{}_{(\nu)}^{(\mu)} (k_\mu - k_\nu)}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_p} \\ \frac{\partial u_\varkappa}{\partial z_1 \partial k_\mu} & \frac{\partial u_\varkappa}{\partial z_2 \partial k_\mu} & \dots & \frac{\partial u_\varkappa}{\partial z_\mu \partial k_\mu} \\ \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1} & \frac{\partial u_p}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix}.$$

Wählt man für die willkürliche Zahl $\varkappa$ die Zahl ϱ und wendet auf die linke Seite die Gleichung (4.) an und bildet die Summe der erhaltenen Ausdrücke für $\varrho = 1$, $\varrho = 2$, ... $\varrho = p$, so folgt daraus die Gleichung

$$(8.) \qquad \frac{1}{4} \left(\sum_1^p\right)^2_{(\varrho\varrho')} \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial v_\varrho . \partial v_{\varrho'}} \frac{\partial a_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lg \left|\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda}\right|}{\partial k_\mu}.$$

Wenn nun

$$(v_1, v_2, \dots v_p) = (0, 0, \dots 0)$$

gesetzt wird, so bestehen (*R.* pag. 151) die Gleichungen

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lg \vartheta}{\partial v_\varrho \partial v_{\varrho'}} = \frac{\partial \lg \vartheta}{\partial a_{\varrho\varrho'}}, \qquad \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \lg \vartheta}{\partial v_\varrho \partial v_\varrho} = \frac{\partial \lg \vartheta}{\partial a_{\varrho\varrho}},$$

aus welchen folgt, wenn man sie auf (8.) anwendet,

$$(9.) \qquad \frac{\partial \lg \vartheta(0, 0, \dots 0)}{\partial k_\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lg |\alpha_\lambda^{(\lambda')}|}{\partial k_\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg}{\partial k_\mu} \sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)} (z_\varrho^{(\mu)} - k_\mu)},$$

worin $z_1^{(\mu)}$, $z_2^{(\mu)}$, ... $z_p^{(\mu)}$ solche (von k_μ verschiedene) Verzweigungspunkte bedeuten, für welche

$$(\dots, u_\nu(0, k_\mu) - \sum_1^p{}_{(\varrho)} u_\nu(0, z_\varrho^{(\mu)}), \dots) \equiv (0, 0, \dots 0)$$

ist. Zur Herleitung der rechten Seite der Gleichung (9.) aus der Gleichung (8.) benutzt man den Productsatz der Determinanten.

Es mag nun mit Discr.$(h_1, h_2, \dots h_p; g_1, g_2, \dots g_p)$ das Product aller Differenzen von solchen $p+1$ Verzweigungswerthen, worin der Punkt mit grösserem Index immer der Minuendus ist, bedeuten, welche die Eigenschaft besitzen, dass

$$(\dots, -\sum_{(\varrho)}^{(p)} u_\nu(0, k_\varrho) + u_\nu(0, k_{\varrho'}), \dots) \equiv \left(\dots, g_\nu \frac{i\pi}{2} + \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho \frac{a_{\nu\varrho}}{2}, \dots\right)$$

nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u ist, und Discr.$'(h_1, h_2, \dots h_p; g_1, g_2, \dots g_p)$ das ebenso geordnete Differenzenproduct der $p+1$ übrigen Verzweigungspunkte, welche dieselbe Eigenschaft haben. Dann wird die Relation (9.), wie man sofort erkennt, durch die Gleichung integrirt

$$\lg \vartheta(0, 0, \dots 0) = \text{Const.} + \lg \sqrt{\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}} + \lg \sqrt[4]{\text{Discr.}(0, 0, \dots 0) . \text{Discr.}'(0, 0, \dots 0)},$$

worin die Constante von k_μ, und da μ willkürlich ist, von sämmtlichen Verzweigungswerthen unabhängig ist. Es enthält aber Discr.$(0, 0, \dots 0)$ die Verzweigungspunkte mit geraden, Discr.$'(0, 0, \dots 0)$ die Verzweigungspunkte mit ungeraden Indices.

Um die Constante zu bestimmen, setzen wir $k_2 = k_1 + \varDelta_1$, $k_4 = k_3 + \varDelta_2, \dots k_{2p} = k_{2p-1} + \varDelta_p$ und lassen die $\varDelta$ gegen Null convergiren. Dann erhält (nach Art. 1) $\lg \vartheta(0, 0, \dots 0)$ den Werth Null und $\sqrt{\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}}$ den Werth

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\text{Discr.}(0, 0, \dots 0)\, \text{Discr.}'(0, 0, \dots 0)}},$$

woraus sich ergiebt, dass die additive Constante Null sein muss. Demnach kann in dem Ausdruck

$$(11.) \qquad \vartheta(0, 0, \dots 0) = \sqrt{\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}} \cdot \sqrt[4]{\text{Discr.}(0, 0, \dots 0) . \text{Discr.}'(0, 0, \dots 0)}$$

nur noch ein Zweifel über die Wahl der vierten Wurzel der Einheit sein, welche in das Wurzelzeichen eingerechnet ist. Um dieses festzulegen, nehme man die Grössen $k_1, k_2, \dots k_{2p+2}$ reell und der Grösse gemäss nach den Ungleichungen geordnet an

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_{2p+2}.$$

Dann sind die $A_\mu^{(\nu)}$ sämmtlich rein imaginäre und die $B_\mu^{(\nu)}$ rein reelle Grössen, und daher die rechte Seite in (11.) abgesehen von der factoriellen vierten Wurzel der Einheit reell. Die $a_{\mu\mu'}$ aber sind dann alle rein reelle (den Convergenzbedingungen immer von selbst genügende) Grössen, folglich ist jedes Glied der ϑ-Reihe, folglich $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ eine positive reelle Grösse. Demnach müssen die Wurzeln der rechten Seite so genommen werden, dass der ganze Ausdruck positiv reell ist.

Das Vorzeichen für jede andere Lage der Verzweigungspunkte ergiebt sich durch stetige Ueberführung derselben aus der reellen, wie angegeben geordneten Lage in die vorgegebene Lage.

5.

Der Werth von $u_\mu(0, k_\nu)$ ist in der Form enthalten

$$\sum_1^p {}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\nu)} a_{\mu\varrho} + g_\mu^{(\nu)} i\pi,$$

worin $h_\varrho^{(\nu)}$, $g_\mu^{(\nu)}$ Brüche sind, deren Nenner $2(p-1)$ ist. Wir setzen im Folgenden

$$v_\mu^{(\nu)} = u_\mu(0, k_\nu) - \sum_1^p {}_{(\varrho)} u_\mu(s_\varrho, z_\varrho)$$

und

$$\vartheta_\nu = e^{2\sum_1^p {}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\nu)} v_\varrho^{(\nu)}} . \vartheta(v_1^{(\nu)}, v_2^{(\nu)}, \dots v_p^{(\nu)}).$$

Dann ist (*R.* pag. 154) der Quotient

$$\frac{e^{\sum_1^p {}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\mu)} (u_\varrho(0, k_\mu) - u_\varrho(0, k_\nu))}}{e^{\sum_1^p {}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\nu)} (u_\varrho(0, k_\nu) - u_\varrho(0, k_\mu))}} \cdot \frac{\vartheta_\nu}{\vartheta_\mu}$$

eine zweiwerthige Function in T, die in dem Punkte k_μ unendlich und in dem Punkte k_ν Null wird in Bezug auf jede der Variabeln $z_1, z_2, \dots z_p$, und die zu beiden Seiten der Querschnitte nur durch Quadratwurzeln der Einheit verschiedene Werthe annimmt. Sie ist daher in der Form enthalten:

$$\text{Const.} \sqrt{\prod_1^p {}_{(\varrho)} \frac{z_\varrho - k_\nu}{z_\varrho - k_\mu}}.$$

Wirft man einmal $z_1, z_2, \dots z_p$ auf p von k_μ, k_ν verschiedene Verzweigungswerthe und ein andermal $z_1, z_2, \dots z_p$ auf die p übrigen von k_μ, k_ν verschiedenen Verzweigungswerthe, so erhält für diese beiden Annahmen der obige ϑ-Quotient abgesehen vom Vorzeichen einander reciproke Werthe, woraus sich für die Constante, die wir mit $C_{\mu\nu}$ bezeichnen, der Werth ergiebt

$$\sqrt[4]{\prod_{1\,(\varrho)}^{2p+2\,(\nu,\mu)} \frac{k_\mu - k_\varrho}{k_\nu - k_\varrho}} \;{}^{*}),$$

woraus die Gleichung fliesst:

$$(12.)\quad \frac{e^{\sum_{1}^{p}(\varrho)\, h_\varrho^{(\mu)}(u_\varrho(0,k_\mu) - u_\varrho(0,k_\nu))}}{e^{\sum_{1}^{p}(\varrho)\, h_\varrho^{(\nu)}(u_\varrho(0,k_\nu) - u_\varrho(0,k_\mu))}} \cdot \frac{\vartheta_\nu}{\vartheta_\mu} = \frac{\sqrt[4]{\prod_{1\,(\varrho)}^{2p+2\,(\nu,\mu)}(k_\mu - k_\varrho)}}{\sqrt[4]{\prod_{1\,(\varrho)}^{2p+2\,(\nu,\mu)}(k_\nu - k_\varrho)}} \cdot \sqrt{\prod_{1}^{p}(\varrho)\, \frac{z_\varrho - k_\nu}{z_\varrho - k_\mu}}.$$

Hierin ist nur noch die Wahl der vierten Wurzel der Einheit, welche in den Wurzelzeichen steckt, zweifelhaft. Aus der Gleichung (12.) leitet man leicht die unter der über die ganzen Zahlen h, g zu machenden Voraussetzung

$$\sum_{1}^{p}(\varrho)\, h_\varrho g_\varrho \equiv 0 \pmod{2},$$

giltige Gleichung ab (Conf. die Einleitung in Bezug auf die Bezeichnung)

$$(13.)\quad \vartheta_{h_1, h_2, \dots g_p}(0, 0, \dots 0) = \sqrt{\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}} \cdot \sqrt[4]{\text{Discr.}(h_1, h_2, \dots g_\mu) \,.\, \text{Discr.}'(h_1, h_2, \dots g_p)},$$

worin für reelle, der Grösse nach wie die Indices geordnete k die Wurzeln positiv reell zu nehmen und den Grössen h, g nur die Werthe 0 oder 1 zuzuertheilen sind. Hierdurch ist das complexe Vorzeichen der Gleichung (12.) mit bestimmt, wenn nicht h, g solche Zahlen sind, für welche die Gleichung (13.) in $0 = 0$ übergeht.

Bezeichnen wir nun mit $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_p$, p Verzweigungspunkte, und mit $\vartheta_{\sigma_\varepsilon}$ diejenige ϑ-Function $\vartheta_{h_1, h_2, \dots g_p}$, in welcher die h und g aus der Congruenz entnommen werden

$$(A.)\quad \left(\dots, \sum_{1}^{p}(\varrho)\, u_\varkappa(\sigma_\varrho) - u_\varkappa(\sigma_\varepsilon), \dots\right) \equiv \left(\dots, \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{p}(\varrho)\, a_{\varkappa\varrho} h_\varrho + g_\varkappa \frac{i\pi}{2}, \dots\right).$$

Bezeichnen wir mit $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{p+2}$ die übrigen Verzweigungspunkte und mit $\vartheta_{\tau_\varepsilon}$ diejenige ϑ-Function $\vartheta_{h_1, h_2, \dots g_p}$, in welcher die h und g aus der Congruenz entnommen werden

$$(B.)\quad \left(\dots, u_\varkappa(\tau_\nu) - \sum_{1}^{p}(\varrho)\, u_\varkappa(\tau_\varrho), \dots\right) \equiv \left(\dots, \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{p}(\varrho)\, a_{\varkappa\varrho} h_\varrho + g_\varkappa \frac{i\pi}{2}, \dots\right),$$

in der die Summation der linken Seite über die p von τ_ν, τ_ε verschiedenen Verzweigungspunkte τ zu erstrecken sind. So können wir, die Argumente der ϑ-Functionen $v_1, v_2, \dots v_p$ alle gleich Null genommen, die Gleichung beweisen

$$(14.)\quad \left|\frac{\partial \vartheta_{\sigma_{\lambda'}}}{\partial v_\lambda}\right| = \pm \vartheta_{\tau_1} . \vartheta_{\tau_2} \dots \vartheta_{\tau_{p+2}},$$

*) Zur Erklärung der Bezeichnung diene die Gleichung $\prod_{1\,(\varrho)}^{n\,(\nu,\mu)} \varphi(\varrho) = \dfrac{\prod_{1}^{n}(\varrho)\, \varphi(\varrho)}{\varphi(\nu) . \varphi(\mu)}$.

welche für den Fall $p=2$ schon von Herrn *Rosenhain* in seiner Preisarbeit über vierfach periodische Functionen (Gl. 116) angegeben ist.

Zu dem Ende bezeichnen wir noch mit $\vartheta_{\tau_\varepsilon, \sigma}$ diejenige ϑ-Function $\vartheta_{h_1, h_2, \dots g_p}$, bei welcher die h, g der Congruenz entnommen werden

$$(C.)\qquad (\dots, u_\varkappa(\tau_\varepsilon) - \sum_1^p{}_{(\varrho)} u_\varkappa(\sigma_\varrho), \dots) \equiv (\dots, \tfrac{1}{2}\sum_1^p{}_{(\varrho)} a_{\varkappa\varrho} h_\varrho + g_\varkappa \frac{i\pi}{2}, \dots),$$

mit $\Delta(\sigma)$ das Product aller (einmaligen) Differenzen der Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_p$, mit $\Delta^{(\nu)}(\sigma)$ das der Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_{\nu-1}, \sigma_{\nu+1}, \dots \sigma_p$, mit $\Delta(\tau)$ das Product aller Differenzen der Grössen $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{p+2}$, mit $\Delta(\tau, \sigma_\nu)$ das der Grössen $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{p+2}, \sigma_\nu$, und mit $\Delta'^{(\nu)}(\tau)$ das der Grössen $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}, \dots \tau_{p+2}$, mit Discr.$(\tau_\varepsilon)$, Discr.$'(\tau_\varepsilon)$ die Grössen Discr.$(h_1, h_2, \dots g_p)$, Discr.$'(h_1, h_2, \dots g_p)$, wenn die h, g aus der Congruenz $(B.)$ entnommen werden, mit Discr.$(\tau_\varepsilon, \sigma)$, Discr.$'(\tau_\varepsilon, \sigma)$ die Grössen Discr.$(h_1, h_2, \dots g_p)$, Discr.$'(h_1, h_2, \dots g_p)$, wenn die h, g der Congruenz $(C.)$ entnommen werden, mit $Q_\mu^{(\nu)}$ aber bezeichnen wir den Quotienten auf der linken Seite der Gleichung (12.), wenn darin k_μ durch τ_μ, k_ν durch σ_ν ersetzt wird. Dann haben wir aus (12.)

$$\frac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial z_{\nu'}} = \tfrac{1}{2} C_{\mu\nu} \sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)} \frac{z_\varrho - \sigma_\nu}{z_\varrho - \tau_\mu}} \cdot \left(\frac{1}{z_{\nu'} - \tau_\mu} - \frac{1}{z_{\nu'} - \sigma_\nu} \right),$$

und daraus

$$2^p \left| \frac{\partial Q_\mu^{(\lambda')}}{\partial z_\lambda} \right| \cdot \sqrt{\frac{\prod_1^p{}_{(\varrho)} (z_\varrho - \tau_\mu)^p}{(\prod_1^p)^2_{(\varrho\varrho')} (z_\varrho - \sigma_{\varrho'})}} = 2^p \left| \frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda} \right| \cdot \left| \frac{\partial Q_\mu^{(\lambda')}}{\partial v_\lambda} \right| \cdot \sqrt{\frac{\prod_1^p{}_{(\varrho)} (z_\varrho - \tau_\mu)^p}{(\prod_1^p)^2_{(\varrho\varrho')} (z_\varrho - \sigma_{\varrho'})}}$$

$$= C_{\mu 1} . C_{\mu 2} \dots C_{\mu p} . \left| \frac{1}{z_\lambda - \tau_\mu} - \frac{1}{z_\lambda - \sigma_{\lambda'}} \right|,$$

worin $C_{\mu 1}, C_{\mu 2}, \dots C_{\mu p}$ diejenigen Grössen sind, die aus den früheren $C_{\mu 1}, \dots$ entstehen, wenn in ihnen k_μ durch τ_μ, k_ν durch σ_ν ersetzt werden. Setzen wir nun $z_1 = \sigma_1$, $z_2 = \sigma_2$, $\dots z_p = \sigma_p$, so folgt hieraus, wenn wir das Vorzeichen in die Wurzeln einrechnen,

$$(15.)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{\partial Q_\mu^{(\lambda')}}{\partial v_\lambda} \right| = \dfrac{\Delta(\sigma) . \prod_1^p{}_{(\varrho)} C_{\mu\varrho}}{2^p |\alpha_\lambda^{(\lambda')}|} . \sqrt{\dfrac{\prod_1^p{}_{(\varrho)} \prod_1^{p+2}{}_{(\varrho')} (\sigma_\varrho - \tau_{\varrho'})}{\prod_1^p{}_{(\varrho)} (\sigma_\varrho - \tau_\mu)^p}} \\[2ex] \qquad = \dfrac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p} . \sqrt[4]{\dfrac{(\Delta(\sigma))^2 . \prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}^{(\mu)} (\tau_\mu - \tau_\varrho) \prod_1^p{}_{(\varrho)} \prod_1^{p+2}{}_{(\varrho')} (\sigma_\varrho - \tau_{\varrho'})}{\prod_1^p{}_{(\varrho)} (\sigma_\varrho - \tau_\mu)^p}} . \end{cases}$$

Der Ausdruck $\dfrac{\vartheta_{\tau_1}.\vartheta_{\tau_2}\dots\vartheta_{\tau_{p+2}}}{(\vartheta_{\tau_\mu,\sigma})^p}$ ist aber nach der Gleichung (13.) gleich

$$\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}\sqrt[4]{\frac{\text{Discr.}(\tau_1)\,\text{Discr.}(\tau_2)\dots\text{Discr.}(\tau_{p+2})\,\text{Discr.}'(\tau_1)\dots\text{Discr.}'(\tau_{p+2})}{(\text{Discr.}(\tau_\mu,\sigma)\,\text{Discr.}'(\tau_\mu,\sigma))^p}}$$

$$=\sqrt[4]{\frac{(\Delta(\tau))^p(\Delta(\sigma))^{p+2}.\prod_1^p{}_{(\varrho)}\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho')}(\tau_{\varrho'}-\sigma_\varrho)}{(\Delta(\sigma))^p.\prod_1^p{}_{(\varrho)}(\tau_\mu-\sigma_\varrho)^p.\left(\dfrac{\Delta(\tau)}{\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}^{(\mu)}(\tau_\mu-\tau_\varrho)}\right)^p}}.$$

Und hieraus folgt, abgesehen von einer vierten Wurzel der Einheit, die in das Wurzelzeichen eingerechnet wird,

$$(16.)\qquad \frac{\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}\vartheta_{\tau_\varrho}}{(\vartheta_{\tau_\mu,\sigma})^p}=\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}\sqrt[4]{\frac{\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}^{(\mu)}(\tau_\mu-\tau_\varrho)^p.(\Delta(\sigma))^2.\prod_1^p{}_{(\varrho)}\prod_1^{p+2}{}_{\varrho'}(\tau_{\varrho'}-\sigma_\varrho)}{\prod_1^p{}_{(\varrho)}(\tau_\mu-\sigma_\varrho)^p}}.$$

Aus der Gleichheit der rechten Seiten der beiden Relationen (15.) und (16.) folgt nun die Richtigkeit der Gleichung (14.), wenn noch bewiesen wird, dass sie auch noch in Bezug auf die vierte Wurzel der Einheit richtig ist, welche wegen der Vernachlässigung der Vorzeichen bei unsern Rechnungen noch besonders untersucht werden muss. Man erkennt aber die Richtigkeit der von uns in der Gleichung (14.) angegebenen Wurzel der Einheit, wenn man sämmtliche $a_{\mu\mu'}\dots$ als reell voraussetzt, was immer geschehen kann. Es bleibt aber das Vorzeichen unbestimmt, welches von der Anordnung der Reihen in der Determinante abhängt.

6.

Nun sollen noch die partiellen Differentialquotienten der ungeraden ϑ-Functionen für verschwindende Argumente durch die Verzweigungswerthe dargestellt werden, so weit sie nicht selbst verschwinden. Behalten wir die Bezeichnung des vorigen Art. bei, so haben wir die p Gleichungen

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)}\frac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_\varrho}.\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_1}=\tfrac12 C_{\mu\nu}\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\frac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}.\left(\frac{1}{z_1-\tau_\mu}-\frac{1}{z_1-\sigma_\nu}\right),$$

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)}\frac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_\varrho}.\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2}=\tfrac12 C_{\mu\nu}\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\frac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}.\left(\frac{1}{z_2-\tau_\mu}-\frac{1}{z_2-\sigma_\nu}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)}\frac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_\varrho}.\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_p}=\tfrac12 C_{\mu\nu}\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\frac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}.\left(\frac{1}{z_p-\tau_\mu}-\frac{1}{z_p-\sigma_\nu}\right),$$

aus welchen folgt

$$\frac{2\,\dfrac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_{\nu'}}\cdot\left|\dfrac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda}\right|}{C_{\mu\nu}\sqrt{\prod\limits_1^p{}_{(\varrho)}\dfrac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_{\nu'-1}}{\partial z_1} & \dfrac{1}{z_1-\tau_\mu}-\dfrac{1}{z_1-\sigma_\nu} & \dfrac{\partial u_{\nu'+1}}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_p}{\partial z_1}\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_{\nu'-1}}{\partial z_2} & \dfrac{1}{z_2-\tau_\mu}-\dfrac{1}{z_2-\sigma_\nu} & \dfrac{\partial u_{\nu'+1}}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_p}{\partial z_2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial z_p} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z_p} & \cdots & \dfrac{\partial u_{\nu'-1}}{\partial z_p} & \dfrac{1}{z_p-\tau_\mu}-\dfrac{1}{z_p-\sigma_\nu} & \dfrac{\partial u_{\nu'-1}}{\partial z_p} & \cdots & \dfrac{\partial u_p}{\partial z_p}\end{vmatrix}$$

oder

$$\frac{2\,\dfrac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_{\nu'}}}{C_{\mu\nu}\sqrt{\prod\limits_1^p{}_{(\varrho)}\dfrac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}}=\sum_1^p{}_{(\varrho)}\left(\frac{s_\varrho}{z_\varrho-\tau_\mu}-\frac{s_\varrho}{z_\varrho-\sigma_\nu}\right)\frac{\delta\lg\left|\left(\sum\limits_1^p{}_{(\varrho')}z_\lambda^{\varrho'-1}.\alpha_{\varrho'}^{(\lambda')}\right)\right|}{\delta\left(\sum\limits_1^p{}_{(\varrho')}\alpha_{\varrho'}^{(\nu')}z_\varrho^{\varrho'-1}\right)}.$$

Wendet man hierauf einen bekannten Determinantensatz (*Baltzer* §. 6, 5) an, und setzt $z_1=\sigma_1$, $z_2=\sigma_2$, $\ldots$ $z_p=\sigma_p$, so folgt abgesehen von der Wahl der vierten Wurzel der Einheit

$$\frac{\partial\vartheta_{\sigma_\nu}}{\partial v_{\nu'}}=\tfrac{1}{2}\vartheta_{\tau_\mu,\sigma}\cdot C_{\mu\nu}\cdot\frac{\prod\limits_1^p{}_{(\varrho)}^{(\nu)}(\sigma_\nu-\sigma_\varrho)\cdot\sqrt{\prod\limits_1^{p+2}{}_{(\varrho)}(\sigma_\nu-\tau_\varrho)}}{\sqrt{\prod\limits_1^p{}_{(\varrho)}(\sigma_\varrho-\tau_\mu)}}\cdot\sum_1^p{}_{(r)}\frac{\delta\lg|\alpha_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta\alpha_{\nu'}^{(r)}}\cdot\frac{\delta\lg|\sigma_\lambda^{\lambda'-1}|}{\delta\sigma_\nu^{r-1}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\vartheta_{\tau_\mu,\sigma}\cdot C_{\mu\nu}\sqrt{\frac{\prod\limits_1^{p+2}{}_{(\varrho)}(\sigma_\nu-\tau_\varrho)}{\prod\limits_1^p{}_{(\varrho)}(\sigma_\varrho-\tau_\mu)}}\cdot\sum_1^p{}_{(r)}\frac{\delta\lg|\alpha_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta\alpha_{\nu'}^{(r)}}\cdot S_{r-1}^{(\nu)}(\sigma),$$

worin

$$S_0^{(\nu)}(\sigma)=1,\qquad S_1^{(\nu)}(\sigma)=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{\nu-1}+\sigma_{\nu+1}+\cdots+\sigma_p,$$

$$S_2^{(\nu)}(\sigma)=\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\cdots+\sigma_1\sigma_{\nu-1}+\sigma_1\sigma_{\nu+1}+\cdots+\sigma_1\sigma_p+\sigma_2\sigma_3+\cdots+\sigma_{p-1}\sigma_p,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$S_{p-1}^{(\nu)}(\sigma)=\sigma_1.\sigma_2\ldots\sigma_{\nu-1}.\sigma_{\nu+1}\ldots\sigma_p$$

zu nehmen ist.

Ersetzen wir nun noch $\vartheta_{\tau_\mu,\sigma}$ durch den in der Gleichung (13.) gefundenen Ausdruck, so findet man nach einigen Reductionen:

$$(17.)\qquad \frac{\partial \vartheta_{\sigma_\nu}}{\partial v_{\nu'}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt[4]{\Delta^{(\nu)}(\sigma).\Delta(\tau,\sigma_\nu)}\,.\,\sum_1^p{}_{(\varrho)} A_{\nu'}^{(\varrho)} S_{\varrho-1}^{(\nu)}(\sigma)}{2\pi i\sqrt{(2\pi i)^p}\,.\,\sqrt{|A_\lambda^{(\lambda')}|}}.$$

Für reelle, der Grösse nach wie die Indices geordnete k sind die Wurzeln so zu nehmen, dass die rechte Seite positiv reell ist.

Hiermit ist das vorgestreckte Ziel erreicht. Man kann noch leicht nachweisen, dass die geraden ϑ-Functionen, welche nicht mit den Argumenten v verschwinden, sämmtlich in der Form $\vartheta_{\tau_\mu,\sigma}$ enthalten und somit für verschwindende Argumente hier dargestellt sind. Die Anzahl der dargestellten geraden ϑ-Functionen aber ist $\frac{1}{2}\cdot\frac{2p+2}{1}\cdot\frac{2p+1}{2}\cdot\frac{2p}{3}\cdots\cdots\frac{p+2}{p+1}$, die Anzahl der überhaupt vorhandenen geraden ϑ-Functionen ist $2^{2p-1}+2^{p-1}$, und daher giebt es schon für $p=3$ eine, für $p>3$ mehrere mit den Argumenten verschwindende gerade ϑ-Functionen. Ebenso verschwinden für $p>2$ die partiellen Differentialquotienten einiger ungeraden ϑ-Functionen mit den Argumenten. In beiden Fällen giebt es höhere Differentialquotienten, welche nicht mit den Argumenten verschwinden, deren Auswerthung für verschwindende Argumente mit ähnlichen als den hier angewandten Mitteln ausgeführt werden kann. Man erhält aber die Systeme der Zahlen h, g, für welche erst die zweiten oder höhern Differentialquotienten von $\vartheta_{h_1,h_2,\ldots g_p}(v_1,v_2,\ldots v_p)$ mit den Argumenten nicht verschwinden, während die niedern und die Function selbst Null werden, wenn man diese Zahlen aus der Congruenz entnimmt

$$\Big(\ldots,\, u_\varkappa(0,k_\mu)-\sum_{(\varrho)}^p u_\varkappa(0,k_\varrho),\ldots\Big) \equiv \Big(\ldots,\,\tfrac{1}{2}\sum_1^p{}_{(\varrho)} a_{\varkappa\varrho}h_\varrho + g_\varkappa\frac{i\pi}{2},\,\ldots\Big)$$

und von den in der Summe $\sum_{(\varrho)}^p u_\varkappa(0,k_\varrho)$ enthaltenen beliebigen Verzweigungspunkten k_ϱ zwei oder mehrere dieselben sein lässt.

Halle, Juni und Juli 1869.