UN CONFRONTO FRA LA TEORIA ELETTRONICA
DEI METALLI E L'ESPERIENZA. — LA RELAZIONE
FRA POTERE TERMoeLETTRICO E RESISTENZA
DEL BISMUTO, COME FUNZIONI DEL CAMPO.

Nota del Prof. M. LA ROSA.

1. — Mi propongo in questa Nota di stabilire un confronto fra i risultati sperimentali, che ho già ottenuti dallo studio dell'andamento della resistenza elettrica e del potere termo-elettrico del Bi in campi magnetici crescenti, e quelli a cui si può giungere, applicando e sviluppando le leggi e i concetti fondamentali della teoria elettronica dei metalli.

Non ho bisogno di affermare l'utilità e l'importanza di tale compito, perchè tutti conoscono come siano relativamente poche le verifiche dirette a cui la teoria si è prestata, e come siano gravi le difficoltà che sono sorte in tutti questi tentativi di controlli numerici.

Si sa che la conducibilità elettrica σ viene espressa dalla formula ¹⁾

$$(1) \quad \sigma = \frac{e^2 n v l}{4 \alpha T}$$

dove i simboli hanno i significati seguenti:

e carica di un jone monovalente

n numero di corpuscoli liberi per cm.³ del metallo, o concentrazione elettronica

v velocità media di agitazione dei corpuscoli

l cammino medio libero

T temperatura assoluta

α costante universale dei gas.

¹⁾ Nella teoria di Lorentz questa legge resta valevole salvo un mutamento nel fattore numerico.

2. — Finora la teoria non ha preso di mira che i mutamenti che questa grandezza subisce con la temperatura, e si sa che le esperienze di Jaeger e Diesselhorst hanno mostrato che il coefficiente termico nei diversi metalli oscilla fra $3,40.10^{-3}$ e $4,69.10^{-3}$ invece di mantenere il valore costante $3,67.10^{-3} = \frac{1}{273}$ voluto dalla teoria.

Del cambiamento di σ sotto l'azione del campo magnetico che avviene in misura molto notevole in alcuni metalli, si è finora poco occupata e non ha trovato una spiegazione soddisfacente ¹⁾.

Evidentemente l'azione del campo si può fare sentire su tre fattori della σ ; cioè su l , v , n .

In quasi tutti gli sviluppi finora fatti, la teoria ha trascurato di tener conto degli eventuali cambiamenti che tali fattori possono subire sotto l'azione di svariate cause, ed a mala pena essa ha tentato di tenere conto dell'influenza che può esercitare la temperatura.

Sarebbe certo di molto vantaggio, per lo sviluppo ulteriore della teoria, conoscere da quali cause, e come, vengano influenzati questi elementi importantissimi; potremmo avere allora delle immagini più adeguate di parecchi fenomeni, come per es. dell'effetto Hall e degli altri dello stesso gruppo.

3. — Per uno di essi e precisamente per n si può — anzi *si deve* — affermare la dipendenza dall'intensità del campo magnetico H ; almeno nel caso di quei corpi che sotto l'azione del campo presentano un mutamento dell'effetto Volta, e dei fenomeni che vi si rilegano immediatamente.

¹⁾ Nel fascicolo 1.° e 2.° del vol. XXVIII degli *Atti della R. Acc. dei Lincei* il Prof. Corbino ha pubblicato un lavoro su questo argomento, nel quale si ammette la presenza di due specie di elettroni. Come si sa, questa ipotesi non è suffragata da fatti sperimentali, e conduce a gravissime difficoltà nello sviluppo delle altre branche della teoria degli elettroni (cfr. p. es. Lorentz, *Conferenze di Gottinga*, Teubner 1914), cosicchè ogni tentativo diretto a ricondurre la spiegazione dei fatti nel quadro della teoria generalmente ammessa (che suppone l'esistenza dei soli elettroni negativi) conserva tutto il suo valore. (Nota aggiunta sulle bozze).

Infatti fra gli elementi che la teoria elettronica prende in considerazione pel giungere all'espressione della f. e. m. al contatto di due metalli;

$$V_{a,b} = \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e} \log \frac{n_a}{n_b}$$

o a quello dell'effetto Peltier e del potere termoelettrico, che immediatamente se ne ricavano, quelli che possono subire un mutamento per azione del campo sono soltanto i due valori di n . Volendo quindi spiegare i mutamenti di questi effetti che l'esperienza ha permesso di svelare in parecchie coppie sotto l'influenza del campo, è giocoforza ammettere, che almeno per uno dei metalli di ciascuna coppia, n risulti funzione di H , se non si vuole rinunciare alle basi stesse della teoria elettronica dei metalli.

Nè questa conclusione può venire *alterata* introducendo l'ipotesi dell'esistenza di *più specie di elettroni* differenti¹⁾; poichè si sa che l'espressione di $V_{a,b}$, non viene perciò a mutare, dovendo solo restare valida rispetto a ciascuna delle differenti specie di corpuscoli ammesse. (Cfr. Drude, in Drude *Ann.* vol. I, pag. 590-1900).

1) L'espedito di attribuire i fenomeni elettrici nei metalli alla esistenza di due specie di elettroni non ci sottrae dunque alla necessità di pensare che n debba risultare funzione di H .

Questo fatto basta per assicurare la preferenza alla comune teoria degli elettroni di fronte ai tentativi *dualistici*, che di quando in quando sono stati intrapresi.

L'ipotesi dualistica, in fondo, non fa che giovare dell'arbitrarietà introdotta nella teoria per mezzo delle nuove grandezze contemplate (numero, velocità dei corpuscoli positivi), per potere soddisfare certe relazioni che la teoria ordinaria (la *unitaria*), nella forma finora raggiunta, non soddisfa.

Però quando in questa ammettiamo — come abbiamo visto che *si deve fare* — che n sia funzione di H , acquistiamo una libertà di azione ben più grande. Ed è chiaro che il processo logico naturale c'impone di sfruttare interamente la nuova risorsa prima che potessimo deciderci a complicare maggiormente le basi dell'edificio teorico, introducendo una seconda specie di corpuscoli, sinora rimasti inaccessibili all'esperienza.

Un'immagine concreta del meccanismo con cui si può spiegare questa influenza del campo sul numero n si può ottenere applicando alla teoria dei metalli, l'ordine di idee brillantemente sviluppato dal Prof. Righi per i suoi raggi magnetici.

Secondo la teoria elettronica dei metalli, si può pensare che una certa frazione degli atomi neutri di tali corpi sia dissociata in joni positivi ed elettroni negativi; i quali ultimi sfuggono alla compagine atomica, per vagare negli spazi interatomici con grande velocità. Gli individui dello sciame di elettroni che ne risulta, nei loro movimenti disordinati, urtano incessantemente, e contro atomi neutri, e contro joni positivi. In questi urti — che per lo più saranno urti impropri — alcuni elettroni vengono catturati e costretti a girare attorno al centro urtato; essi possono allora, o ricostituire degli atomi neutri — se il centro urtato è un jone positivo e la distanza alla quale l'elettrone urtante viene a trovarsi da essa è quella voluta per la ricostituzione dell'atomo — oppure formare dei complessi elettrostaticamente neutri (forse anche caricati negativamente) in cui l'elettrone resta costretto a girare attorno al centro. In questo caso la distanza, a cui il corpuscolo si manterrà dal centro, sarà maggiore di quella occorrente per la ricomposizione dei due enti in un atomo neutro, in modo che l'insieme si dovrà comportare come un piccolo magnete elementare ¹⁾.

Mentre si ricostituiscono gli atomi neutri o si formano questi « *complessi magnetici* », in seguito agli urti stessi, nuovi atomi si dissociano, nuovi complessi magnetici si dissolvono in modo che si avrà una condizione stazionaria, in cui vi saranno dei rapporti costanti di equilibrio fra atomi

¹⁾ Si può pensare che gli atomi neutri siano insensibili al campo magnetico, e ciò perchè il moto degli elettroni entro l'atomo avverrebbe secondo traiettorie che non racchiudono un'area, oppure perchè vi può essere compenso fra i campi esterni prodotti dai vari elettroni dell'atomo. Le proprietà magnetiche dei corpi dipenderebbero perciò non dagli atomi, ma dai « *complessi magnetici* ».

neutri, complessi magnetici (elettricamente neutri o no), joni positivi ed elettroni liberi.

Quanto più grande sarà il rapporto fra il numero dei complessi magnetici e quello dei centri rimanenti — atomi neutri o joni positivi — tanto più magnetico sarà il corpo in considerazione; quanto più grande sarà il numero degli elettroni liberi, tanto meglio il corpo dovrà condurre il calore e l'elettricità.

4. — Ammesso ciò, è naturale pensare che la presenza di un campo magnetico esterno, dovrà non solo costringere i complessi magnetici ad orientarsi, ma dovrà alterare il rapporto fra il loro numero e quello dei grossi centri rimanenti (atomi o joni) precisamente in certi casi tale rapporto può crescere, in altri decrescere.

Prendiamo a considerare il caso di un corpo paramagnetico.

In un campo esterno i complessi magnetici, contenuti da un tale corpo si orientano, come si sa, in modo da presentare la faccia sud alle linee di forza del campo.

L'elettrone che gira attorno al centro, subirà l'azione del campo e verrà sottoposto ad una forza elettromagnetica diretta in senso opposto alla forza centripeta. Esso tenderà perciò ad allontanarsi dal centro, ed il complesso diventerà quindi meno stabile.

Si concepisce così che la presenza del campo dovrà turbare l'equilibrio, e turbarlo nel senso di diminuire il rapporto fra il numero dei complessi magnetici n_c , e quello totale dei grossi centri N .

Per tal via, a misura che cresce l'intensità del campo, dovrà avvenire una graduale diminuzione della suscettività magnetica del corpo, ed un graduale aumento della sua conducibilità elettrica.

Evidentemente di questi due mutamenti il primo dovrà risultare assai più notevole dell'altro.

Infatti la suscettibilità dipende dal numero dei complessi magnetici per cm.^3 sui quali soltanto il campo ha presa; la

conducibilità dal numero degli elettroni liberi; e questi provengono sia dai complessi magnetici che si sciolgono, sia dagli atomi neutri che si dissociano. In altre parole essendo n_c è il numero dei complessi magnetici, dn_c il mutamento prodottovi da un certo campo, il mutamento della suscettività si dovrà ricondurre direttamente al rapporto $\frac{dn_c}{n_c}$, mentre il mutamento della conducibilità si dovrà ricondurre al rapporto fra lo stesso numero dn_c (che esprime anche la variazione del numero di elettroni liberi dovuta al campo) ed il numero n_c di questi che dev'essere ben più grande di n_c .

Di più le due modificazioni dovranno essere sempre più spiccate quanto più grande è il valore iniziale del rapporto $n_c:N$ (cioè a campo nullo); e quindi sarà più notevole per i corpi ferro-magnetici.

In un corpo diamagnetico avverrà evidentemente l'opposto; il campo magnetico dovrebbe fare crescere la suscettività e diminuire la conducibilità.

5. — È noto che l'esperienza va d'accordo, nelle grandi linee, con tutto ciò; ed è quanto di meglio si può sperare in un primo schizzo di orientazione.

Si sa infatti che il Bi e lo Sb subiscono notevoli aumenti di resistenza nel campo magnetico, qualunque sia la orientazione del campione studiato rispetto al campo. La suscettività di questi corpi, piccola per potere essere sottoposta a misure differenziali di grande precisione, si mantiene costante.

Si sa ancora, che i metalli magneticamente indifferenti (o meglio troppo debolmente magnetici) non accusano variazione della resistenza elettrica per effetto del campo.

Ed infine si sa, che per i metalli ferro-magnetici, nel campo si presenta una diminuzione di resistenza allorchè sono orientati normalmente alle linee di forza, e si sa ancora

che la loro suscettività decresce rapidamente al crescere del campo ¹⁾.

Per tutti poi si comprende come debba intervenire la temperatura, ossia la velocità media del moto di agitazione.

A misura che essa va crescendo, al di sopra di un certo limite, meno obbedienti diventeranno i complessi magnetici all'azione del campo e più scarso il loro numero, sicchè le proprietà magnetiche dovranno tendere a perdersi, e con esse si perderà pure l'influenza che il campo esercita sulla conducibilità.

Non è necessario ricordare che il comportamento sperimentale dei corpi magnetici rispetto al magnetismo segue al crescere della temperatura questa grande linea. Per quanto riguarda il modo di comportarsi delle variazioni di conducibilità dovute al campo, al mutare della temperatura, le esperienze di vari autori, fra le quali quelle di Righi fanno fede del buono accordo.

Di molto interesse sarebbe il potere calcolare i valori dei numeri di atomi neutri, di joni positivi, complessi magnetici, corpuscoli, contenuti in ogni centimetro cubico per i differenti metalli; o meglio determinare le leggi complete di interdipendenza fra essi da una parte, e la intensità del campo, la temperatura ecc. dall'altro. Ma un tale compito appare per il momento troppo arduo.

6. — Mi contenterò qui di ritornare ai modesti propositi enunciati in principio, e cercherò di indagare come il numero n di corpuscoli liberi nel caso del Bi vari al mutare del campo. Per semplicità di calcolo mi riferirò ad un conduttore, che possa riguardarsi come una figura piana disposta

¹⁾ Nella magnetizzazione longitudinale, — che produce in questi metalli l'effetto opposto — possono intervenire in modo più spiccato altri fattori, come per es. i cambiamenti del cammino medio libero, o anche delle modificazioni di struttura, del tipo di quelle già invocate da J. J. Thomson per spiegare altre curiose anomalie. L'effetto osservato sarebbe perciò in ogni caso quello risultante dalla sovrapposizione dei diversi fattori.

normalmente alle linee di forza del campo (per es. suppongo che si tratti di lamine o di strisce, o di spirali piane di spessore trascurabile), e quindi supporrò che le velocità degli elettroni, siano normali alla direzione del campo.

In questa ipotesi il *valore della velocità media v dei corpuscoli non muta*, e però tornando alla relazione (1), osservo che se si riesce a trovare il modo di variare di l con il campo H , allora dallo studio sperimentale di σ , si potrà trarre la legge di variazione di n (sempre in funzione di H).

Ricordo intanto che l , cammino medio libero, è lo spazio medio liberamente percorso da un corpuscolo fra due urti consecutivi, e che tali urti avvengono contro gli atomi, o gli ioni positivi, e i complessi magnetici; i quali costituiscono dei grandi ostacoli, praticamente immobili rispetto ai corpuscoli.

Il numero e le posizioni relative di questi ostacoli, non vengono sensibilmente alterati dalla presenza del campo (a meno che non si voglia tener conto dei piccoli effetti di magnetostirazione che porterebbero correzioni inapprezzabili), sicchè il cambiamento che può subire l , al variare del campo, viene a dipendere solo dal cambiamento di forma, che subisce la traiettoria del corpuscolo fra due urti consecutivi.

In altre parole, al cammino rettilineo l_0 — valore medio della distanza fra due atomi — dovremo sostituire l'arco che ha l_0 per corda, e che appartiene alla traiettoria descritta dal corpuscolo sotto l'azione del campo elettrico e del campo magnetico. Questa traiettoria come si sa è una trocoide.

Però, siccome l_0 è una distanza molto piccola, l'arco che dovremo considerare sarà molto piccolo, e potrebbe avvenire che esso si confonda con la corda. In questo caso la correzione che tentiamo di introdurre nella formula (1) risulterebbe praticamente inapprezzabile.

Noi ammetteremo per il momento che questo non sia il caso; e supporremo per semplicità di considerazioni che detto arco si possa confondere con quello sotteso dalla stessa corda, ed appartenente al circolo osculatore alla curva nell'origine.

Un calcolo facile mostra che il raggio di questo circolo è dato da:

$$R = \frac{1}{\omega} \sqrt{u_0^2 + \left(2 \frac{X}{H} - v_0 \right)^2}$$

in cui u_0 e v_0 sono le componenti della velocità iniziale del corpuscolo secondo gli assi; X è l'intensità del campo elettrico (che si suppone diretto secondo l'asse x), H la intensità del campo magnetico (normale al piano xy), ed $\frac{1}{\omega} = \frac{m}{He}$.

Se pensiamo che u_0 e v_0 sono le componenti medie delle velocità dei corpuscoli si può porre $u_0 = v_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$, essendo v la velocità media. Di più, se teniamo presente che il valore di v è molto grande rispetto a quelli che si possono dare praticamente al rapporto $\frac{X}{H}$, potremo porre per R la relazione:

$$R = \frac{u_0}{\omega} \sqrt{2} = \frac{mv}{eH}$$

la quale dà appunto il raggio del circolo secondo cui il corpuscolo si muoverebbe in assenza del campo elettrico.

Il confronto che faremo delle nostre formole con l'esperienza ci dirà per prima cosa se la correzione introdotta in l_0 sia o no superflua; in secondo luogo se, e fino a che punto, le semplificazioni da noi fatte siano legittime.

Per conseguenza il nuovo cammino medio libero dell'elettrone, l , sarà dato dall'arco AB , sotteso dalla corda l_0 nel circolo di raggio R ; esso verrà perciò espresso da:

$$(3) \quad l = 2R \operatorname{Arc} \sin \frac{l_0}{2R} = 2 \frac{mv}{eH} \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{e}{2mv} l_0 H \right).$$

Questa espressione di l , sostituita nella (1) ci dà:

$$(4) \quad \sigma = \frac{e n_{\pi}}{H} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{e}{2 m v} l_0 H \right)$$

in virtù della relazione $\frac{m v^2}{2} = \alpha T$.

Dalla (4) si trae:

$$n_{\pi} = \frac{\sigma H}{e} \frac{1}{\operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{e}{2 m v} l_0 H \right)}$$

nel secondo membro della quale tutto è costante ad eccezione di H e di σ , che è funzione, sperimentalmente nota, di H .

Il valore di n_{π} dato da questa espressione, dovrebbe essere introdotto in tutte le relazioni, che la teoria elettronica stabilisce, per esprimere quei fenomeni in cui il campo magnetico ha una parte essenziale, come p. es. il fenomeno di Hall.

3. — Nel tentare una verifica sperimentale della relazione precedente conviene prima ridurla a forma più semplice.

Cominceremo per questo a sviluppare l'arcoseno in serie di potenze. Come è noto questo sviluppo è dato da:

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \dots$$

ed è valevole allorchè $x^2 < 1$.

Nel caso nostro, questa condizione è certamente soddisfatta per i valori di $H \leq 10000$ unità. Infatti sappiamo che il rapporto $\frac{e}{m} = 1,75 \cdot 10^7$ (unità elettromagnetiche); che la velocità media di agitazione dei corpuscoli è $1,12 \cdot 10^7$; e quindi abbiamo che il rapporto $\frac{e}{2 m v} = 0,8$.

Per ciò che riguarda l_0 potremmo ammettere con J. J. Thomson che sia dell'ordine 10^{-7} ¹⁾, ma senza volere pregiu-

¹⁾ Cr. J. J. Thomson. « Corpusc. Theory of Matter ». II^a ediz. pag. 54-55, 1907.

dicare questa determinazione, possiamo sempre affermare, che l_0 debba risultare nei metalli minore che nell'aria, per la quale essa è dell'ordine 10^{-5} .

In totale il seno x del nostro arco, sarà certamente $< 10^{-1}$ anche quando il campo abbia valori dell'ordine 10^4 unità; si può quindi concludere che lo sviluppo è lecito, non solo, e che per i fini della verifica esso può essere limitato ai primi due termini.

Riprendendo l'espressione:

$$(6) \quad \sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{e^3 v}{4 \alpha T} n_{\pi} 2 \frac{m v}{e H} \arcsen \left(\frac{e}{2 m v} l_0 H \right)$$

e sostituendo per arcsen i primi due termini del suo sviluppo, otteniamo

$$(6') \quad \sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{e^3 v}{4 \alpha T} l_0 n_{\pi} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{e l_0 H}{2 m v} \right)^2 \right]$$

da cui ricaviamo

$$(7) \quad n_{\pi} = \frac{4 \alpha T}{e^3 v l_0 \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{e l_0}{2 m v} \right)^2 H^2 \right]} \cdot \frac{1}{\rho_{\pi}}$$

dove ρ_{π} rappresenta il valore della resistività sotto l'azione del campo H .

9. — La grandezza n_{π} non è accessibile direttamente alla misura, ma la teoria elettronica ci suggerisce subito l'esempio di un fenomeno che dovrebbe dipendere esclusivamente da n_{π} .

Essa ci fornisce infatti, l'espressione seguente, per il potere termoelettrico di due metalli A e B .

$$(8) \quad P_{AB} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{n_a}{n_b}.$$

Prendiamo a considerare una coppia di due metalli, dei quali uno presenti in modo notevole, e l'altro in modo trascurabile; la variazione di resistenza per effetto del campo. Scegliamo, per precisare le idee, la coppia Cu , Bi . La re-

sistenza elettrica di questo metallo, come è noto, è fortemente influenzata dal campo, mentre quella del primo non lo è affatto.

Ciò fa ritenere come naturale, che il numero n nel Bi dipenda in modo notevole da H , e che tutto il mutamento che troveremo nel potere termoelettrico della coppia, si debba imputare a questo solo metallo ¹⁾.

Considerando i due metalli nell'ordine Cu / Bi, supponendo la coppia immersa nel campo H , e ponendo nella (8) al posto di n_b l'espressione data dalla (7), avremo:

$$(8') \quad P_{\pi} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \left\{ \frac{n_a e^2 v l_o}{4 \alpha T} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{e l_o}{2 m v} \right)^2 H^2 \right] \varrho_{\pi} \right\}.$$

Cercheremo ora di confrontare questa formula con i risultati delle nostre misure relative al mutamento del potere termoelettrico e della resistenza del Bi, pubblicati in un Nota precedente.

Così come è venuta la formula (8') non si presta ancora ad una diretta verifica numerica, perchè occorrerebbe conoscere il numero degli elettroni liberi per cm³. contenuti nel rame (ad una certa temperatura) ed il cammino medio libero degli elettroni nel bismuto in assenza del campo.

Del resto siamo costretti ad impostare diversamente la verifica, anche perchè le nostre misure non danno i valori assoluti di P ma solo delle quantità proporzionali.

Procederemo quindi nel seguente modo: Consideriamo il potere termoelettrico P_0 della nostra coppia a campo nullo, e calcoliamo la differenza $P_{\pi} - P_0$. Avremo:

$$(9) \quad P_{\pi} - P_0 = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \left\{ \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{e l_o}{2 m v} \right)^2 H^2 \right] \frac{\varrho_{\pi}}{\varrho_0} \right\}$$

¹⁾ Le esperienze di Bordoni. (*N. C.*, vol. 2.^o pag. 245-1911) provano direttamente che il rame non interviene nella variazione delle proprietà termoelettriche di coppie Fe / Cu ecc. per effetto del campo.

che scriveremo più semplicemente:

$$(9') \quad P_{\pi} - P_0 = a \log \left[(1 + b H^2) \frac{\rho_{\pi}}{\rho_0} \right].$$

Prendendo un nuovo valore H_1 del campo, che terremo da ora in poi costante, avremo:

$$P_{\pi_1} - P_0 = a \log \left[(1 + b H_1^2) \frac{\rho_{\pi_1}}{\rho_0} \right]$$

e quindi dividendo la seconda per la prima otterremo:

$$(10) \quad \eta = \frac{P_{\pi_1} - P_0}{P_{\pi} - P_0} = \frac{\log \left[(1 + b H_1^2) \frac{\rho_{\pi_1}}{\rho_0} \right]}{\log \left[(1 + b H^2) \frac{\rho_{\pi}}{\rho_0} \right]}$$

da cui.

$$(1 + b H^2)^{\eta} \left(\frac{\rho_{\pi}}{\rho_0} \right)^{\eta} = (1 + b H_1^2) \frac{\rho_{\pi_1}}{\rho_0}.$$

Per quanto fu detto precedentemente l'espressione $(1 + b H^2)^{\eta}$ si può sviluppare in serie, e si può tenere fino al secondo termine; sicchè avremo:

$$(10') \quad (1 + \eta b H^2) \left(\frac{\rho_{\pi}}{\rho_0} \right)^{\eta} = (1 + b H_1^2) \frac{\rho_{\pi_1}}{\rho_0}$$

e quindi

$$(11) \quad b = \frac{\frac{\rho_{\pi_1}}{\rho_0} - \left(\frac{\rho_{\pi}}{\rho_0} \right)^{\eta}}{\eta \left(\frac{\rho_{\pi}}{\rho_0} \right)^{\eta} H^2 - \frac{\rho_{\pi_1}}{\rho_0} H_1^2}$$

la quale si presta bene al confronto colle esperienze.

A questo scopo riprendiamo i numeri della nota citata che danno i mutamenti della resistenza elettrica e del potere termoelettrico di uno *stesso* campione di Bi. Riuniti insieme sono dati dal seguente quadro ¹⁾:

¹⁾ Qualcuno dei numeri della 2.^a e 3.^a colonna differisce — assai poco del resto — da quelli riportati nella Nota citata; ciò perchè fu fatto un certo compenso in base ai diagrammi di rappresentazione di tali risultati.

H	$\Delta P / P_0$	r / r_0	$b \times 10^3$	ε
3150	0,068	1,060	2,65	+ 0,07
3700	0,082	1,080	2,58	0,00
4500	0,100	1,114	2,65	+ 0,07
5100	0,114	1,136	—	—
5900	0,127	1,170	2,62	+ 0,04
6300 *)	0,134 *)	1,190 *)	2,64	— 0,06
6600	0,137	1,204	2,56	— 0,02
7100 *)	0,142 *)	1,223 *)	2,46	— 0,12
7600	0,146	1,250	2,45	— 0,13
9100	0,154	1,320	2,05	—
10100	0,157	1,365	1,89	—

Nel fare i calcoli numerici ho scelto come misura di paragone quella relativa al campo di 5100 unità, perchè intermedia fra le rimanenti, ho posto cioè $H_1 = 5100$.

Il rapporto η per un valore qualunque H del campo viene dato da:

$$\eta = \frac{P_{5100} - P_0}{P_H - P_0} = \left(\frac{\Delta P}{P_0} \right)_{5100} : \left(\frac{\Delta P}{P_0} \right)_H = 0,114 : \left(\frac{\Delta P}{P_0} \right)_H.$$

Quello di $\frac{P_H}{P_0}$ risulta eguale a $\frac{r_H}{r_0}$; sicchè la formola (11) diventa:

$$\frac{1,136 - \left(\frac{r_H}{r_0} \right)^\eta}{\eta H^2 \left(\frac{r_H}{r_0} \right)^\eta - 295,5 \cdot 10^3} = b.$$

Facendo i calcoli in base ai numeri della precedente tabella, si sono trovati per b i numeri segnati nella penultima colonna di essa ⁴⁾.

⁴⁾ I numeri segnati con asterisco non sono stati osservati, ma sono stati presi sulle curve date nella mia Nota avanti citata. Essi danno una bella prova della validità della legge (11) nei punti intermedi a quelli osservati.

Questi, secondo la nostra legge, avrebbero dovuto risultare uguali essendo b una costante. Ma il grado di approssimazione con cui i risultati si adattano a questa previsione teorica può essere ritenuto assai soddisfacente; tanto che non esito a dire che la presente verifica si può annoverare fra le migliori che la teoria elettronica dei metalli vanta fino ad oggi.

Se lasciamo per un momento da parte le due ultime misure, e facciamo la media dei valori di b dati dalle rimanenti troviamo 2,58. Calcolando gli scarti delle diverse misure rispetto a questa media troviamo numeri — quelli della colonna ε — che corrispondono all'ordine degli errori, imputabili alle misure stesse.

L'andamento regolarmente decrescente presentato dai numeri b da un certo punto in poi, e le deviazioni più forti che si presentano per i valori più intensi del campo, ci dimostrano chiaramente che al crescere di H le semplificazioni fatte nelle formule precedenti, lecite dapprima, diventano sempre meno legittime.

10. — La nostra verifica assume una importanza notevole anche per un altro fatto.

Essa ci fornisce direttamente utili indicazioni intorno all'ordine di grandezza del cammino medio libero dei corpuscoli nei metalli.

Se l_0 fosse piccolo tanto che il prodotto $\frac{e}{2mv} l_0 H$, che compare sotto il simbolo arc sen fosse risultato nelle nostre esperienze dell'ordine 10^{-2} , o più piccolo, allora nell'espressione (7) di n_{π} la quantità $\frac{1}{6} \left(\frac{e l_0}{2mv} \right)^2 H^2$ sarebbe risultata praticamente trascurabile ed avremmo potuto porre:

$$\eta_{\pi} = \frac{4 \propto T}{e^2 v l_0 \rho_{\pi}}$$

e quindi avremmo avuto per il potere termoelettrico:

$$(12) \quad P_{\pi} = \frac{2}{3} \frac{\propto}{e} \log n_a \frac{e^2 v l_0 \rho_{\pi}}{4 \propto T}.$$

Ora ci è facile mostrare che le esperienze nostre non ammettono una tale semplificazione.

Infatti, ammessa la legge (12) si ha:

$$P_H - P_0 = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{\rho_H}{\rho_0}$$

e quindi dovrebbe essere:

$$\frac{\Delta P}{P_0} : \log \frac{r_H}{r_0} = \chi$$

essendo χ una costante.

Abbiamo calcolato i valori di questo rapporto per mezzo dei numeri della tabella I, e i risultati trovati sono stati i seguenti:

H	χ
3150	1,12
3700	1,04
4500	0,94
5100	0,90
5900	0,80
6600	0,73
7600	0,66
9100	0,55
10100	0,52

Essi mostrano chiaramente che il rapporto χ è funzione del campo.

Dunque il prodotto $\frac{e}{2 m v} l_0 H$ deve essere $\geq a 10^{-2}$ a partire da valori del campo fra 3000 e 3500 unità. E poichè $\frac{e}{2 m v} = 0,8$ ricaviamo per il limite inferiore di l_0 .

$$0,8 \cdot 3,5 \cdot 10^3 l_0 \geq 10^{-2}$$

ossia:

$$l_0 > 4 \cdot 10^{-6}.$$

Questo limite così trovato è alquanto più grande del valore 10^{-7} ammesso da J. J. Thomson, per semplice stima in base a quello di l_0 dell'aria.

Ma si può vedere facilmente che facendo un computo più esatto, secondo la traccia data dallo stesso Thomson, si trova un valore — più verosimile — chè è molto vicino al nostro.

Infatti essendo il peso atomico del Bi (208) all'incirca 14 volte più grande di quello medio dell'aria, e la densità del primo corpo (9,8) circa 8000 mila volte quella dell'aria, potremo pensare che in un centimetro cubico del primo corpo vi sia un numero di atomi pressochè uguale a $\frac{8000}{14} = 600$ volte quello contenuto nello stesso volume di aria.

Affinchè in 1 cm^3 di Bi si possano alloggiare un numero di atomi uguale a 600 volte quello contenuto in 1 cm^3 di aria occorre solo che le distanze mutue fra due atomi contigui vengano ridotte secondo il rapporto $1 : \sqrt[3]{600}$ ciò che importa che l_0 nel Bi sia soltanto 8,5 volte più piccolo che nell'aria; cioè che l_0 nel Bi sia uguale $1,2 \cdot 10^{-6}$.

Evidentemente se gli ostacoli contro cui urtano i corpuscoli in movimento invece di essere gli atomi semplici, sono dei complessi di atomi, l diventerà ancora più grande. Ma già il limite or ora dedotto è in accordo più che soddisfacente con quello dato dalle nostre misure.

Palermo, Istituto Fisico della R. Università.