Ueber Reihenentwicklung nach Bessel'schen Functionen.

Von

JULIUS KÖNIG in Budapest.

(Auszug aus einem Schreiben des Verfassers an die Redaction.)

Im ersten Capitel seiner Abhandlung über Bessel'sche Functionen (Annalen, XVI. Bd. p. 2) beschäftigt sich Herr Sonine mit dem Probleme, die Entwicklung einer beliebigen analytischen Function in Reihen zu geben, die nach Bessel'schen Functionen der Variabeln fortschreiten und im Uebrigen der Taylor'schen, bez Mac-Laurin'schen Reihe entsprechen. Während die Lösung, die C. Neumann für dieses Problem gegeben, die Coefficienten noch in Form geschlossener Integrale liefert, bestimmen sich in den Formeln (22) und (23) der angeführten Abhandlung die Coefficienten direct durch recurrirende Gleichungen, also gerade so, wie im Falle der Potenzreihen.

Gestatten Sie mir jedoch die Bemerkung, dass ich diese Darstellung schon im V. Bande der Annalen („Ueber die Darstellung von Functionen durch unendliche Reihen“ pag. 310) gegeben habe. Nur der Umstand, dass diese Resultate sich in einer grösseren Arbeit zumeist allgemein functionentheoretischen Inhalts finden, scheint der Grund zu sein, dass sie in den seitherigen Arbeiten über Bessel'sche Functionen übersehen wurden.

Der einfache überaus kurze Gang der Entwicklung, den ich damals eingeschlagen habe, ist dem complicirten Transformationsapparate bei Herrn Sonine um so eher vorzuziehen, als auf diesem Wege die Bestimmung der Convergenzverhältnisse wohl nicht als stringent angesehen werden kann.

Meine am a. O. gegebene Ableitung benutzt übrigens die Sätze der allgemeinen Functionentheorie gar nicht. Auf S. 311—12 findet sich die Reihenentwicklung einer beliebigen analytischen Function nach Functionen

$$G_0(z), G_1(z), \dots, G_n(z), \dots$$

wo

$$G_n(z) = (z - z_0)^n \Phi_n(z), \text{ und } \Phi_n(z) \text{ für } z = z_0$$

endlich von Null verschieden, im Uebrigen aber beliebig ist. Die Bessel'schen Functionen genügen diesen Bedingungen, und die speciellen Resultate für diesen Fall sind unter verschiedenen anderen Anwendungen auf S. 338 angegeben. — Nur die recurrirenden Formeln für die Coefficienten (pag. 312 und 338) sind bei H. Sonine durch die ausgerechneten Ausdrücke ersetzt, die übrigens aus jenen ohne Mühe abgeleitet werden können.

Budapest 1880.