V. *Das dynamische Princip von Hamilton in der Thermodynamik; von C. Szily.*

In einem vor Kurzem mitgetheilten und veröffentlichten Aufsatz ¹⁾ habe ich die Behauptung aufgestellt, daß die Gleichung, die den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie ausdrückt, in vollständiger Uebereinstimmung ist mit der nach Hamilton benannten dynamischen Gleichung, und daß wir demnach auf die Frage: *auf welche dynamische Gleichung der zweite Hauptsatz der Thermodynamik zurückgeführt werden kann*, direct auf die Hamilton'sche Gleichung verweisen müssen.

Zur Veröffentlichung meiner diesbezüglichen Betrachtungen hat mich hauptsächlich der Umstand bewogen, daß weder Boltzmann, noch Clausius — und sie sind die Einzigen, die sich bis dahin mit der obigen Frage eingehender befaßten — in ihren Arbeiten ²⁾ das Hamilton'sche Princip nicht einmal erwähnen. Beide scheinen von der Ansicht auszugehen, daß, um Uebereinstimmung herbeizuführen, die Ableitung einer in der Dynamik bis jetzt unbekannten Gleichung nothwendig sey; beide bemerken, daß ihre abgeleiteten Gleichungen mit dem Princip der kleinsten Wirkung gewisse Verwandtschaft zeigen: aber auf das Hamilton'sche Princip und auf den Hinweis der nahen Beziehungen zu demselben hat keiner der beiden Forscher seine Aufmerksamkeit gerichtet.

Hierdurch veranlaßt hat Hr. Clausius in diesen An-

- 1) „Das Hamilton'sche Princip und der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie“; *Értekezések a matematikai tudományok köréből* 1871, herausgegeben von der ungarischen Academie der Wissenschaften. — Pogg. Ann. 145, S. 295.
- 2) L. Boltzmann: „Ueber die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie“; Sitzungsberichte der Wiener Academie Bd. 53, S. 210. — R. Clausius: „Ueber die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien.“ Pogg. Ann. Bd. 142, S. 433.

nen ¹⁾ einen Aufsatz publicirt, der sich ausschließlich auf meine Arbeit bezieht. Gleich im Anfange seines Aufsatzes anerkennt Clausius bereitwilligst, daß der gesuchte Zusammenhang viel auffälliger wird, wenn man den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie nicht — wie er und Boltzmann es that — mit dem Princip der kleinsten Wirkung, sondern mit der Hamilton'schen vergleicht. Gleichzeitig läßt Clausius die Ursache vermuthen, welche ihn daran hinderte, seine Aufmerksamkeit bei Gelegenheit seiner Betrachtungen über den erwähnten Zusammenhang dem Hamilton'schen Princip zuzuwenden. Es wird nämlich in manchen Lehrbüchern der Dynamik, so z. B. in Jacobi's „Vorlesungen über Dynamik“ die Hamilton'sche Gleichung in einer Form angeführt, welche in Folge der eigenthümlichen Variation von der ursprünglichen Form wesentlich abweicht. Wenn man nun anstatt der ursprünglichen nur die Jacobi'sche Form im Auge behält, dann ist es freilich wahr, daß es nicht recht denkbar ist, wie zwischen jener Gleichung und dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie irgend welcher, klar zu bezeichnender, Zusammenhang existiren soll.

Clausius citirt dann die von mir gebrauchte ursprüngliche Form der Hamilton'schen Gleichung, und constatirt, daß die Boltzmann'sche Gleichung (23a) richtig interpretirt, mit der Hamilton'schen Gleichung vollständig übereinstimmt, sogar mit derselben vollkommen identisch ist. Aber was Clausius bezüglich der Boltzmann'schen Gleichung zugiebt, das bezweifelt er entschieden in Bezug auf seine eigene Gleichung, ja er erklärt die erwähnte Uebereinstimmung als gerade zu unmöglich. Damit ist nun wieder gewissermaßen dieselbe Frage aufgeworfen, die schon früher zwischen Clausius und Boltzmann, bei Gelegenheit der Prioritätsreclamation des letzt-

1) Ueber den Zusammenhang des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie mit dem Hamilton'schen Princip; Pogg. Annalen Bd. 146; S. 585.

genannten Forschers, in diesen Annalen ¹⁾ besprochen wurde; die Frage nämlich: existirt thatsächlich ein Unterschied, und wenn dies der Fall ist, was ist der Unterschied zwischen der Gleichung von Clausius und der Boltzmann's. Ich glaube, daß ich jetzt berechtigt — ja nach der Antwort von Clausius sogar verpflichtet bin, in die Discussion der erwähnten Fragen, wenigstens bezüglich der Hamilton'schen Gleichung, einzugehen.

Zunächst will ich jene Gleichung besprechen, welche Hr. Clausius als seine eigene reclamirt.

Zur bequemerer Erläuterung der Sache wollen wir uns vorerst — wie dies auch Clausius thut — auf die Betrachtung der periodischen Bewegung eines einzelnen Punktes beschränken. Es sey also ein materieller Punkt gegeben, welcher bei der ursprünglichen Bewegung eine geschlossene Bahn beschreibe, oder sich zwischen zwei gegebenen Punkten bewege. Auf den beweglichen Punkt sollen nur solche Kräfte wirken, welche eine Kraftfunction (oder wie sich Clausius auszudrücken pflegt, ein Ergal) besitzen, d. h. solche Kräfte, deren Componenten sich durch die negativ genommenen partiellen Differentialquotienten einer Function der Coordinaten des Punktes darstellen lassen. Denken wir uns nun, daß diese Bewegung eine unendlich kleine Aenderung erleide. Bei der veränderten Bewegung beschreibe der Punkt ebenfalls eine geschlossene Bahn, oder bewege sich zwischen zwei Punkten, welche letzteren entweder mit den früher gegebenen identisch seyen, oder wenn das nicht der Fall ist, die Bedingung erfüllen, daß die Größe

$$\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z$$

am Endpunkte der Bewegung denselben Werth habe, wie

1) Pogg. Ann. Bd. 143, S. 211: Zur Priorität der Auffindung der Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und dem Principe der kleinsten Wirkung; von L. Boltzmann. — Pogg. Ann. Bd. 144, S. 265: Bemerkungen zu der Prioritätsreclamation des Hrn. Boltzmann; von R. Clausius.

am Anfangspunkte. Bezeichnen wir dann die Zeitdauer der Bewegung mit i , die lebendige Kraft mit T , die Kraftfunktion mit U , und einigen wir uns dahin, den Mittelwerth der veränderlichen Gröfsen durch einen darüber gesetzten waagerechten Strich anzudeuten (z. B. dafs $\bar{x} = \frac{1}{i} \int x dt$), so ist die Gleichung, auf die sich Hr. Clausius in seiner Antwort beruft, und welche er in seiner ersten hierher gehörigen Abhandlung¹⁾ mit (18) bezeichnet hat, die Folgende:

$$\frac{dU}{dx} \cdot \delta x + \frac{dU}{dy} \cdot \delta y + \frac{dU}{dz} \cdot \delta z = \delta \bar{T} + 2\bar{T} \delta \log i \quad (1).$$

Dies ist nun jene Gleichung, auf welche Clausius als auf seine eigene verweist und von welcher er ganz richtig bemerkt, dafs dieselbe eine allgemeinere Anwendbarkeit besitzt als die Hamilton'sche. Es ist auch in der That unmöglich, zwischen dieser und der Hamilton'schen Gleichung eine vollständige Uebereinstimmung herauszufinden. Ich muß aber bemerken, dafs ich *nicht diese* Gleichung für die Clausius'sche gehalten und als solche bezeichnet habe, und sie, wie bisher, auch jetzt nicht als solche bezeichnen kann. Diese Gleichung ist nämlich schon seit fünf Jahren bekannt, da dieselbe im Isten Bande des unter den Physikern so sehr verbreiteten und häufig citirten Werkes Sir William Thomson's „*Treatise on Natural Philosophy*“ Oxford 1867, (Deutsch von G. Wertheim, Braunschweig 1871) angegeben und bewiesen ist. Wenn wir nämlich die Gleichung, die sich in dem mit „*Dynamical Laws and Principles*“ bezeichne-

1) Pogg. Ann. Bd. 142, S. 442. — In einer anderen Abhandlung: Ueber die Anwendung einer von mir aufgestellten mechanischen Gleichung auf die Bewegung eines materiellen Punktes um ein festes Anziehungscentrum oder zweier materieller Punkte um einander; Nachrichten der kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1871, S. 248 und Math. Ann. von Clebsch und Neumann, Bd. 4, S. 232) bezeichnet Clausius diese Gleichung mit (2).

ten Abschnitte auf Seite 233 unter (9) vorfindet¹⁾, mit der Clausius'schen Bezeichnung schreiben, so zeigt dieselbe folgende Form:

$$\delta(2i\bar{T}) = i \left[\delta\bar{T} + \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right] \quad (2).$$

Nun ist es klar, daß diese Gleichung mit der unter (1) angeführten vollständig identisch ist.

Aber auch noch aus einer zweiten, nicht weniger wichtigen Ursache konnte ich von der Clausius'schen Gleichung sprechend, nicht jene vorerwähnte Thomson'sche Gleichung darunter verstehen. Die Thomson'sche Gleichung nämlich ist derartig allgemein, daß dieselbe, ohne specielle Voraussetzung, mit dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie gar nicht in Einklang gebracht werden kann. Denn wenn wir diese Gleichung in ihrer ganzen Allgemeinheit auf jene Bewegung, die wir Wärme nennen, anwenden könnten, dann wäre — wie wir weiter unten sehen werden — der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie gar nicht wahr. Die Thomson'sche Gleichung können wir aber am Einfachsten so mit dem zweiten Hauptsatze der Thermodynamik in Uebereinstimmung bringen, wenn wir aus der dynamischen Gleichung ein Glied verschwinden lassen, gleich Null setzen. Und weil es gerade Hr. Clausius war, der zeigte, welches Glied aus der Thomson'schen Gleichung wegfallen müsse, und unter welchen Annahmen dies erreicht werden könne, so glaube ich, daß der historischen Entwicklung dann vollständige Geltung verschafft wird, wenn wir die durch die oben erwähnte Annahme zu Stande gekommene Special-Gleichung²⁾

$$\delta U = \delta\bar{T} + 2\bar{T} \delta \log i \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

1) Um die Wichtigkeit dieser Gleichung recht hervorzuheben, fügt Thomson noch hinzu: „*This, it may be observed, is a perfectly general kinematical expression, unrestricted by any terminal or kinetic conditions.*“

2) Diese Gleichung bezeichnet Clausius (Pogg. Ann. Bd. 142, S. 442) mit (21).

als die Clausius'sche Gleichung bezeichnen, wie ich dies auch gethan habe.

Was ist nun der Unterschied zwischen dieser und der Hamilton'schen Gleichung?

Bevor wir aber auf die Auseinandersetzung dieser Frage näher eingehen, untersuchen wir im Allgemeinen: was für Bedingungen erfüllt werden müssen, um die Thomson'sche Gleichung in Uebereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie zu bringen. Der bequemen Uebersicht halber will ich die Thomson'sche Gleichung in etwas anderer Form schreiben. Bezeichnen wir die gesammte Energie, also die Summe von T und $\bar{U}$ mit E , so können wir, nach geringer Transformation, die mit (2) bezeichnete Gleichung auch folgendermaassen schreiben:

$$\delta E = \frac{\delta(2i\bar{T})}{i} + \delta U - \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \quad (4),$$

oder wenn wir im letzten Gliede das bestimmte Integral herstellen, aus welchem der mit dem waagerechten Striche bezeichnete Mittelwerth entstanden ist, so erhalten wir:

$$\delta E = \frac{\delta(2i\bar{T})}{i} + \frac{1}{i} \int_0^i \left[\delta U - \left(\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right) \right] dt \quad (5).$$

Dividiren wir schliesslich die ganze Gleichung mit $\bar{T}$, so wird

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\bar{T}} &= \delta 2 \log(i\bar{T}) \\ &+ \frac{1}{i\bar{T}} \int_0^i \left[\delta U - \left(\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right) \right] dt. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass diese Gleichung, welche noch immer mit der Thomson'schen identisch ist, nur dadurch in die Form des zweiten Hauptsatzes gebracht werden kann, wenn die Möglichkeit vorhanden ist, das letzte Glied gleich zu setzen der totalen Variation irgend einer unveränderlichen Funktion der Coordinaten; d. h. wenn:

$$\int_0^1 \left[\delta U - \left(\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right) \right] dt = i \bar{T} \delta F \quad (6).$$

Denken wir uns nun diesen Werth in die letzte Gleichung eingeführt und die Variationszeichen durch Differentialzeichen ersetzt, so ist

$$\frac{dE}{T} = d \, 2 \log (i \bar{T}) + dF.$$

Integriren wir diese Gleichung einen vollständigen Kreisprocess hindurch und ziehen wir dabei in Betracht, daß ebenso $i \bar{T}$, als auch F (der Annahme gemäß) zu Anfang und zu Ende des Kreisprocesses denselben Werth besitzen, so ist

$$\int \frac{dE}{T} = 0.$$

Die Thomson'sche Gleichung ist also nur dann in völliger Uebereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, wenn der mit (6) bezeichneten Bedingungsgleichung Genüge geleistet wird.

Sehen wir nun zu, auf welche Weise diese Bedingung einerseits in der Hamilton'schen und andererseits in der Clausius'schen Gleichung erfüllt ist.

Hamilton gründete seine Gleichung auf die Annahme¹⁾, daß die Form der Kraftfunction bei der Aenderung der Bewegung keine Veränderung erleidet, daß daher δU einzig abhängt von der Variation der Raum-Coordinaten, d. h. daß:

$$\delta U - \left(\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right) = 0 \quad . \quad (7).$$

In Folge dessen ist

$$\delta F = 0$$

und die mit (5) bezeichnete Gleichung nimmt folgende Form an:

$$\delta E = \frac{\delta (2 i \bar{T})}{i} \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Dies (8) ist die Hamilton'sche Gleichung.

1) *Philosophical Transactions* 1834, p. 249, sub (1).

In was besteht nun die Clausius'sche Annahme? Clausius giebt zu, daß auch die Form der Kraftfunction Veränderung erleide; nur stellt er die Bedingung¹⁾, daß die Variation, welche durch die Form-Veränderung der Kraftfunction entsteht, im Mittelwerthe genommen gleich 0 sey, daß also:

$$\delta U - \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z = 0$$

das heißt

$$\int_0^1 \left[\delta U - \left(\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right) \right] dt = 0 \quad (9).$$

Also auch dieser Annahme gemäß ist:

$$\delta F = 0.$$

In Folge dessen nimmt die Gleichung (1) die Form von der mit (3) bezeichneten an, d. h.

$$\delta \bar{U} = \delta \bar{T} + 2 \bar{T} \delta \log i.$$

Dies ist die Gleichung von Clausius.

Ich behauptete nun, daß *diese* Gleichung, und nicht die Thomson'sche, identisch sey mit der Hamilton'schen Gleichung. Diese meine Behauptung halte ich jetzt noch ihrem vollen Umfange nach aufrecht, und glaube, daß nach dem Vorhergesagten auch Hr. Clausius nichts dagegen einwenden wird.

Obzwar nun die diesbezüglichen mathematischen Betrachtungen von Clausius auf eine neue Gleichung überhaupt nicht führten und bloß die Thomson'sche und Hamilton'sche Gleichung, in etwas transformirter Gestalt, zum Resultate hatten, so wäre es nichtsdestoweniger ein großer Irrthum, zu glauben, daß jene hochwichtigen Betrachtungen unfruchtbar geblieben wären. Wie seinerseits Boltzmann, so erkenne auch ich mit größter Bereitwilligkeit, daß jener Theil dieser Betrachtungen, welcher sich hauptsächlich auf die Formveränderung der Kraftfunction bezieht, ganz unbedingt nothwendig war, ja daß es nur mit Hülfe derselben gelingen konnte, die Ha-

1) Pogg. Ann. Bd. 142, S. 442 bis 446, sub (18) bis (22).

milton'sche Gleichung mit Erfolg in die mechanische Wärmetheorie einzuführen. Hamilton hat nämlich seine Gleichung nur für den Fall bewiesen, wenn die Form der Kraftfunction während der veränderten Bewegung keine Veränderung erleidet; aus den Untersuchungen von Clausius geht aber hervor, daß man *dieselbe* Gleichung (die Hamilton'sche) auch dann benutzen kann, wenn die Form der Kraftfunction sich ändert, wobei die Bedingung gemacht wird, daß der Mittelwerth der dadurch entstehenden Variation gleich 0 sey. Die derartige Ausdehnung der Gültigkeit der Hamilton'schen Gleichung war jedenfalls unbedingt nothwendig, weil in der mechanischen Wärmetheorie solche Zustands-Aenderungen der Körper in Betracht kommen, welche nicht bloß von räumlichen Veränderungen, sondern auch von der veränderten Form der Kraftfunction abhängig sind.

Untersuchen wir noch, in wiefern die Hamilton'sche Gleichung modificirt werden muß, damit dieselbe auch für den Fall anwendbar wird, wenn nicht bloß von einem einzelnen Punkte, sondern von der Bewegungsänderung eines ganzen Punktsystems die Rede ist; und zwar nehmen wir gleich ein solches Punktsystem an, dessen einzelne Punkte nicht mit gleicher lebendigen Kraft und auch nicht in gleichen Zeiten ihre geschlossenen Bahnen zurücklegen. Hr. Clausius bemerkt ganz richtig, daß in diesem Falle die Hamilton'sche Gleichung nicht unmittelbar anwendbar sey, und daß demzufolge specielle Untersuchungen nothwendig wären.

Wenn wir indessen die Sache etwas näher betrachten, so finden wir, daß an der mit (8) bezeichneten Form der Hamilton'schen Gleichung keine andere Modification vorzunehmen ist als die, welche sich bezüglich der Energie, aus dem Begriffe des heterogenen Punktsystemes von selbst ergibt, d. h. wir haben nur das Σ -Zeichen den rechts- und linksseitigen Gliedern voranzuschreiben und diese Summation auf sämtliche Punkte des Systemes auszudehnen. Während also die Hamilton'sche Gleichung die Varia-

tion der Energie für einen Punkt folgendermaßen ausgedrückt:

$$\delta E = \frac{\delta(2i\overline{T})}{i}$$

erhalten wir die Variation der Energie bezüglich eines ganzen Punktsystemes in vollständig analoger Form, durch die Gleichung:

$$\Sigma \delta E = \Sigma \frac{\delta(2i\overline{T})}{i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Diese Modification ist aber wahrlich so gering und folgt so selbstverständlich aus dem Begriffe des Punktsystems, daß wir die mit (10) bezeichnete Gleichung als die nothwendige Folge der Hamilton'schen Gleichung betrachten können. Da aber diese Gleichung bei Hamilton noch nicht vorkommt, und derselbe die Anwendung des Summationszeichens nur auf den Fall beschränkte, wenn die einzelnen Punkte alle in derselben Zeit ihre Bahnen zurücklegen, so wird es vielleicht nicht unzumuthig seyn, die mit (10) bezeichnete Gleichung, nach Hamilton's Methode speciell zu beweisen. Uebrigens ist zu bemerken, daß diese Gleichung sich zuerst bei Boltzmann findet, und daß der hier gegebene Beweis wesentlich nur am Anfange und weiterhin nur bezüglich der Anordnung von der Boltzmann'schen Beweisführung abweicht.

Die Masse irgend eines Systempunktes sey m ; seine rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ; die Geschwindigkeit v ; die lebendige Kraft T ; die Kraftfunction U ; die Energie E , und die Zeitdauer eines Bahnnumlaufes i . — T und U besitzen an verschiedenen Stellen der Bahn verschiedene Werthe, ihre Summe aber d. h. E wird constant bleiben, so lange der Punkt eine und dieselbe Bahn beschreibt. Dies ist daher eine von der Zeit unabhängige Gröfse. Die Bewegung des Punktes erleide eine Aenderung: statt seiner früheren geschlossenen Bahn und periodischen Bewegung befolge er eine neue geschlossene Bahn, die von der früheren nur um unendlich wenig verschieden ist. In dieser

neuen Bahn bleibt nur die Masse des Punktes die frühere, alle übrigen Größen werden im Allgemeinen verändert. Die aus dem Bahnwechsel entspringenden Veränderungen bezeichnen wir mit dem Variationszeichen δ .

Aus dem Begriffe der Energie folgt, daß

$$\delta E = \delta T + \delta U.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit dem Zeitelement und integriren dieselbe von 0 bis i , und ziehen wir dabei in Betracht, daß sowohl E als auch δE von der Zeit unabhängig sind, so ist

$$\delta E = \frac{1}{i} \int_0^i (\delta T + \delta U) dt.$$

Bilden wir die analogen Ausdrücke auch für die übrigen Systempunkte und summiren dieselben:

$$\Sigma \delta E = \Sigma \frac{1}{i} \int_0^i (\delta T + \delta U) dt,$$

was auch so geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \Sigma \delta E &= \Sigma \frac{1}{i} \int_0^i \left(\delta T + \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right) dt \\ &+ \Sigma \frac{1}{i} \int_0^i \left[\delta U - \left(\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right) \right] dt. \end{aligned}$$

Setzen wir nun voraus, daß das letzte Glied der rechten Seite, d. h. die Summe der Mittelwerthe der aus der Formveränderung der Kraftfunction hervorgegangenen Variation gleich 0 ist, so bleibt

$$\Sigma \delta E = \Sigma \frac{1}{i} \int_0^i \left(\delta T + \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right) dt.$$

Substituiren wir

$$\delta T = m v \delta v \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} &- \left(\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z \right) \\ &= m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) = m \frac{dv}{dt} \delta s. \end{aligned}$$

wo δs die Variation der Bahnlänge bedeutet, so erhalten wir:

$$\Sigma \delta E = \Sigma \frac{1}{i} \int_0^i m (v \delta v - \frac{dv}{dt} \delta s) dt.$$

Nun ist:

$$\int_0^i \frac{dv}{dt} \delta s \cdot dt = v_1 \delta s_1 - v_0 \delta s_0 - \int_0^i v \frac{d(\delta s)}{dt} dt.$$

wobei die in dem integrierten Theile befindlichen Indices 0 und 1 die Anfangs- und Endwerthe der Gröößen bedeuten. Da aber die Bahn geschlossen und die Bewegung periodisch ist, so ist

$$\delta s_1 = \delta s_0 \text{ und } v_1 = v_0.$$

Demnach

$$\Sigma \delta E = \Sigma \frac{1}{i} \int_0^i m (v \delta v + v \frac{d(\delta s)}{dt}) dt.$$

Zieht man in Betracht, daß

$$v dt = ds,$$

so erhält man durch geringe Vereinfachung:

$$\Sigma \delta E = \Sigma \frac{1}{i} \int_0^i m \delta (v^2 dt).$$

Bringen wir die constante Masse unter das Variationszeichen und vertauschen die Reihenfolge der Integration und Variation, so ist:

$$\Sigma \delta E = \Sigma \frac{1}{i} \delta \int_0^i 2 T dt,$$

oder wenn wir den Mittelwerth durch einen waagerechten Strich bezeichnen wollen:

$$\Sigma \delta E = \Sigma \frac{\delta(2iT)}{i}.$$

Dies ist nun die Gleichung, die wir beweisen wollten.

Schließlich will ich noch bemerken, daß in dem Falle, wenn die Bahnen der Punkte nicht geschlossen sind, der Uebergang von den geschlossenen Bahnen auf die nicht

geschlossenen vollständig auf ein und dieselbe Weise ausführbar ist, ob wir die Hamilton-Boltzmann'sche Gleichung in ihrer ursprünglichen Gestalt, oder aber in der von Clausius modificirten logarithmischen Form schreiben. Die Form der Gleichung verursacht wahrlich nicht und verhindert auch nicht in diesem Falle jene Schwierigkeiten, welche Hr. Clausius am Ende seines Aufsatzes anführt.

Der leichteren Uebersicht wegen stellen wir noch die Entwicklungsmomente jener dynamischen Gleichung, auf welche der zweite Hauptsatz der Thermodynamik zurückführbar ist, nebeneinander. Die Gleichung stellt Hamilton im Jahre 1834 auf, aber er setzt bei der Beweisführung voraus, daß das Punktsystem homogen und die Form der Kraftfunction unveränderlich sey. 1868 wendet Boltzmann diese Gleichung auf ein heterogenes Punktsystem an, und bringt sie zuerst in die bekannte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie. 1871 beweist Clausius, daß dieselbe Gleichung auch dann gültig ist, wenn die Form der Kraftfunction sich ändert, aber der Mittelwerth der hieraus entstehenden Variation gleich 0 ist. Demzufolge hat sich innerhalb dieser 38 Jahre nur die Gültigkeit, die Anwendbarkeit dieser Gleichung erweitert, ohne daß die Gleichung, selbst der Form nach, eine wesentliche Aenderung erlitten hätte. Ich wiederhole die Schlußworte meines früheren Aufsatzes: „Was wir in der Thermodynamik den zweiten Hauptsatz nennen, ist in der Dynamik nichts anderes, als das Hamilton'sche Princip, das nämliche Princip, welches in mehreren Theilen der mathematischen Physik schon bisher vielfache Anwendung fand.“

Pest den 18. November 1872.