VI. Zur Theorie der longitudinal-elliptischen Schwingungen im incompressiblen Aether; von E. Ketteler.

Physikalische Begründung der Gesetze der Totalreflexion. — Desgl. der Metallreflexion; Theorie des Hauptwinkels. — Reflexion an absorbirenden Krystallen. — Uebergang des Lichtes zwischen beliebigen absorbirenden Mitteln. — Das bewegte absorbirende Mittel. — Der verschwindende Strahl Green's; die Constitution der Grenzschichten und die Gesetze der elliptischen Polarisation der durchsichtigen Mittel.

So lange die theoretische Optik die Schwingungen der Körpertheilchen ignorirte und mit einem homogenen Aether auszukommen vermeinte, legte sie demselben die Fähigkeit bei, gleichzeitig in longitudinale und transversale Schwingungen versetzt werden und beide Arten von Bewegung fortpflanzen zu können. Auch jetzt noch, seit insbesondere die Erscheinungen der anomalen Dispersion auf ein Zusammenschwingen der Aether- und Körpertheilchen hingewiesen haben, spielt die sogenannte hydrodynamische Dilatation selbst in den Arbeiten mancher Vertreter dieser Anschauung, so der Herren Boussinesq, Strutt und Wernicke ihre frühere Rolle fort. Und doch erscheint es bei der Annahme eines einzigen, überall gleich constituirten Aethers, in welchem die Erfahrung nur Transversalwellen nachwies und das Princip der Erhaltung der Kraft keine anderen zulässt, natürlich, die erwähnte Rolle den Amplituden der Körperschwingungen zu überweisen.

Was insbesondere die Gesetze der Spiegelung und Brechung betrifft, so beschränken sich auch Fresnel und Neumann auf Transversalwellen, und wenn Fresnel die Gesetze der Totalreflexion mittelst seiner Interpretation einer für sich genommenen complexen Grösse (Amplitude) gewonnen hatte, so vervollständigte Cauchy diese Erklärung, sofern er dieselbe auf den variablen Schwingungsausschlag übertrug. Später haben dann Cauchy und

Green überhaupt je eine longitudinale gespiegelte und gebrochene Welle zu den bisherigen transversalen hinzugenommen. Cauchy lässt dieselben „absorbirt“ werden, und Green gibt ihnen eine „unendlich grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit.“¹⁾

Die von Cauchy ohne specielle Begründung veröffentlichten Formeln sind bald nachher von Beer und Eisenlohr in gänzlich verschiedener Weise abgeleitet worden. Da die Behandlungsweise Beer's etwas umständlich, die Eisenlohr's dagegen möglichst concis ausfiel, so hat seitdem die Mehrzahl der Physiker sich auch mit dem von Eisenlohr eingehaltenen Standpunkte, d. h. mit einfacher Complexsetzung ursprünglich in reeller Form vorliegender Grössen begnügt, ohne sich mit Beer die weitere Frage vorzulegen, wie denn die betreffenden Ausdrücke ohne Hinzuziehung des Complexen direct aus den allgemein zulässigen Prämissen und insbesondere den Uebergangsbedingungen abgeleitet werden können. Andererseits sind auch die Beer'schen Arbeiten keineswegs ganz befriedigend. In der Absicht, Cauchy's Formeln, die er für unangreifbar hielt, einfach theoretisch zu reproduciren, nahm er gewisse Aufstellungen desselben, beispielsweise die von Cauchy behaupteten Werthe der Extinctionsindices, unvermittelt in seine Rechnungen hinüber und benahm ihnen dadurch die Einheit und Strenge. Ebenso sind seine Annahmen in Bezug auf die Lichtbewegung in Metallen nicht durchweg richtig. Charakteristisch ist die Beer'sche Auffassung der verschwindenden Strahlen Cauchy's und Green's. Beer definirt dieselben als Strahlen, deren Rolle darin bestehe, als Hilfsbewegung die Bewegung des ersten Mittels in die des zweiten zu vermitteln²⁾, und nimmt sie daher consequenter Weise sowohl für einfallende Schwingungen senkrecht als parallel

1) So Lundquist (Pogg. Ann. CLII. p. 195) und die meisten übrigen Autoren mit Ausnahme Beer's.

2) Pogg. Ann. XCII. p. 405.

zur Einfallsebene in Anspruch. Erst in einem späteren Aufsatz werden dieselben für den ersteren Fall als überflüssig bei Seite gelassen, und damit schrumpfen denn die verschwindenden Strahlen zu blossen longitudinalen zusammen.

Während Beer seitens der absorbirten Wellen neben dem Moment des Abnehmens der Amplitude bei Entfernung von der Trennungsfläche auch das andere nicht minder wichtige der longitudinal-elliptischen Schwingungsbewegung hervorhebt, hat man sich zur Zeit wohl ganz daran gewöhnt, die mit der Abnahme der Amplitude gleichzeitig erfolgende ungleiche Phasenänderung der Schwingungscomponenten neben jener zu übersehen oder gar eine Bewegung in longitudinalen Ellipsen als mit der Incompressibilität des Aethers unvereinbar zu erachten. Und doch besteht zwischen transversalen und longitudinalen Schwingungen der nämliche charakteristische Unterschied, mag man ihnen einen reellen oder complexen Brechungsexponenten zulegen, resp. sie als linear oder als longitudinal-elliptisch nehmen, der nämlich, dass für die ersteren die Dilatation:

$$\frac{dz}{dz} + \frac{d\xi}{dx},$$

für die letzteren die Winkelverschiebung:

$$\frac{d\xi}{dx} - \frac{dz}{dz}$$

verschwindet. Dabei ist bemerkenswerth, dass gerade der Green'sche verschwindende Strahl den Uebergang bildet von der einen zur anderen Form, sofern nämlich für ihn vorstehende Ausdrücke beide zu Null werden.

Auch der Verfasser dieses Aufsatzes hat sich bisher mit dem Cauchy-Eisenlohr'schen Standpunkte insofern begnügt, als es ihm für absorbirende Mittel nicht gelingen wollte, den (II) Hauptfall parallel zur Einfallsebene einfallender Schwingungen ohne Zuhülfeziehen des Complexen

zu erledigen. Derselbe möchte jetzt seine frühere Arbeit¹⁾ in dieser Richtung vervollständigen und dadurch etwa entstandene Missverständnisse beseitigen.

Wenn wir zu dem Ende die Gesetze der Total- und Metallreflexion direct entwickeln und sodann zur Theorie beliebiger innerer Reflexionen in absorbirenden Mitteln sowie zur Reflexion an Krystallen fortzuschreiten suchen, so beharren wir unverrückt bei unserer bisherigen Annahme der Incompressibilität des Aethers. Auch halten wir aus Gründen, die weiter unten (Abschnitt VI) besprochen werden sollen, die Hinzuziehung der an sich zulässigen Green'schen Strahlen für mindestens überflüssig.

Dies vorausgesetzt, haben wir bei Beibehaltung des früheren Coordinatensystems (die positive *Z*-Axe sei das äussere Einfallslot), sowie der bisherigen Bezeichnungen zunächst die drei Grenzgleichungen der Drehungscomponenten (Deformationen):

$$(1) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)_1 &= \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)_2 \\ \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right)_1 &= \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right)_2 \\ \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)_1 &= \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)_2. \end{aligned}$$

Die letzte derselben setzen wir an die Stelle der früheren Continuitätsgleichung des I. Hauptfalles. So gute Dienste nämlich das Continuitätsprincip auch in allen bisher behandelten Fällen geleistet hat, so sind wir trotzdem zu der Ansicht gelangt, dass dasselbe nicht als allgemein gültiger Grundsatz betrachtet werden darf (vgl. unter Abschn. IV). In Uebereinstimmung hiermit schreiben wir fortan die nothwendige vierte Gleichung:

1) Wied. Ann. I. p. 225.

2) l. c. p. 206. Streng genommen sollten hier wie vorhin die beiden Glieder derselben Seite mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden. Ihre bisherige Benennung „Deformation“ ist daher zweideutig. Vergl. z. B. Kirchhoff, Math. Physik p. 108 — Klein, Elasticität, Akustik und Optik p. 160.

$$(2a) \quad \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_2,$$

sofern wir statt der Ausschläge ξ die bezügliche lineare Dilatation $\frac{d\xi}{dx}$ einführen.¹⁾

Vermöge unserer Voraussetzung der Incompressibilität des Aethers müssen dann die beiden Beziehungen:

$$(2) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 &= \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_2 \\ \left(\frac{dz}{dz}\right)_1 &= \left(\frac{dz}{dz}\right)_2 \end{aligned}$$

zu identischen Resultaten führen, sie lassen sich folglich zur Ermittlung der Attribute der longitudinal-elliptischen Schwingungsbewegung verwerthen.

Ein ganz ähnliches, mit einander verträgliches System von Bedingungen ist schliesslich das folgende:

1) Schreibt man die Gleichungen der von mir sogenannten virtuellen Bewegung in doppeltbrechenden Mitteln:

$$\begin{aligned} \xi^S &= A'_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{zp + \chi \sin e}{\lambda} \right) \\ \eta^S &= A'_y \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{zp + \chi \sin e}{\lambda} \right) \\ \zeta^S &= A'_z \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{zp + \chi \sin e}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

wo $\rho = n \cos r$, $\sin e = n \sin r$ und r den Brechungswinkel der Normalen bedeutet, und worin endlich $\left(A' = \frac{A}{\cos A}\right)$:

$$A'_x = A' \cos U = A (\cos r \cos \vartheta + \operatorname{tg} A \sin r)$$

$$A'_y = A' \cos V = -A \sin \vartheta$$

$$A'_z = A' \cos W = -A (\sin r \cos \vartheta - \operatorname{tg} A \cos r),$$

so gilt offenbar auch für diese Mittel mit gleichem Rechte:

$$\left(\frac{d\xi^S}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi^S}{dx}\right)_2, \text{ wie früher p. 225: } \left(\frac{d\xi^S}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\xi^S}{dt}\right)_2.$$

Dies zur Berichtigung der dort p. 213 geäusserten Meinung.

$$(3) \quad \begin{aligned} \left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \right)_1 &= \left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \right)_2, \\ \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} \right)_1 &= \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} \right)_2. \end{aligned}$$

in welchem nämlich die Deformationsgleichung mit der aus unserem Princip der Gleichheit der Kraft senkrecht zur Oberfläche¹⁾ resultirenden combinirt ist. Auch diese letzteren Beziehungen dienen ebenso zur gegenseitigen Controle.

Fortan stellen wir den bisherigen zweiten Hauptfall, sofern er zu umfassenderen Schlüssen berechtigt, dem anderen voran.

I. Die Totalreflexion.

Wir nehmen an, das Licht falle im Innern eines ponderablen Mittels unter einem Einfallswinkel, welcher grösser ist als der Grenzwinkel $\left(\sin e > \frac{1}{n} \right)$, auf die Trennungsfläche von Mittel und Weltäther.

A. Für Schwingungen parallel der Einfallsebene supponiren wir dann die folgenden Ausschläge, resp. Ausschlagscomponenten:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varrho_E &= \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{z \cos e + x \sin e}{\lambda'} \right), \\ \varrho_R &= \Re \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{-z \cos e + x \sin e}{\lambda'} \right) - \pi - \chi_R \right], \\ \xi_D &= D_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} kz} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{l} \right) - \chi_z \right], \\ \xi_D &= D_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} kz} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{l} \right) - \chi_x \right]. \end{aligned}$$

Die gebrochene Welle würde sich sonach als ein eigenthümlicher Schwingungszustand darstellen, welcher der

1) l. c. p. 211.

spiegelnden Fläche parallel, periodisch ist in Bezug auf eine Strecke l , für die offenbar $l = \frac{\lambda'}{\sin e}$, also:

$$(5a) \quad \frac{1}{l} = \frac{\sin e}{\lambda'} = \frac{n \sin e}{\lambda},$$

und welcher bei Entfernung von der Trennungsfläche vermöge des noch zu bestimmenden Extinctionscoefficienten k mehr oder minder rasch abnimmt. Den Beweis der Möglichkeit solcher Schwingungen werden wir weiter unten erbringen.

Setzt man diese Werthe zunächst in die Grenzgleichungen (2), so kommt für $z = 0$:

$$\begin{aligned} \sin \varphi + \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= \frac{D_z}{\cos e} \sin(\varphi - \chi_x) \\ &= - \frac{D_z}{\cos e} \frac{k}{n \sin e} \cos(\varphi - \chi_x). \end{aligned}$$

Die Grenzgleichung (3a) gibt:

$$\sin \varphi - \Re \sin(\varphi - \chi_R) = D_z \sin e \sin(\varphi - \chi_x) - D_x \frac{k}{n} \cos(\varphi - \chi_x)$$

und Grenzgleichung (3b):

$$\cos \varphi - \Re \cos(\varphi - \chi_R) = D_z \sin e \cos(\varphi - \chi_x) - D_x \frac{k^2}{n^2 \sin e} \cos(\varphi - \chi_x).$$

Da diese Gleichungen für beliebige t und x , also für beliebige φ erfüllt sind, so darf man in allen oder auch in einzelnen φ durch $\varphi - 90^\circ$, d. h. $\cos \varphi$ durch $\sin \varphi$ und $\sin \varphi$ durch $-\cos \varphi$ ersetzen.

In Rücksicht hierauf werden dieselben zu je zweien identisch, sobald die gemeinschaftliche Bedingungsleichung erfüllt ist:

$$D_x n \sin e \cos(\varphi - \chi_x) = D_z k \sin(\varphi - \chi_x).$$

Dieselbe zerfällt in die beiden folgenden:

$$(5b) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \chi_x &= - \operatorname{ctg} \chi_z, & \chi_x &= \chi_z - 90^\circ, \\ D_x n \sin e &= D_z k. \end{aligned}$$

Da die Phasendifferenz $\chi_z - \chi_x = \frac{\pi}{2}$, so ist demnach

die entstehende longitudinal-elliptische Bewegung eine solche, dass die Axen der Ellipsen in die Richtung der Coordinatenaxen fallen. Vermöchte man diese Bewegung zu restauriren, d. h. durch Zufügung eines neuen Phasenunterschiedes $\frac{\pi}{2}$ in lineare Schwingungen überzuführen, so hätte man für die Amplitude $\mathfrak{D}$ und das Azimuth τ der restaurirten Schwingung:

$$D_z = \mathfrak{D} \sin \tau, \quad D_x = \mathfrak{D} \cos \tau,$$

folglich:

$$(6) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \tau &= \frac{n \sin e}{k}, \\ \sin \tau &= \frac{n \sin e}{\sqrt{k^2 + n^2 \sin^2 e}}, \quad \cos \tau = \frac{k}{\sqrt{k^2 + n^2 \sin^2 e}}. \end{aligned}$$

Das Quadrat dieser Amplitude $\mathfrak{D}$ misst zugleich die lebendige Kraft, welche während der Zeiteinheit in einem der Trennungsfläche unmittelbar anliegenden, unendlich klein gedachten Aethervolum für die elliptische Bewegung beansprucht wird.

Setzt man vorstehende Werthe in die Uebergangsbedingungen ein, so schreiben sich dieselben beispielsweise auch so:

$$(7) \quad \begin{aligned} \sin \varphi + \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= -\frac{\mathfrak{D}}{\cos e} \frac{k}{\sqrt{k^2 + n^2 \sin^2 e}} \cos(\varphi - \chi_z), \\ \sin \varphi - \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= \frac{\mathfrak{D}}{n} \frac{(n^2 \sin^2 e - k^2)}{\sqrt{k^2 + n^2 \sin^2 e}} \sin(\varphi - \chi_z). \end{aligned}$$

Und wenn man sie multiplicirt, so repräsentirt das Produkt:

$$\sin^2 \varphi - \Re^2 \sin^2(\varphi - \chi_R) = -\frac{\mathfrak{D}^2}{k^2 + n^2 \sin^2 e} \frac{k(n^2 \sin^2 e - k^2)}{n \cos e} \sin(\varphi - \chi_z) \cos(\varphi - \chi_z)$$

diejenige lebendige Kraft, welche in jedem Augenblicke seitens eines unendlich kleinen äquivalenten Volumens im ersten Mittel der Trennungsfläche zugeführt wird. Bei Integration derselben in Beziehung auf t und für die Zeiteinheit erhält man:

$$(8) \quad 1 - \Re^2 = 0,$$

d. h. die totale lebendige Kraft der gebrochenen Welle ist Null, folglich die der reflectirten der der einfallenden gleich. Es wird daher während einer gewissen Zeit, während welcher die augenblickliche lebendige Kraft der einfallenden Welle die der gespiegelten übertrifft, den Aethertheilchen des zweiten Mittels Energie zugeführt, aber während der übrigen Zeit wieder entzogen, um den mittlerweile entstandenen negativen Ueberschuss zum Ausgleich zu bringen.

Noch erübrigt die Ermittlung des Extinctionscoefficienten k . Zu dem Ende hat man auf die für den Aether geltende allgemeine Differentialgleichung:

$$\text{I. } m \left(\mathfrak{U}_x \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \mathfrak{U}_z \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right) = (e) \left\{ \mathfrak{U}_x \left(\frac{d^2 \xi}{dz^2} + \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right) + \mathfrak{U}_z \left(\frac{d^2 \zeta}{dz^2} + \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right) \right\}^1)$$

zurückzugehen und darin die Integralausdrücke:

$$\begin{aligned} \text{II. } \quad \zeta &= \mathfrak{U}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} kz} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + x \frac{n \sin e}{\lambda} \right) - \chi_z \right], \\ \xi &= -\mathfrak{U}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} kz} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + x \frac{n \sin e}{\lambda} \right) - \chi_z \right] \end{aligned}$$

zu substituieren. So erhält man als Bedingungsgleichung:

$$\left[\frac{m}{T^2} - \frac{(e)}{\lambda^2} (n^2 \sin^2 e - k^2) \right] \left[\mathfrak{U}_x^2 \sin(\varphi - \chi_z) - \mathfrak{U}_z^2 \cos(\varphi - \chi_z) \right] = 0.$$

Dieselbe verlangt offenbar das Verschwinden des ersten Factors, und daher wird wegen $\frac{(e)}{v^2} = m$:

$$\begin{aligned} \text{III. } \quad 1 - (n^2 \sin^2 e - k^2) &= 0, \quad \text{d. h.} \\ k &= \sqrt{n^2 \sin^2 e - 1}. \end{aligned}$$

Hiernach werden die beiden Grenzgleichungen (7), wenn man darin noch abkürzungsweise:

$$\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{k^2 + n^2 \sin^2 e}} = \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{2 n^2 \sin^2 e - 1}} = D_0$$

1) Es ist die von uns entwickelte Fundamentalgleichung (8a) Pogg. Ann. Ergb. VIII. p. 453), wenn darin die Körpermasse $m' = 0$ gesetzt wird.

setzt, übergehen in:

$$\sin \varphi + \Re \sin(\varphi - \chi_R) = -\frac{D_0}{\cos e} \sqrt{n^2 \sin^2 e - 1} \cos(\varphi - \chi_z),$$

$$\sin \varphi - \Re \sin(\varphi - \chi_R) = \frac{D_0}{n} \sin(\varphi - \chi_z).$$

Um schliesslich die $\Re$, D_0 , χ_R , χ_z berechnen zu können, hat man aus ihnen φ zu eliminiren und gewinnt dann die vier ausreichenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} 1 + \Re \cos \chi_R &= -\frac{\sqrt{n^2 \sin^2 e - 1}}{\cos e} D_0 \sin \chi_z, \\ \Re \sin \chi_R &= +\frac{\sqrt{n^2 \sin^2 e - 1}}{\cos e} D_0 \cos \chi_z, \\ (9) \quad 1 - \Re \cos \chi_R &= \frac{1}{n} D_0 \cos \chi_z, \\ -\Re \sin \chi_R &= \frac{1}{n} D_0 \sin \chi_z. \end{aligned}$$

Diese letzteren lassen sich zu je zweien noch rückwärts in die symbolischen Formen zusammenfassen:

$$1 + \Re (\cos \chi_R + \sqrt{-1} \sin \chi_R) = D_0 (\cos \chi_z + \sqrt{-1} \sin \chi_z) \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 e}}{\cos e},$$

$$1 - \Re (\cos \chi_R + \sqrt{-1} \sin \chi_R) = D_0 (\cos \chi_z + \sqrt{-1} \sin \chi_z) \frac{1}{n}$$

oder kürzer, wenn man zugleich statt des absoluten Brechungsindex n den reciproken relativen $n = \frac{1}{n}$ einführt und $\frac{\sin e}{n} = \sin r$ schreibt:

$$\begin{aligned} 1 + \Re &= D \frac{\cos r}{\cos e}, \\ (10) \quad 1 - \Re &= D n. \end{aligned}$$

Wir haben so also mit den Fresnel'schen Grenzgleichungen zugleich den Beweis der Richtigkeit seiner Regeln gewonnen.

B. Stehen die einfallenden Schwingungen senkrecht auf der Einfallsebene, so sind die drei in Betracht kommenden Schwingungen folgende:

$$\begin{aligned}
 \eta &= \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{z \cos e + x \sin e}{\lambda'} \right), \\
 (11) \quad \eta_R &= \Re \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{-z \cos e + x \sin e}{\lambda'} \right) - \chi_R \right], \\
 \eta_D &= D_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} k z} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + x \frac{\sin e}{\lambda'} \right) - \chi_y \right].
 \end{aligned}$$

Demnach erhält man mittelst der beiden letzten der Deformationsbedingungen 1 für $z = 0$:

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi + \Re \sin (\varphi - \chi_R) &= D_y \sin (\varphi - \chi_y). \\
 (12) \quad \sin \varphi - \Re \sin (\varphi - \chi_R) &= \frac{D_y}{\cos e} \frac{k}{n} \cos (\varphi - \chi_y).
 \end{aligned}$$

Multipliziert man dieselben, so hat man wieder den bald positiven, bald negativen Ueberschuss der augenblicklichen lebendigen Kraft der einfallenden Wellenbewegung über die der reflectirten. Das auf die Zeiteinheit ausgedehnte Integral desselben liefert daher auch hier die Beziehung:

$$1 - \Re^2 = 0.$$

Um den Extinctionscoefficienten k zu erhalten, genügt es, den Ausdruck für η_D in die einfache Gleichung:

$$\text{IV.} \quad m \mathfrak{A}_y \frac{d^2 \eta}{dt^2} = (e) \mathfrak{A}_y \left(\frac{d^2 \eta}{dz^2} + \frac{d^2 \eta}{dx^2} \right)$$

einzusetzen. Es kommt dann unmittelbar:

$$k = \sqrt{n^2 \sin^2 e - 1}.$$

Hiernach erübrigt wieder nur aus den Gl. (12) φ zu eliminiren. Man erhält so:

$$\begin{aligned}
 1 + \Re \cos \chi_R &= D_y \cos \chi_y, \\
 \Re \sin \chi_R &= D_y \sin \chi_y, \\
 (13) \quad 1 - \Re \cos \chi_R &= \frac{D_y}{\cos e} \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 e - 1}}{n} \sin \chi_y, \\
 \Re \sin \chi_R &= \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 e - 1}}{n \cos e} D_y \cos \chi_y.
 \end{aligned}$$

oder kürzer in der Fresnel'schen Form:

$$(14) \quad \begin{aligned} 1 + \Re &= D \\ 1 - \Re &= D \frac{n \cos r}{\cos e}. \end{aligned}$$

Für den allgemeineren Fall endlich, dass das Schwingungssazimuth der einfallenden Welle ein beliebiges ist, treten insbesondere für die gebrochene streifende Welle die drei Coordinaten ξ_D , η_D , ζ_D gleichzeitig auf und constituiren zusammen eine im Raume vor sich gehende Bewegung, auf deren nähere Untersuchung hier indess verzichtet werden soll.

Wurde bisher der Weltäther als zweites Mittel angenommen, so werden die gewonnenen Beziehungen auch dann noch gelten, wenn die Constitution des zweiten Mittels der des ersten ähnlich ist. Nur ist alsdann der Absorptionscoëfficient k' desselben besonders zu bestimmen. Begnügt man sich mit den einfachen Verhältnissen des I. Hauptfalles, so führen die Gleichungen:

$$V. \quad m \mathfrak{A}_y \frac{d^2 \eta}{dt^2} + m' \mathfrak{A}'_y \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = (e) \mathfrak{A}_y \left(\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{d^2 \eta}{dy^2} \right),$$

$$\eta_D = \mathfrak{A}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} k' z} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + x \frac{\sin e}{\lambda_1} \right) - \chi_y \right],$$

VI.

$$\eta'_D = \mathfrak{A}'_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} k' z} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + x \frac{\sin e}{\lambda_1} \right) - \chi_y \right],$$

in welchen kein Phasenunterschied zwischen Aether- und Körpertheilchen vorausgesetzt ist, sofort zum Ziele. Man erhält nämlich, wenn man das absolute Brechungsverhältniss des zweiten Mittels mit n_2 bezeichnet:

$$1 + \frac{m' \mathfrak{A}'_y{}^2}{m \mathfrak{A}_y{}^2} = n_2^2 = n_1^2 \sin^2 e - k'^2,$$

$$k' = \sqrt{n_1^2 \sin^2 e - n_2^2}.$$

Setzt man schliesslich $k' = n_2 k$ und das relative Brechungsverhältniss $\frac{n_1}{n_2} = n$, so wird der Exponentialfactor des streifenden Strahles:

$$\text{VII.} \quad e^{\frac{2\pi}{\lambda} k' z} = e^{\frac{2\pi}{\lambda_1} k z} = e^{\frac{2\pi}{\lambda_1} \sqrt{n^2 \sin^2 e - 1} \cdot z},$$

wo λ_2 die Wellenlänge im zweiten Mittel bedeutet.

Diese hier zum ersten Male gegebene Ableitung des Cauchy'schen Extinctionscoefficienten bestätigt so in überraschender Weise die Richtigkeit unseres dazu benutzten I. dioptrischen Grundgesetzes.

II. Die Metallreflexion.

Wir behandeln hier zunächst die Vorgänge an der Vorderfläche eines im Weltäther befindlichen absorbirenden Mittels.

A. Bei Schwingungen parallel der Einfallsebene gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho &= \cos \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{z \cos e + x \sin e}{v} \right), \\ \varrho_R &= \Re \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{-z \cos e + x \sin e}{v} \right) - \pi - \chi_R \right], \\ (15) \quad \zeta_D &= D_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_z \right], \\ \xi_D &= D_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_x \right], \end{aligned}$$

wo wie früher: $p = v \cos r$, $\sin e = v \sin r$ bedeutet, so dass: $v^2 = p^2 + \sin^2 e$.

Die Grenzgleichungen (2) geben dann:

$$\begin{aligned} \sin \varphi + \Re \sin (\varphi - \chi_R) &= \frac{D_x}{\cos e} \sin (\varphi - \chi_x) \\ &= \frac{D_x}{\sin e \cos e} [p \sin (\varphi - \chi_z) - q \cos (\varphi - \chi_z)]. \end{aligned}$$

Und setzt man:

$$\chi_x = \chi_z + \beta,$$

sowie zur Abkürzung $\varphi - \chi_z = \varphi'$, so schreibt sich die Bedingungsgleichung:

$$D_x \sin e \sin(\varphi' - \beta) = D_z (p \sin \varphi' - q \cos \varphi').$$

Man leitet daraus ab:

$$(17) \quad D_z = D_x \frac{\sin e}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{q}{p},$$

so dass man der früheren Bezeichnung zufolge hat:

$$\beta = \varepsilon + u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{q}{p}.$$

Die beiden Grenzgleichungen (3) endlich erhalten die Form:

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= D_z \sin e \sin(\varphi - \chi_z) \\ &\quad + D_x [p \sin(\varphi - \chi_x) - q \cos(\varphi - \chi_x)], \\ \cos \varphi - \Re \cos(\varphi - \chi_R) &= \frac{D_z}{\sin e} [p^2 - q^2 + \sin^2 e] \cos(\varphi - \chi_z) + 2pq \sin(\varphi - \chi_z). \end{aligned}$$

Sie werden mit einander identisch, sobald man in der zweiten φ durch $\varphi - 90^\circ$ ersetzt und entsprechend den Beziehungen (16) die Werthe:

$$\begin{aligned} D_z &= D_x \frac{\sin e}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \sin \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \end{aligned}$$

in dieselben einführt.

Die Aethertheilchen der gebrochenen Welle beschreiben sonach vermöge der Phasendifferenz $\chi_x - \chi_z = \beta$ ihrer Componenten longitudinale Ellipsen. Denkt man sich dieselben zu linearen Schwingungen restaurirt, so würden diese letzteren unter einem Azimuth r eine Amplitude $\mathfrak{D}$ erhalten, für welche man hat:

$$(18) \quad \begin{aligned} D_x &= \mathfrak{D} \cos r, & D_z &= \mathfrak{D} \sin r, \\ \cos r &= \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2}}, & \sin r &= \frac{\sin e}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \end{aligned}$$

Bei Einführung dieser Werthe schreiben sich dann die Componenten der Ausschläge:

$$\begin{aligned} \zeta_D &= \mathfrak{D} \frac{\sin e}{\sqrt{p^2 + q^2}} e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_z \right] \\ (19) \quad \xi_D &= \mathfrak{D} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{v^2 + q^2}} e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_z - (\varepsilon + u) \right]. \end{aligned}$$

Und addirt man die Quadrate ihrer beiden Amplituden, so bildet folglich $\mathfrak{D}^2 e^{\frac{4\pi}{\lambda} qz}$ das Maass für die während der Zeiteinheit in der unendlich kleinen Volumeneinheit entwickelte Energie.

Auch in den Grenzgleichungen lässt sich jetzt alles in $\mathfrak{D}$ und χ_z ausdrücken. Man erhält zunächst das System:

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{p^2 + q^2} \cos e} [p \sin(\varphi - \chi_z) - q \cos(\varphi - \chi_z)] \\ (20) \quad \sin \varphi + \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{v^2 + q^2}} [(a^2 - b^2) \sin(\varphi - \chi_z) - 2ab \cos(\varphi - \chi_z)], \end{aligned}$$

wofern nämlich wie früher gesetzt wird:

$$(21) \quad p^2 - q^2 + \sin^2 e = a^2 - b^2, \quad pq = ab.$$

Schreibt man ferner:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b}{a},$$

woraus:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \sin \varepsilon &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ (22) \quad \cos 2\varepsilon &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, & \sin 2\varepsilon &= \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

so gewinnt man die kürzere Form:

$$\begin{aligned} \sin \varphi + \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= \frac{\mathfrak{D}}{\cos e} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{v^2 + q^2}} \sin(\varphi - \chi_z - \varepsilon - u) \\ (20b) \quad \sin \varphi - \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= \mathfrak{D} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{v^2 + q^2}} \sin(\varphi - \chi_z - 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Wir wollen darin:

$$\chi_z + \varepsilon = X$$

setzen und zur Gewinnung der Gleichung der augenblicklichen lebendigen Kräfte ihr Product bilden. Schreibt man die rechte Seite desselben so:

$$\frac{\mathfrak{D}^2 (a^2 + b^2) \sqrt{p^2 + q^2}}{\cos e \sqrt{p^2 + q^2}} \sin(\varphi - X - u) \sin(\varphi - X - u - (\varepsilon - u))$$

und beachtet man noch, dass vermöge der Beziehungen (16), (21) und (22):

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}[(\varepsilon + u) - \varepsilon] = \frac{a q - p b}{a p + q b} = \frac{d}{c},$$

$$(23) \quad \operatorname{tg}(\varepsilon - u) = \frac{2 a b p - (a^2 - b^2) q}{2 a b q + (a^2 - b^2) p} = \frac{q}{p} \frac{p^2 + q^2 - \sin^2 e}{p^2 + q^2 + \sin^2 e},$$

$$\cos(\varepsilon - u) = \frac{p^2 + q^2}{a^2 + b^2} \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

so erhält die bezügliche Gleichung die Gestalt:

$$\sin^2 \varphi - \Re^2 \sin^2(\varphi - \chi_R) = \mathfrak{D}^2 \frac{p}{\cos e} \left[\sin^2(\varphi - X - u) - \frac{q}{p} \frac{p^2 + q^2 - \sin^2 e}{p^2 + q^2 + \sin^2 e} \sin(\varphi - X - u) \cos(\varphi - X - u) \right].$$

Oder auch, sofern: $\chi_z = X - \varepsilon = \chi_x - \varepsilon - u$, folglich:

$$\chi_x = X + u$$

ist, und ausserdem die äquivalenten Volumina:

$$M: M_D = \sin e \cos e : \sin r \cos r$$

eingeführt werden:

$$(24) \quad M [\sin^2 \varphi - \Re^2 \sin^2(\varphi - \chi_R)] = M_D \mathfrak{D}^2 v^2 [\sin^2(\varphi - \chi_x) - \operatorname{tg}(\chi_x - \chi_z) \cos 2r \sin(\varphi - \chi_x) \cos(\varphi - \chi_x)].$$

Analog dem Vorgange bei der Totalreflexion ist hier der Ueberschuss der augenblicklichen lebendigen Kraft der einfallenden Welle über die der reflectirten nicht bloß von einem nach T , sondern auch von einem nach $\frac{1}{2} T$ periodischen Gliede abhängig. Integriert man daher für die Zeiteinheit nach t , so fällt dieses letztere heraus, und so bleibt:

$$(25) \quad 1 - \Re^2 = \mathfrak{D}^2 \frac{p}{\cos e} = \mathfrak{D}^2 \nu^2 \frac{M_D}{M}.$$

Hier repräsentirt der Zähler der rechten Seite die gesammte, auf die Aether- und Körpertheilchen übergeleitete Energie, während wir vorhin $\mathfrak{D}^2$ als die totale Aetherenergie der Volumeneinheit kennen gelernt haben. Wie bei den durchsichtigen Mitteln wird sich daher setzen lassen:

$$\nu^2 - 1 = \frac{M'_D \mathfrak{D}^2}{M_D \mathfrak{D}^2},$$

wo M'_D und $\mathfrak{D}^2$ die zugehörige Masse und Energie der Körpertheilchen bedeuten.

Kommen wir zum Zwecke der Berechnung der Amplituden und Phasen nochmals auf die Grenzgleichungen (20) zurück. Wir wollen auch in ihnen $\chi_z = X - \varepsilon$ setzen, ferner statt $\mathfrak{D}$ einen neuen durch die Beziehung:

$$(26) \quad \mathfrak{D}^2 = D_o^2 \frac{\nu^2 + q^2}{a^2 + b^2}$$

charakterisirten Coefficienten D_o einführen und abkürzungsweise schreiben:

$$(27) \quad c = \frac{p a + q b}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{a q - p b}{a^2 + b^2}.$$

Alsdann erhalten dieselben die Gestalt:

$$(28) \quad \begin{aligned} \sin \varphi - \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= D_o [a \sin(\varphi - X) - b \cos(\varphi - X)] \\ \sin \varphi + \Re \sin(\varphi - \chi_R) &= \frac{D_o}{\cos e} [c \sin(\varphi - X) - d \cos(\varphi - X)]. \end{aligned}$$

Dies sind aber die nämlichen Gleichungen (32), welche wir im früheren Aufsatz¹⁾ mittelst des complexen Index $a \pm b \sqrt{-1}$ abgeleitet haben. Auf die weiteren sich daran anknüpfenden Entwicklungen darf daher einfach verwiesen werden. Dieselben bedürfen jedoch in einem Punkte der Rectification.

Es hat nämlich in Gleichung (33a) der oben definirten physikalischen Amplitude $\mathfrak{D}$ gegenüber der Coefficient

1) Wied. Ann. I. p. 234.

$\mathfrak{A}_D (= D_o)$ nur die Bedeutung einer Hilfsgrösse, eine Vermuthung, die ich schon in einer älteren Arbeit ausgesprochen habe, damals aber nicht beweisen konnte. Dem entsprechend tritt jetzt in den Ausdrücken (40a), (40b) (auf p. 239) $\mathfrak{D}^2$ an die Stelle von D_o^2 , so dass die Energie der Aethertheilchen wird:

$$(28) \quad J_D = \frac{4 \cos^2 e (\nu^2 + q^2)}{p^2 + q^2 + 2p \cos e (\nu^2 + q^2) + (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e} \\ = \frac{1}{\nu^2} \frac{4 \cos^2 e \sin^2 r (\nu^2 + q^2)}{[\cos^2(e-r) + q^2 \operatorname{ctg}^2 e \sin^2 r] [\sin^2(e+r) + q^2 \sin^2 r]}.$$

Sodann treten zu der einen dortigen Verzögerung $\chi_D (= X)$, deren Bedeutung weiter unten zur Sprache kommt, deren zwei nach den Axen verschiedene, χ_x und χ_z , auf. Für dieselben hat man:

$$(29) \quad \chi_x = X + u, \quad \chi_z = X - \varepsilon,$$

und mit Benutzung des Ausdruckes (40c):

$$(30) \quad \operatorname{tg} \chi_x = - \frac{q \cos e (p^2 + q^2 - \sin^2 e)}{(p^2 + q^2) + p \cos e (\nu^2 + q^2)} = - \frac{q \cos e \cos 2r}{p \cos e + \cos^2 r} \\ \operatorname{tg} \chi_z = - \frac{q (1 + 2p \cos e)}{p + (p^2 - q^2 + \sin^2 e) \cos e}.$$

Für senkrechte Incidenz fällt $\operatorname{tg} \chi_x$ mit dem entsprechenden, für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene erhaltenen Ausdruck (36c) zusammen, und für streifende Incidenz wird $\chi_z = 0$.

Andererseits fällt $\operatorname{tg} \chi_z$, welches für $e = 0$, bei welchem Incidenzwinkel die zugehörige Amplitude von ζ_D verschwindet, den Werth erhält:

$$\operatorname{tg} \chi_z^0 = - \frac{b(1+2a)}{a+a^2-b^2},$$

für $e = 90^\circ$ mit dem für senkrechte Schwingungen geltenden Werthe: $\operatorname{tg} \chi^s = - \frac{q}{p}$ zusammen.

Elegantere Formen erhält man für X , χ_x , χ_z , wenn man die Winkel ε , u einführt. Es wird dann:

$$\begin{aligned}
 \text{tg } X_p &= - \frac{\sqrt{p^2 + q^2} \sin u + \cos e (a^2 + b^2) \sin e}{\sqrt{p^2 + q^2} \cos u + \cos e (a^2 + b^2) \cos e} \\
 (31) \quad \text{tg } X_z &= - \frac{\sqrt{p^2 + q^2} \sin (e + u) + \cos e (a^2 + b^2) \sin 2e}{\sqrt{p^2 + q^2} \cos (e + u) + \cos e (a^2 + b^2) \cos 2e} \\
 \text{tg } X_x &= - \frac{\cos e (a^2 + b^2) \sin (e - u)}{\sqrt{p^2 + q^2} + \cos e (a^2 + b^2) \cos (e - u)}.
 \end{aligned}$$

Recht bemerkenswerthe Folgerungen ergeben sich schliesslich für die Definition des Haupteinfallswinkels E und des Hauptazimuthes H . Vermöge der Beziehungen (l. c. 44b) wird:

$$p_E^2 + q_E^2 = \sin^2 E \text{tg}^2 E$$

$$p_E^2 + q_E^2 = \text{tg}^2 E$$

und daher zufolge (18) und (29) dieser Abhandlung:

$$\begin{aligned}
 \sin r &= \frac{\sin E}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \cos E \\
 (32) \quad \cos r &= \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2}} = \sin E \\
 (\chi_x - \chi_z) &= 2H,
 \end{aligned}$$

so dass die Schwingungscomponenten die Form erhalten:

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \mathfrak{D}_E \cos E e^{\frac{2\pi}{\lambda} q_E z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{z p_E + x \sin E}{v} \right) - \chi_z \right] \\
 \xi &= \mathfrak{D}_E \sin E e^{\frac{2\pi}{\lambda} q_E z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{z p_E + x \sin E}{v} \right) - \chi_z - 2H \right].
 \end{aligned}$$

Man hat daher die folgenden Sätze:

Unterscheidet man allgemein neben dem Brechungswinkel r und Brechungsverhältniss $\nu = \frac{v}{\omega}$ der Wellennormale einen Brechungswinkel r und ein Brechungsverhältniss $n = \frac{v}{v} = \sqrt{\nu^2 + q^2}$ der restaurirten linearen Schwingung, so steht insbesondere für die Hauptincidenz:

1) die wiederhergestellte gebrochene Schwin-

gung senkrecht auf der reflectirten Schwingung, ist also:

2) das Brechungsverhältniss derselben gleich der trigonometrischen Tangente des Haupteinfallswinkels und ist:

3) die durch die gedachte Restauration zu beseitigende Phasenverschiebung zwischen den Componenten gleich dem doppelten Hauptazimuth.

B. Stehen die Schwingungen senkrecht auf der Einfallsebene, so hat man ¹⁾ neben der einfallenden und reflectirten Schwingung die gebrochene:

$$v_D = D_y \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_y \right]$$

und daher weiter zufolge der Uebergangsbedingungen (1):

$$\sin \varphi + \Re \sin (\varphi - \chi_R) = D_y \sin (\varphi - \chi_y)$$

$$(33) \quad \sin \varphi - \Re \sin (\varphi - \chi_R) = \frac{D_y}{\cos e} [p \sin (\varphi - \chi_y) - q \cos (\varphi - \chi_y)]$$

$$\sin^3 \varphi - \Re^2 \sin^2 (\varphi - \chi_R) = D_y^2 \frac{\rho}{\cos e} [\sin^2 (\varphi - \chi_y) - \operatorname{tg} (\chi_x - \chi_z) \sin (\varphi - \chi_y) \cos (\varphi - \chi_y)]$$

Endlich nach Integration der letzteren:

$$1 - \Re^2 = \frac{\rho}{\cos e} D_y^2 = D_y^2 v^2 \frac{M_D}{M}.$$

Für gegenwärtigen I. Hauptfall gelten die l. c. p. 237 bis 238 entwickelten Ausdrücke ohne alle Einschränkung. Insbesondere für χ_y (l. c. Gleichung 36c), das hinfort als X_s bezeichnet werden möge, schreibt sich bei Einführung von ε und u :

$$(34) \quad \operatorname{tg} X_s = - \frac{\sqrt{p^2 + q^2} \sin (\varepsilon + u)}{\cos e + \sqrt{p^2 + q^2} \cos (\varepsilon + u)}.$$

C. Bei einem Azimuth des einfallenden Lichtes von 45° treten in Consequenz der obigen Aenderung an die Stelle der früheren Ausdrücke (43a, 43b) die beiden folgenden:

¹⁾ Vgl. l. c. p. 233.

$$\begin{aligned}
 (35) \quad \frac{J_p}{J_s} &= \frac{\nu^2 + q^2}{(p \cos e + \sin^2 e)^2 + q^2 \cos^2 e} \\
 &= \frac{1}{\nu^2 \cos^2 (e - r)} \frac{\nu^2 + q^2}{q^2 \operatorname{ctg}^2 e \sin^2 r}.
 \end{aligned}$$

Dahingegen bedürfen die beiden anderen (43 c, 43 d) für $d_D = X_p - X_s$ noch einer Erläuterung, welche indess erst später gegeben werden kann. Ausdruck (43 c) schreibt sich in ε und u auch so:

$$(36) \quad \operatorname{tg} d_D = - \frac{\sqrt{p^2 + q^2} \cos e \sin u - \sin^2 e \sin \varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2} \cos e \cos u + \sin^2 e \cos \varepsilon}.$$

III. Die Reflexion an absorbirenden Krystallen.

Bei der eben durchgeführten Untersuchung machten sich insbesondere die Relationen (21) nicht als physikalische Gesetze geltend, sondern sie brachten nur die Grössen $p, q, \sin e$ in einen für die Rechnung bequemen Zusammenhang mit zwei anderen Grössen a, b , welche durch sie bloß mathematisch definirt sind. Diese Grössen a, b sind aber unseren früheren Arbeiten zufolge als durch das Amplitudenverhältniss und den Phasenunterschied der Körper- und Aethertheilchen ein für allemal gegebene, von der Incidenz unabhängige constante Grössen; sie bilden die sogenannte Charakteristik des Mittels. Sofern übrigens der theoretische Beweis dieses Satzes bisher nur für lineare Schwingungen der Aethertheilchen¹⁾ geführt ist, so bleibt er jetzt für elliptische nachzuholen.

Das vorausgesetzte Mittel sei der Allgemeinheit wegen anisotrop. Man hat alsdann die Differentialgleichung (die frühere Gleichung (13)):

1) In absorbirenden isotropen Mitteln schwingen senkrecht zur Einfallsebene die Körpertheilchen wie die Aethertheilchen linear, in absorbirenden anisotropen Mitteln schwingen bei normaler Incidenz die Körpertheilchen im allgemeinen elliptisch, die Aethertheilchen linear (Pogg. Ann. Egbd. VIII. p. 462—469).

$$\begin{aligned} \text{VIII.} \quad & m \left(\mathfrak{A}_x \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \mathfrak{A}_y \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) + \sum m' \left(\mathfrak{A}_x' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} + \mathfrak{A}_y' \frac{d^2 \eta'}{dt^2} \right) \\ & = (e) \left\{ \mathfrak{A}_x \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{d^2 \xi}{dy^2} \right) + \mathfrak{A}_y \left(\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{d^2 \eta}{dy^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

wo wieder bloß zur Abkürzung die dritte Coordinate fortgelassen ist. Als ihre Integrale setzen wir jetzt anstatt der früheren zu speciellen Ausdrücke (28) die allgemeineren:

$$\begin{aligned} \text{IX.} \quad & \xi = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_\xi \right] \\ & \xi' = \mathfrak{A}_x' e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_\xi - \Delta_\xi \right] \\ & \eta = \mathfrak{A}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_\eta \right] \\ & \eta' = \mathfrak{A}_y' e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_\eta - \Delta_\eta \right] \\ & \zeta = \dots \dots \dots \quad \zeta' = \dots \dots \dots \end{aligned}$$

und haben darin $q, v \left(= \frac{v}{\omega} \right)$ die gleiche Bedeutung wie dort q, n . Setzt man diese Werthe ein, so kommt zunächst:

$$\begin{aligned} & m \mathfrak{A}_x^2 \cos(\varphi - \chi_\xi) + \sum m' \mathfrak{A}_x'^2 \cos(\varphi - \chi_\xi - \Delta_\xi) \\ & - m \mathfrak{A}_x^2 [(v^2 - q^2) \cos(\varphi - \chi_\xi) + 2pq \sin(\varphi - \chi_\xi)] \\ & + m \mathfrak{A}_y^2 \cos(\varphi - \chi_\eta) + \sum m' \mathfrak{A}_y'^2 \cos(\varphi - \chi_\eta - \Delta_\eta) \\ & - m \mathfrak{A}_y^2 [(v^2 - q^2) \cos(\varphi - \chi_\eta) + 2pq \sin(\varphi - \chi_\eta)] = 0. \end{aligned}$$

Zu einer erheblichen Vereinfachung dieser Form gelangte man, sobald sich zeigen liesse, dass man schreiben darf:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_x^2 \cos(\varphi - \chi_\xi) + \mathfrak{A}_y^2 \cos(\varphi - \chi_\eta) = \mathfrak{A}^2 \cos(\varphi - \chi) \\ & \mathfrak{A}_x'^2 \cos(\varphi - \chi_\xi - \Delta_\xi) + \mathfrak{A}_y'^2 \cos(\varphi - \chi_\eta - \Delta_\eta) = \mathfrak{A}'^2 \cos(\varphi - \chi - \Delta) \\ & \mathfrak{A}_x^2 \sin(\varphi - \chi_\xi) + \mathfrak{A}_y^2 \sin(\varphi - \chi_\eta) = \mathfrak{A}^2 \sin(\varphi - \chi), \end{aligned}$$

unter $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \chi, \Delta$ vier neue Coëfficienten verstanden. In

der That, eliminirt man aus der ersten oder dritten dieser Beziehungen φ , so dass dieselben in die beiden folgenden zerfallen:

$$\mathfrak{A}_x^2 \cos \chi_\xi + \mathfrak{A}_y^2 \cos \chi_\eta = \mathfrak{A}^2 \cos \chi,$$

$$\mathfrak{A}_x^2 \sin \chi_\xi + \mathfrak{A}_y^2 \sin \chi_\eta = \mathfrak{A}^2 \sin \chi,$$

so finden sich $\mathfrak{A}$ und χ bestimmt durch die Ausdrücke:

$$\mathfrak{A}^4 = \mathfrak{A}_x^4 + \mathfrak{A}_y^4 + 2\mathfrak{A}_x^2 \mathfrak{A}_y^2 \cos(\chi_\xi - \chi_\eta),$$

Xa.

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\mathfrak{A}_x^2 \sin \chi_\xi + \mathfrak{A}_y^2 \sin \chi_\eta}{\mathfrak{A}_x^2 \cos \chi_\xi + \mathfrak{A}_y^2 \cos \chi_\eta}.$$

Dieselben sind aber stets in eindeutiger und reeller Weise zu erfüllen, welche Werthe man auch den rechts stehenden Amplituden und Anomalien zulegen mag. Das Gleiche gilt von den zugeordneten Grössen:

$$\mathfrak{A}'^4 = \mathfrak{A}_x'^2 + \mathfrak{A}_y'^2 + 2\mathfrak{A}_x'^2 \mathfrak{A}_y'^2 \cos[(\chi_\xi - \chi_\eta) + (\mathcal{A}_\xi - \mathcal{A}_\eta)]$$

Xb.

$$\operatorname{tg}(\chi + \mathcal{A}) = \frac{\mathfrak{A}_x'^2 \sin(\chi_\xi + \mathcal{A}_\xi) + \mathfrak{A}_y'^2 \sin(\chi_\eta + \mathcal{A}_\eta)}{\mathfrak{A}_x'^2 \cos(\chi_\xi + \mathcal{A}_\xi) + \mathfrak{A}_y'^2 \cos(\chi_\eta + \mathcal{A}_\eta)}.$$

Und setzt man jetzt noch zur Abkürzung: $\varphi - \chi = \varphi'$, so erhält die allgemeine Bewegungsgleichung die bekannte Gestalt:

$$m\mathfrak{A}^2 \cos \varphi' + \Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \cos(\varphi' - \mathcal{A}) = m\mathfrak{A}^2[(v^2 - q^2) \cos \varphi' + 2pq \sin \varphi'].$$

Ihre Glieder sind nur mehr abhängig von der im nämlichen Augenblick den Aether- und Körpertheilchen zukommenden Energie und von der Phasendifferenz zwischen beiden. Sie charakterisirt daher die betreffende Richtung des Krystalles in absoluter Weise. Man folgert nunmehr:

$$v^2 - q^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \cos \mathcal{A}}{m \mathfrak{A}^2} = a^2 - b^2 - 1$$

XI.

$$pq = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \sin \mathcal{A}}{m \mathfrak{A}^2} = ab.$$

Nachdem wir so unser dioptrisches Grundgesetz in allgemeinster Form erwiesen haben, wenden wir uns jetzt zur

Intensitätsbestimmung des an absorbirenden Krystallen gespiegelten und gebrochenen Lichtes.

In Anbetracht der grossen Verwicklung der bezüglichen Verhältnisse beginnen wir mit dem denkbar einfachsten Falle, dass die optische Axe eines einaxigen Krystalles auf der Trennungsfläche senkrecht steht, und dass nur die aussergewöhnliche Brechung zu Stande kommt¹⁾. Sämmtliche Schwingungen liegen dann in der Einfallsebene.

Von den für isotrope Mittel aufgestellten Uebergangsbedingungen acceptiren wir sofort die beiden Gleichungen (3), sowie die daraus abgeleitete zweite des Systems (20), (20b), (20c) und die daher ebenfalls zutreffende Form der ξ -Componente der Gl. (19). Was dann weiter die zweite nothwendige Grenzgleichung betrifft, so geben wir ihr die Form:

$$(37) \quad \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_2,$$

verstehen darin unter der linken Seite die Dilatation des ersten Mittels und geben bezüglich der rechten folgende Erläuterung. Wir dürfen nämlich in Einklang mit unseren früheren Entwicklungen²⁾ annehmen, dass wir es auch hier mit einem ähnlichen Begriff zu thun haben, freilich nicht mit der wirklichen Dilatation des vorausgesetzten anisotropen Mittels, sondern mit der äquivalenten eines isotrop constituirten Mittels von bestimmter, aber vorläufig noch unbekannter Extinction und Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Wir coordiniren daher der thatsächlichen Schwingungscomponente:

$$\xi = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) - \chi_x \right]$$

die in gewisser Beziehung stellvertretende, auf die nämliche äussere Welle bezogene:

1) Die ausschliessliche gewöhnliche Brechung bei dieser Lage ist mit den isotropen Mitteln erledigt.

2) Vgl. z. B. Wied. Ann. I. p. 221.

$$\xi' = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} q' z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{z p' + x \sin e}{v} \right) - \chi'_x \right]$$

und bestimmen deren Unbekannte $\mathfrak{A}'_x$, χ'_x ; p' , q' ; a' , b' aus drei, jetzt der Reihe nach zu besprechenden Bedingungen.

Zunächst muss die Forderung erfüllt sein, dass bei jeder Verschiebung parallel der X -Axe seitens der Ausschläge ξ und ξ' eine gleiche Spannung entwickelt wird. Man hat daher die auf $z = 0$ zu beziehende Bedingungs-
gleichung:

$$\left(\frac{d^2 \xi'}{dz^2} + \frac{d^2 \xi'}{dx^2} \right) = \left(\frac{d^2 \xi}{dz^2} + \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right).$$

Setzt man darin obige Werthe ein, so wird dieselbe in Rücksicht auf die für beide Seiten geltenden Beziehungen 21:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}'_x [(a'^2 - b'^2) \cos(\varphi - \chi'_x) + 2a'b' \sin(\varphi - \chi'_x)] \\ &= \mathfrak{A}_x [(a^2 - b^2) \cos(\varphi - \chi_x) + 2ab \sin(\varphi - \chi_x)]. \end{aligned}$$

Sie zerfällt in die beiden folgenden:

$$\mathfrak{A}'_x [\cos \chi'_x (a'^2 - b'^2) - \sin \chi'_x 2a'b'] = \mathfrak{A}_x [\cos \chi_x (a^2 - b^2) - \sin \chi_x 2ab]$$

$$\mathfrak{A}'_x [\sin \chi'_x (a'^2 - b'^2) + \cos \chi'_x 2a'b'] = \mathfrak{A}_x [\sin \chi_x (a^2 - b^2) + \cos \chi_x 2ab]$$

und gibt für die Attribute des Hilfsstrahls die Werthe:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'_x \cos \chi'_x &= \frac{a^2 + b^2}{a'^2 + b'^2} \left[\mathfrak{A}_x \cos \chi_x \cos 2(\varepsilon - \varepsilon') - \mathfrak{A}_x \sin \chi_x \sin 2(\varepsilon - \varepsilon') \right] \\ - \mathfrak{A}'_x \sin \chi'_x &= \frac{a^2 + b^2}{a'^2 + b'^2} \left[\mathfrak{A}_x \cos \chi_x \sin 2(\varepsilon - \varepsilon') + \mathfrak{A}_x \sin \chi_x \cos 2(\varepsilon - \varepsilon') \right] \end{aligned}$$

wo ε , ε' die nämliche Bedeutung haben wie oben. So-
nach erhält man für die Componente selbst:

$$\xi' = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} q' z} \frac{a^2 + b^2}{a'^2 + b'^2} \cos [\varphi - \chi_x - 2(\varepsilon - \varepsilon')].$$

Was ferner die zweite und dritte Bedingung betrifft, so muss bei senkrechter Incidenz, bei welcher allgemein

die Aetherschwingungen geradlinig werden und zudem für den vorausgesetzten Specialfall die gebrochene Welle durch die Richtung der Axe hindurchgeht, ξ' mit dem bezüglichen ξ der ordinären Welle identisch werden. Entsprechen daher der Richtung der Axe die Bestimmungsstücke: a_2, b_2, ε_2 , so wird man zu setzen haben:

$$a' = a_2, \quad b' = b_2, \quad \varepsilon' = \varepsilon_2,$$

denn dann wird in der That für $e = 0$:

$$\xi'_0 = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} b_2 x} \cos(\varphi - \chi_x).$$

Andererseits muss ξ' bei jeder beliebigen Incidenz mit dem ξ der isotropen Mittel zusammenfallen, sobald man setzt: $\varepsilon = \varepsilon_2$.

Mit Rücksicht hierauf stellen wir nun für die in die Grenzgleichungen unseres anisotropen Mittels einzuführenden Schwingungen die beiden Ausdrücke auf:

$$\begin{aligned} \zeta_D &= \mathfrak{D} \frac{\sin e}{\sqrt{\nu^2 + q^2}} e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{z p + x \sin e}{v} \right) - \chi_z \right] \\ (38) \quad \xi_D &= \mathfrak{D} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{\nu^2 + q^2}} \frac{a^2 + b^2}{a_2^2 + b_2^2} e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \times \\ &\quad \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{z p' + x \sin e}{v} \right) - \chi_z - (\varepsilon + u) - 2(\varepsilon - \varepsilon_2) \right]. \end{aligned}$$

Dieselben erlangen dadurch die Form:

$$\begin{aligned} \sin \varphi + \mathfrak{R} \sin(\varphi - \chi_R) &= \frac{\mathfrak{D}}{\cos e} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{\nu^2 + q^2}} \frac{a^2 + b^2}{a_2^2 + b_2^2} \sin[\varphi - \chi_z - (\varepsilon + u) - 2(\varepsilon - \varepsilon_2)] \\ (39) \quad \sin \varphi - \mathfrak{R} \sin(\varphi - \chi_R) &= \mathfrak{D} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{\nu^2 + q^2}} \sin(\varphi - \chi_z - 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Und integrirt man ihr Product, die Gleichung der augenblicklichen lebendigen Kräfte, für die Zeiteinheit, so kommt:

$$1 - \mathfrak{R}^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{\cos e} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\nu^2 + q^2} \frac{(a^2 + b^2)^2}{a_2^2 + b_2^2} \cos(\varepsilon + u - 2\varepsilon_2),$$

oder nach bekannter Umformung:

$$1 - \Re^2 = \Im^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a_2^2 + b_2^2} \right)^2 \frac{p(a_2^2 - b_2^2) + 2a_2 b_2 q}{(\nu^2 + q^2) \cos e}.$$

Bevor wir weiter die Amplituden und Phasenverschiebungen der gespiegelten und gebrochenen Welle selbst berechnen, wollen wir den Weg andeuten, auf welchem man mit Benutzung des Complexen zum nämlichen Ziele gelangt.

Zufolge unserer früheren Arbeit über die Grenzbedingungen durchsichtiger anisotroper Mittel hat man für Schwingungen parallel der Einfallsebene¹⁾:

$$(40) \quad \begin{aligned} 1 - R &= D n \\ 1 + R &= \frac{D}{\cos e} (\cos r \cos \vartheta - \sin r \operatorname{tg} \delta), \end{aligned}$$

wo ϑ den Azimuthwinkel der Schwingungsebene und δ den Winkel zwischen Strahl und Normale bedeutet. Für letzteren hat man die Beziehungen:

$$(41) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2} \sin \psi \cos \psi, \\ \omega^2 &= \omega_1^2 \sin^2 \psi + \omega_2^2 \cos^2 \psi, \end{aligned}$$

unter ψ die Neigung der Wellennormale zur Axe verstanden.

In unserem Specialfalle ist nun $\vartheta=0$, $\psi=r$, so dass sich schreibt:

$$\begin{aligned} \cos r - \sin r \operatorname{tg} \delta &= \cos r (1 - \operatorname{tg} r \operatorname{tg} \delta) \\ &= \cos r \left(1 - \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2} \sin^2 r \right) = \cos r \frac{\omega_2^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Infolge dessen werden die Grenzgleichungen:

$$(42) \quad \begin{aligned} 1 - R &= D n \\ 1 + R &= D \frac{\cos r}{\cos e} \frac{n^2}{n_2^2}. \end{aligned}$$

Und geht man zu complexen Brechungsverhältnissen über:

1) Wied. Ann. I. p. 220. Gleichungen 13a u. 13b.

$$1 - R = D(a + b\sqrt{-1})$$

$$1 + R = \frac{D}{\cos e} (c + d\sqrt{-1}) \frac{(a^2 - b^2) + 2ab\sqrt{-1}}{(a_2^2 - b_2^2) + 2a_2b_2\sqrt{-1}}.$$

Diese letztere Beziehung ist aber materiell die nämliche, die wir oben mittelst der Bedingungsgleichung für den Hilfsstrahl formulirten. Trat dort das Walten bestimmter Elasticitätsgesetze mehr direct in den Vordergrund, so hat das jetzige Verfahren den Vorzug grösserer Bequemlichkeit. Wir wollen es daher auch zur Berechnung der Amplituden und Phasen verwenden.

Bei Einhaltung des gleichen Ganges wie in der früheren Abhandlung¹⁾ erhält man:

$$R = \frac{\sin e \cos r - n_2^2 \cos e \sin r}{\sin e \cos r + n_2^2 \cos e \sin r} \\ = \frac{p - \cos e (a_2^2 - b_2^2) + \sqrt{-1} (q - 2a_2b_2 \cos e)}{p + (a_2^2 - b_2^2) \cos e + \sqrt{-1} (q + 2a_2b_2 \cos e)}.$$

Folglich:

$$= J_R \frac{p^2 + q^2 - 2 \cos e [p(a_2^2 - b_2^2) + q2a_2b_2] + (a_2^2 + b_2^2)^2 \cos^2 e}{p^2 + q^2 + 2 \cos e [p(a_2^2 - b_2^2) + q2a_2b_2] + (a_2^2 + b_2^2)^2 \cos^2 e} \\ (43) \quad \text{ctg } g = \frac{2 \cos e [p(a_2^2 - b_2^2) + q2a_2b_2]}{p^2 + q^2 + (a_2^2 + b_2^2)^2 \cos^2 e} \\ \text{tg } \chi_R = \frac{2 \cos e [q(a_2^2 - b_2^2) - p2a_2b_2]}{p^2 + q^2 - (a_2^2 + b_2^2)^2 \cos^2 e}.$$

Dieselben gehen sofort in die Cauchy'schen Ausdrücke über, wenn man den Index 2 in a_2 , b_2 fallen lässt.

Ebenso für das gebrochene Licht:

$$D = \frac{2n_2^2 \text{ctg } e \sin^2 r}{\sin e \cos r + n_2^2 \cos e \sin r} \\ = \frac{1}{a + b\sqrt{-1}} \frac{2 \cos e (a_2^2 - b_2^2) + \sqrt{-1} 2a_2b_2}{p + (a_2^2 - b_2^2) \cos e + \sqrt{-1} (q + 2a_2b_2 \cos e)}$$

Hier führt wieder, analog zu früher, die einfache Fresnel'sche Regel zum Quadrate eines Coefficienten D_0 , dessen

1) Wied. Ann. I. p. 233.

Beziehung zu $\mathfrak{D}$ in Gl. (26) ausgesprochen ist. Man erhält daher für das Quadrat von $\mathfrak{D}$:

$$(44) \quad J_D = \left(\frac{a_2^2 + b_2^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \frac{4 \cos^2 e (\nu^2 + q^2)}{p^2 + q^2 + 2 \cos e [p(a_2^2 - b_2^2) + q 2a_2 b_2] + (a_2^2 + b_2^2)^2 \cos^2 e}$$

Wenn schon das uns beschäftigende Problem selbst für den behandelten einfachsten Fall der doppeltbrechenden Mittel eine umständliche Durchführung verlangte und ziemlich verwickelte Formeln gab, so wird das in noch höherem Maasse der Fall sein, wenn die optische Axe, die nach wie vor in der Einfallsebene bleiben möge, mit der Richtung des Lothes einen beliebigen Winkel $\mathfrak{L}$ macht.

Wir wollen uns hier blos auf die Hervorhebung beschränken, dass der Grundsatz der Gleichheit der Dilatation allgemein auf ein solches auxiliäres isotropes Mittel zu beziehen ist, welches mit dem gegebenen anisotropen längs der X -Axe die gleiche Spannkraft entwickelt. Zu den endgültigen Formeln gelangt man am leichtesten mittelst Benutzung des Complexen, und zwar ist hier in den Gleichungen (41) für ψ der Werth $\psi = r - \mathfrak{L}$ einzusetzen. Die beiden Schwingungs-Componenten werden so:

$$(45) \quad \begin{aligned} \zeta_D &= \mathfrak{D} e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \sin r \cos(\varphi_1 - \chi_z) \\ \xi_D &= \mathfrak{D} e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \{ \cos r \cos(\varphi_1 - \chi_z - \beta) - (\nu^2 + q^2) \sin r \times \\ &\quad [U \sin r \cos r \cos 2\mathfrak{L} - \sin \mathfrak{L} \cos \mathfrak{L} (V \cos^2 r - W' \sin^2 r)] \}, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp + x \sin e}{v} \right), \quad \varphi_1' = \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{zp' + x \sin e}{v} \right), \\ \sin r &= \frac{\sin e}{\sqrt{\nu^2 + q^2}}, \quad \cos r = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{\nu^2 + q^2}}, \quad \beta = \varepsilon + u. \\ U &= \frac{\cos(\varphi_1' - \chi_z - \beta + 2\varepsilon_1)}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{\cos(\varphi_1' - \chi_z - \beta + 2\varepsilon_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$V = \frac{\cos(\varphi'_1 - \chi_z - 2\beta + 2\varepsilon_1)}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{\cos(\varphi'_1 - \chi_z - 2\beta + 2\varepsilon_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$W = \frac{\cos(\varphi'_1 - \chi_z + 2\varepsilon_1)}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{\cos(\varphi'_1 - \chi_z + 2\varepsilon_2)}{a_2^2 + b_2^2},$$

und wo wieder q' den sich zu p' zuordnenden Absorptionscoefficienten des Hilfsstrahls bedeutet.

Ich schliesse diesen Abschnitt mit einem nochmaligen Hinweis auf die beiden bemerkenswerthen Winkel, die man den Polarisationswinkel und den Hauptwinkel nennt. Erscheint ersterer von jeher sowohl theoretisch wie experimentell an den zweiten Hauptfall, d. h. an Schwingungen parallel zur Einfallsebene gebunden, so ist letzterer zuerst von Cauchy aus dem Zusammenwirken von Schwingungen senkrecht und parallel zur Einfallsebene abgeleitet, und ebenso vermag man seine Lage nur mit Beihülfe beider aufzufinden. Die p. 101 gegebene Deduction knüpft nun diesen Haupteinfallswinkel gleichfalls an Schwingungen, die in der Einfallsebene liegen.

Beide Winkel haben ihre Bedeutung sowohl für anisotrope wie für isotrope Mittel, für erstere indess begreiflicher Weise nur dann, wenn die Einfallsebene mit einer der drei sogenannten Hauptebenen zusammenfällt¹⁾.

Was nun ihre präzise Definition betrifft, so dürfte es sich empfehlen, den Polarisationswinkel durch die Gleichheit der äquivalenten Volumina auf dem gespiegelten und gebrochenen Strahle ($M_R = M_D$), den Hauptwinkel dagegen durch die Senkrechtlichkeit der Schwingungen beider zu charakterisiren. Die

1) Das Neumann-Seebeck'sche Theorem über die Lage des Polarisationswinkels der extraordinären Welle eines einaxigen Krystalles spricht sich aus durch die Gleichung:

$$\sin^2 e = \frac{1 - \omega_1^2}{1 - \omega_1^2 \omega_2^2} \sin^2 \Omega + \frac{1 - \omega_2^2}{1 - \omega_1^2 \omega_2^2} \cos^2 \Omega.$$

Ueber dessen Ableitung vergl. z. B. Astr. Undulationsth. p. 237, Radicke's Optik. I. p. 257.

erstere Bedingung, die sich für durchsichtige anisotrope Mittel durch die Gleichungen ausspricht:

$$\sigma \cos r' = v \cos e$$

$$m(1 - R^2 - D^2) = m' D'^2,$$

unter r' und $\frac{v}{\sigma} = n'$ den Brechungswinkel und Brechungsindex des „Strahles“ verstanden, schliesst zugleich ein vollständiges Verschwinden (für absorbirende Mittel eine blosse Schwächung) der Intensität des reflektirten Strahles in sich ein. Die letztere dagegen ist identisch mit dem Brewster'schen Gesetz, d. h. mit der Gleichung:

$$n = \operatorname{tg} e.$$

unter n den Brechungsindex der „Wellennormale“ verstanden.

Beide Definitionen fallen für durchsichtige isotrope Mittel in eine zusammen.

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

VII. Ueber Fluorescenz; von E. Lommel.

(Sitzungsber. der physik.-medic. Societät zu Erlangen. 23. Juli 1877, vom Herrn Verf. mitgetheilt.)

In der Sitzung der Erlanger Societät vom 17. Juli vorigen Jahres¹⁾ habe ich einige bis dahin noch nicht untersuchte fluorescirende Substanzen beschrieben, welche mit dem Naphthalinroth und Chlorophyll die Eigenschaft theilen, dass bei ihnen auch brechbarere Strahlen ihres Fluorescenzlichtes durch weniger brechbare des erregenden Lichtes hervorgerufen werden. Nachdem ich bei dieser Untersuchung die Ueberzeugung gewonnen hatte, dass die bisherige Verkennung dieses namentlich beim Naphthalinroth so schlagend her-

1) Pogg. Ann. CLIX. p. 514.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. III.