UN TEOREMA SULLE LINEE D'EQUIDISTANZA OBLIQUA DA UNA DATA CURVA, SOPRA UNA SUPERFICIE.

Nota di **Corradino Mineo** (Palermo).

Adunanza del 13 aprile 1919.

Sopra una superficie S si posson chiamare *linee d'equidistanza obliqua secondo l'angolo ω_0 da una data curva C* ¹⁾, le linee luogo degli estremi dei segmenti geodetici di lunghezza costante spiccati dai singoli punti di C , da una stessa parte di essa, e formanti col verso positivo di C angoli dello stesso verso eguali a ω_0 .

Quando tali linee d'equidistanza obliqua da C sono geodeticamente parallele, cioè coincidono con le linee d'equidistanza ortogonale da C ?

Assunte come coordinate curvilinee d'un punto P della S la sua distanza u secondo l'angolo ω_0 da C ²⁾ e l'arco v di questa curva che va da un'origine arbitraria al piede della distanza u , l'elemento lineare prende ovviamente la forma

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

dove f è funzione di sola v e inoltre si ha

$$(2) \quad f = (\sqrt{g})_{u=0} \cos \omega_0.$$

Siamo allora condotti a domandarci quando le linee $u = \text{costante}$ risultino geodeticamente parallele. Per questo, com'è noto, è condizione necessaria e sufficiente che il parametro differenziale 1° di u , cioè

$$\Delta_1 u = \frac{g}{g - f^2},$$

¹⁾ Vedi F. SEVERI, *Sulla curvatura delle superficie e varietà* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLII (1917), pp. 227-259].

²⁾ Date certe condizioni di regolarità della S , si può dimostrare che per ogni punto P d'una conveniente regione comprendente la curva C , passa uno ed un solo segmento geodetico formante con C l'angolo ω_0 . Per il caso di $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ vedi G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, vol. II (Paris, Gauthier-Villars, 1889), p. 413.

sia funzione di sola u ³⁾. Tale condizione si traduce subito in questa:

$$(3) \quad g = f^2 \varphi^2,$$

essendo φ una funzione arbitraria di sola u . La (3) esprime intanto il fatto che ogni linea d'equidistanza obliqua secondo ω_0 da C incontra secondo un angolo costante le geodetiche $v = \text{cost.}$ Infatti, per l'angolo ω di due linee coordinate, si ha, nel caso della (3):

$$\cos \omega = \frac{1}{\varphi},$$

e quindi ω è costante per $u = \text{cost.}$ Ma dalla (3) è facile poi dedurre che la S è allora applicabile su una superficie di rotazione, i cui paralleli sono appunto le deformate delle linee $u = \text{cost.}$ Basta osservare che, stante la (3), il parametro differenziale 2° di u è

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{\varphi^2 - 1}} \frac{d}{du} \left(\frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2 - 1}} \right);$$

vale a dire che $\Delta_2 u$, quindi anche il rapporto $\Delta_2 u / \Delta_1 u$, è funzione di sola u ; epperò le $u = \text{cost.}$ sono anche isoterme ⁴⁾. E dacchè la S possiede una famiglia di linee (le $u = \text{cost.}$) isoterme e geodeticamente parallele, essa, per un noto teorema, è applicabile su una superficie di rotazione, sui paralleli della quale si distendono le linee anzidette (che quindi sono d'egual curvatura totale) ⁵⁾.

Possiamo dire dunque che, per la questione che ci occupa, è condizione necessaria che la S , supposta a curvatura non costante, sia applicabile su una superficie di rotazione e C sia d'egual curvatura totale (quindi anche a curvatura geodetica costante).

Reciprocamente, su ogni superficie S , a curvatura non costante, applicabile su una superficie di rotazione, le linee d'equidistanza obliqua da una curva C d'egual curvatura totale sono geodeticamente parallele, come è facile persuadersi pensando alla flessione continua che la S ammette allora in sè medesima, durante la quale C striscia su sè stessa.

Nel caso che S sia a curvatura totale costante, resta come condizione necessaria

³⁾ Vedi L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I (Pisa, Spoerri, 1902).

⁴⁾ BIANCHI, loc. cit. ³⁾.

⁵⁾ Si può anche osservare che nell'ipotesi (3) l'elemento lineare (1), con la sostituzione

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{\varphi^2 - 1}}{\varphi} du, \quad \beta = \int \frac{du}{\varphi^2} + \int f dv,$$

si trasforma in

$$ds^2 = d\alpha^2 + \varphi^2 d\beta^2,$$

che compete a una superficie applicabile sopra una di rotazione, i cui paralleli sono le trasformate delle $u = \text{cost.}$

che C sia a curvatura geodetica costante. Ma tale condizione è anche sufficiente, il che si può vedere come segue ⁶⁾.

Nel nostro sistema di coordinate (u, v) abbiamo in generale, per la curvatura totale K di S e per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ delle $u = \text{cost.}$, le formole seguenti:

$$(4) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{g-f^2}} \frac{\partial^2 \sqrt{g-f^2}}{\partial u^2}, \quad \frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{\sqrt{g-f^2}} \left\{ -\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f}{\sqrt{g}} \right) \right\}.$$

Supponendo K costante, secondochè tale costante è nulla, positiva o negativa, si ottiene rispettivamente dall'integrazione della 1^a delle (4):

$$\sqrt{g-f^2} = f_1 u + f_2,$$

$$\sqrt{g-f^2} = f_1 \operatorname{sen} \frac{u}{R} + f_2 \cos \frac{u}{R},$$

$$\sqrt{g-f^2} = f_1 \sinh \frac{u}{R} + f_2 \cosh \frac{u}{R},$$

dove f_1, f_2 sono due funzioni arbitrarie di v , R una costante. D'altra parte, se C è a curvatura geodetica costante, la 2^a delle (4) per $u = 0$ dovrà ridursi a una costante: tenendo conto di tale condizione e della (2), si ricava in ogni caso, essendo c una costante:

$$f_1 = cf \operatorname{tg} \omega_0, \quad f_2 = f \operatorname{tg} \omega_0;$$

e la (3), quindi, è sempre soddisfatta.

Concludendo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè su una superficie S a curvatura variabile le linee d'equidistanza obliqua dalla curva C di S siano in pari tempo curve d'equidistanza ortogonale da C , è che S sia applicabile sopra una superficie di rotazione e C curva di egual curvatura totale su S . Se S è invece a curvatura totale costante, occorre e basta che C sia a curvatura geodetica costante su S .

Palermo, marzo 1919.

CORRADINO MINEO.

⁶⁾ Tale sufficienza è incidentalmente dimostrata dal SEVERI [l. c. ¹⁾] nel caso particolare che la C sia geodetica su S .