VI. *Entwicklung der Fundamentalgesetze über die Elasticität und das Gleichgewicht im Innern chemisch homogener Körper; von J. H. Koosen.*

Erste Abhandlung.

Die Veränderungen, welche chemisch homogene Körper erleiden, wenn sie äußeren Einwirkungen unterworfen sind, werden qualitativ und quantitativ außer von der Art dieser äußeren Wirkungen, durch die Kräfte bedingt, welche zwischen den kleinsten Theilen der Körper selbst thätig sind; obwohl uns die Natur dieser Molecularkräfte gänzlich unbekannt ist, so ist es doch den analytischen Untersuchungen mehrerer Geometer wie Poisson, Cauchy, Lamé, Navier gelungen, unter der allgemeinen und sich gewissermaßen von selbst verstehenden Voraussetzung, daß die Kraft, welche irgend ein kleiner Theil der Materie auf irgend einen anderen ähnlichen Theil ausübt, eine abstossende oder anziehende Kraft sey, welche immer in der Verbindungslinie beider Molecüle wirke und eine uns unbekannte Function ihres gegenseitigen Abstandes ist, gewisse allgemeine Sätze über das Gleichgewicht und die Bewegung der Molecüle unter dem Einflusse äußerer Einwirkungen abzuleiten, welche von der Beschaffenheit jener Function gänzlich *unabhängig* sind; diese Gesetze müssen bestehen, welcher Art auch die Kraft sey, welche je zwei Molecüle einer Masse aufeinander ausüben, so lange nur jene allgemeinen Voraussetzungen über die Natur dieser Kraft, daß sie nämlich allein Function des gegenseitigen Abstandes sey, Gültigkeit haben. Die Theorie der Licht- und Schallschwingungen, wie sie innerhalb der letzten vierzig Jahre in vollkommener Uebereinstimmung mit den Versuchen durch die Arbeiten Fresnel's, Young's, Cauchy's, Savart's ausgebildet worden, ist eins der glänzendsten Resultate der analytischen Behandlung der

Molecularkräfte; allein so bedeutend das Ergebniss dieser Betrachtungsweise auf dem Gebiete der molecularen *Dynamik* gewesen, so wenig hat man bisher vermocht die Gesetze der *Statik* in ähnlicher Weise auf die Wirkung der Molecularkräfte zurückzuführen. Die wenigen Sätze für das Gleichgewicht und die Elasticität starrer Körper, welche von Poisson, Cauchy, Lamé, Navier aus der Wirkung der Molecularkräfte abgeleitet wurden, sind zum Theil nur unter gewissen Einschränkungen gültig, was dieselben für die praktische Anwendung ziemlich unbrauchbar macht, wie namentlich die Bedingung, daß alle Verschiebungen der Molecüle, auf welche jene Gesetze Anwendung finden sollen, nur Gröfsen kleiner Ordnung seyn dürfen; zum Theil sind die erhaltenen Resultate für die Statik offenbar falsch und den Versuchen widersprechend, wie z. B. das Gesetz über das Verhältniss der longitudinalen Ausdehnung zur transversalen Zusammenziehung eines an einem Ende belasteten Prismas; endlich lassen uns die bisherigen Untersuchungen über eine große Reihe von Erscheinungen, welche ebenfalls nothwendig in das Gebiet der Statik der Molecularkräfte gehören, wie über die Natur der Aggregatzustände, über die Hydrostatik, über die Elasticität und das Gleichgewicht der Gase und Dämpfe, sowie auch über die Erscheinungen der Wärme, soweit solche nicht als Bewegungsphänomene aufgefaßt werden können, völlig im Dunkeln.

Die Schwierigkeit die eben genannten Erscheinungen aus den Gesetzen der molecularen Statik zu erklären, hat manche Physiker bewogen anzunehmen, daß deren Erklärung eben aus der ursprünglichen einfachen Hypothese unmöglich sey, daß nämlich die Kraft mit welcher ein Theil der Materie auf einen anderen homogenen Theil wirke, nicht blofs eine Function des gegenseitigen Abstandes beider Theile seyn könne, sondern daß diese Kraft auch noch von anderen Beziehungen, namentlich von der Gestalt und gegenseitigen Lage der betreffenden Molecüle abhängig seyn müsse, wie namentlich die Eigenschaften der

Krystalle auf ein solches Verhältniß hinzudeuten scheinen. Wenn nun aber schon die Ableitung der statischen und dynamischen Erscheinungen aus der einfachen Hypothese, daß die Molecularkraft nur Function des Abstandes der Molecüle sey, schwierig genug ist, so würden sich diese Schwierigkeiten durch das Hinzutreten eines neuen Momentes, wie der Gestalt und Lage der Molecüle, welches dann ebenfalls mit in den Calcül gezogen werden müßte, unendlich steigern, und bei dem jetzigen Zustande der mathematischen Analyse der Entwicklung der Naturgesetze aus diesen Annahmen unübersteigliche Hindernisse entgegensetzen.

Ich habe es daher vorgezogen von einer Berücksichtigung der Gestalt und Lage der Molecüle gänzlich abzu-
sehen, und zu versuchen, ob sich dennoch nicht aus der ursprünglichen Hypothese, daß die Molecularkraft allein Function des Abstandes sey, aber auf einer allgemeineren Grundlage, als dieß von den früheren Bearbeitern dieses Gegenstandes geschehen ist, und mit Weglassung verschiedener einschränkender Bedingungen, durch welche dieselben die Rechnungen zu vereinfachen geglaubt haben, — die Gesetze der Statik übereinstimmend mit der Erfahrung durch den Calcül entwickeln lassen, ebenso wie dieß für die Dynamik schon durch die Theorie der Licht- und Schall-Schwingungen geleistet worden ist.

Wenn es uns gelänge die Gesetze der Statik ebenso allgemein und mit der Erfahrung übereinstimmend, als dieß schon zum größten Theile in Bezug auf die Bewegungserscheinungen geschehen ist, aus der einfachen Hypothese der Molecularkraft zu entwickeln, so würde sich damit die Wissenschaft einer *physikalischen Mechanik* bilden, welche das Seitenstück zu der im vorigen Jahrhundert durch Euler, Bernoulli, Laplace und Lagrange begründeten *analytischen Mechanik* seyn würde. Die letztere, die analytische Mechanik, löst allerdings die wesentlichen Probleme der Statik und Dynamik, aber nur insofern sie die Kräfte auf sogenannte materielle Punkte wirken läßt

und die concrete Materie als eine starre unveränderliche Verbindung solcher materiellen Punkte miteinander ansieht, eine Vorstellung, die der Wirklichkeit durchaus widerspricht, denn jede auf einen Körper einwirkende Kraft ist mit Verschiebungen aller seiner Theile begleitet und durch diese letzteren allein wird es den Molecularkräften möglich neue Werthe anzunehmen, vermöge deren sie der äusseren Kraft das Gleichgewicht zu halten im Stande sind. Die elementare oder analytische Mechanik in ihrer Anwendung auf ausgedehnte Massen führt alle Probleme auf die Statik und Dynamik eines einzelnen materiellen Punktes zurück, vermittelt des Axioms, dass man den Angriffspunkt jeder äusseren Kraft auf eine ausgedehnte Masse, als eine unveränderliche feste Verbindung materieller Punkte, an einen beliebigen Punkt im Innern des Körpers in der Richtung der Kraft verlegen könne; aus diesem Grundsatz allein sind die Gesetze vom Parallelogramm der Kräfte, vom Hebel und von den Momenten, auf welchen die ganze analytische Mechanik beruht, beweisbar; jener Grundsatz selbst ist aber durch nichts beweisbar, weil er in der That falsch ist; denn die in irgend einem Punkte im Innern einer Masse wirkende Kraft ist nicht die von Aussen dorthin verlegte Kraft, sondern die eigenthümliche Molecularkraft, welche erst durch den veränderlichen Abstand der einzelnen Theile im Innern erregt wird; auf diesen veränderlichen Abstand der Molecüle nimmt aber die elementare Mechanik, indem sie die Körper als eine feste Verbindung materieller Punkte betrachtet, keine Rücksicht, ist daher genöthigt, bei der Lösung eines bestimmten Problems zur Annahme neuer Hypothesen Zuflucht zu nehmen, indem sie an der Stelle der Molecularkraft Spannungen im Inneren der Körper entstehen lässt, durch deren Einfluss erst den äusseren Kräften das Gleichgewicht gehalten wird. So kann sie z. B. das Problem der elastischen Platten nur dadurch lösen, dass sie longitudinale Spannungen im Innern der Platte entstehen lässt, welche Functionen der Krümmung an den betreffenden

Punkten sind und zugleich als proportional dem Abstände von der neutralen Linie angenommen werden; wie man aber das Entstehen solcher Spannungen und ihr Wirken nach diesen bestimmten Gesetzen zu erklären habe, darüber giebt die analytische Mechanik keine Auskunft.

Dieser Mangel der elementaren Mechanik und die Nothwendigkeit ihm durch Begründung einer *physikalischen* Mechanik abzuhelpfen, welche zugleich auf die Verschiebungen der Theile im Innern der Materie und auf die dadurch entstehende Aenderung der Molecularkräfte Rücksicht nimmt, ist zuerst von Poisson in seinem die physikalische Mechanik begründenden: »*Mémoire sur le mouvement des corps élastiques*« deutlich ausgesprochen worden und ich kann nicht umhin zur Verdeutlichung der vorgehenden wie der nachfolgenden Betrachtungen die betreffenden Stellen daraus hier zu wiederholen. Er sagt dort (*Mém. de l'Acad. des sciences* T. VIII, p. 360): »*Il serait à désirer que les géomètres reprissent sous ce point de vue physique et conforme à la nature les principales questions de la mécanique. Il a fallu les traiter d'une manière tout-à-fait abstraite, pour découvrir les lois générales de l'équilibre et du mouvement; et en ce genre de généralité et d'abstraction, Lagrange est allé aussi loin qu'on puisse le concevoir, lorsqu'il a remplacé les liens physiques des corps par des équations entre les coordonnées de leurs différents points: c'est là ce qui constitue la mécanique analytique; mais à côté de cette admirable conception, on pourrait maintenant élever la mécanique physique, dont le principe unique serait de ramener tout aux actions moléculaires, qui transmettent d'un point à un autre l'action des forces données, et sont l'intermédiaire de leur équilibre. De cette manière, on n'aurait plus d'hypothèses spéciales à faire, lorsqu'on voudra appliquer les règles générales de la mécanique à des questions particulières. Ainsi, dans le problème de l'équilibre des cordes flexibles, la tension qu'on introduit pour le résoudre, sera le résultat immédiat des actions mutuelles des molécules, un tant soit peu écartées de leurs positions*

naturelles; dans le cas de la lame élastique, le moment d'élasticité par flexion proviendra de ces mêmes actions, considérées dans toute l'épaisseur de la plaque, et son expression sera déterminée sans aucune hypothèse; enfin, les pressions exercées par les fluides dans leur intérieur et sur les parois des vases qui les contiennent, seront aussi les résultantes des actions de leurs molécules sur les surfaces pressées, au plutôt sur une couche fluide extrêmement mince, en contact avec chaque surface. Le principe de l'égalité de pression en tous sens, qui sert de base à l'hydrostatique et que l'on emprunte de l'expérience, sera actuellement une conséquence de cette notion de la pression moléculaire, et de la parfaite mobilité des particules fluides. Cette conséquence ne dépend pas de son degré de compressibilité; il suffit seulement que le fluide jouisse de cette propriété à un degré aussi faible que l'on voudra; et c'est ce qui a lieu dans les liquides même dont le volume résiste le plus aux forces extérieures..... En général dans les applications de la mécanique, on doit avoir égard, autant qu'on le peut, à toutes les circonstances physiques qui tiennent à la nature intime des corps, et il y a déjà longtemps qu'on en a senti la nécessité, pour faire disparaître l'indétermination de certaines questions de mécanique abstraite; indétermination qui ne saurait avoir lieu dans la nature, où tout, en effet, doit être déterminé et ne comporter qu'une seule solution."

Wenn es nun gelänge in diesem Sinne die Mechanik umzuarbeiten und alle Probleme der Statik und Dynamik auf die Hypothese einer Molecularkraft zurückzuführen, welche auf alle Aenderungen, die im Innern der Körper vor sich gehen, Rücksicht nimmt, so würde nicht allein die Unbestimmtheit in der Auflösung der Probleme durch die analytische Mechanik, welche Poisson beklagt, verschwinden, sondern wir würden auch zugleich nothwendig eine klare Anschauung, wenn nicht gar eine mathematische Ableitung derjenigen Phänomene gewinnen, welche hisher gänzlich ausser dem Bereiche der analytischen Mechanik gelegen haben, weil sie, wie das Wesen der Aggregatzu-

stände, die Wärmeerscheinungen, die Cohäsionsverhältnisse, die Krystallisation u. s. w. wesentlich von dem Wirken der innern Molecularkräfte allein abhängen, und der Einfluß äußerer Kräfte, welchen die Mechanik bisher allein zu berücksichtigen vermochte, in diesen Erscheinungen ein untergeordneter ist; dann würden die genannten Phänomene aus dem rein physikalischen Gebiete in das *mechanische* übergehen, ähnlich wie dies schon für die Optik und Akustik durch die Ausbildung der Undulationstheorie geschehen ist.

Wenn wir annehmen, daß die Kraft, mit welcher irgend zwei materielle Theile m , m' im Innern einer Masse auf einander wirken, allein eine Function ihrer gegenseitigen Entfernung $mm' = r$ ist und proportional den Massen der betreffenden Theile, so hängt die Bildung der Gleichungen des Gleichgewichtes für irgend einen Punkt m zunächst davon ab, daß man die Größe der Kraft bestimme, welche auf m von allen übrigen materiellen Theilen $m'm'' \dots$ in irgend einer Richtung ausgeübt wird; zunächst für den Fall, daß alle übrigen materiellen Theile $m', m'', \dots$ von gleichen Massen und in vollkommen gleicher Weise um m herum im Raume vertheilt sind, wo man sogleich sieht, daß die Resultante ihrer Wirkung auf m nach jeder Richtung gleich Null ist, was keines weiteren Beweises bedarf; dies ist der *natürliche* Zustand eines Körpers, in welchem die Masse durch den ganzen Raum gleichmäßig vertheilt ist.

Erleiden nun alle materiellen Theile $m, m', m'' \dots$ Verschiebungen, welche wir uns als stetige Functionen der Coordinaten der betreffenden Punkte gegeben denken, und bezeichnen wir die Verschiebungen parallel den Axen der Coordinaten der x, y, z , resp. durch u, v, w für den materiellen Theil m , durch u', v', w' für m' u. s. f., so läßt sich der analytische Ausdruck für die Gesamtwirkung auf m nach irgend einer Richtung nur dann in endlicher Form darstellen, wenn man die Bedingung stellt, daß von allen materiellen Theilen $m', m'' \dots$ nur diejenigen berücksich-

tigt zu werden brauchen, deren Abstand von m eine so kleine Gröfse ist, dafs allemal die höheren Potenzen dieses Abstandes, so wie auch der Projectionen desselben, gegen die niederen vernachlässigt werden können. Es ist dies eine Einschränkung, welche von allen früheren Bearbeitern dieses Gegenstandes als nothwendig erkannt worden ist, deren wahre Bedeutung aber nicht etwa darin besteht, dafs man hypothetisch die Existenz einer ganz neuen Art von Kraft verlangt, welche abweichend von allen anderen bekannten aus der Ferne wirkenden Naturkräften nur in unendlich kleinen Entfernungen thätig seyn dürfe, eine Annahme, die durch nichts gerechtfertigt wäre, sondern die Molecularkraft wirkt der Function des Abstandes gemäß, welche ihr Gesetz darstellt, eben so gut in grofse wie in kleine Entfernungen, nur soll das Gesetz ihrer Abnahme mit der Entfernung von der Art seyn, dafs bei gleichmäfsiger oder nahezu gleichmäfsiger Vertheilung der Molecüle im Raume um ein bestimmtes Molecül die Gesamtwirkung auf das letztere nach irgend einer Richtung durch die Wirkung derjenigen materiellen Theile, welche innerhalb eines kleinen Radius um dasselbe herum gelegen sind, dargestellt werden könne, ohne dafs man in der Rechnung durch die Vernachlässigung der Partialwirkungen aller übrigen aufserhalb jenes Radius gelegenen Theile einen gröfseren Fehler begeht, als derselbe vergleichsweise bei der Bestimmung der Naturgesetze durch Beobachtung zulässig ist. Die genannte Einschränkung ist keine Hypothese, sondern eine nothwendige Folge der Beobachtung, denn diese lehrt, dafs die Gesetze, denen die mechanischen physikalischen und chemischen Erscheinungen folgen, welche von dem Wirken der Molecularkraft abhängen, dieselben sind, sie mögen an gröfseren oder kleineren Massen beobachtet werden, dafs daher die Dimensionen der kleinsten Mengen, mit welchen experimentirt worden ist, immer noch bei Weitem gröfser seyn müssen, als der gröfste Radius der Molecularwirkung, welchen man in der Rechnung zu berücksichtigen hat; denn wäre das

letztere nicht der Fall, so müßte die Beobachtung schon längst Abweichungen in den Naturgesetzen ergeben haben, je nachdem die Versuche mit großen oder mit kleinen Massen angestellt worden sind; Abweichungen, welche unzweifelhaft vorhanden sind, die aber bisher immer innerhalb der Gränze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler gelegen haben.

Die Verschiebungen der materiellen Theile im Innern einer Masse, welche wir oben für irgend einen Punkt m , durch u, v, w parallel den drei rechtwinkligen Coordinatenachsen bezeichneten, und die wir als stetige Funktionen der Coordinaten x, y, z , von m uns gegeben denken, können als solche von unendlich verschiedener Natur seyn, lassen sich aber sämmtlich in gewisse Klassen bringen, denen eben so einfach die von ihnen abhängigen Naturerscheinungen entsprechen.

Wenn wir nämlich den Abstand zweier Molecüle m und m' im natürlichen Zustande r nennen, denselben aber nach eingetretener Verschiebung aller Theile durch $r + \Delta r$ bezeichnen, wo r und $r + \Delta r$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} r^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \\ (r + \Delta r)^2 &= (x' - x + u' - u)^2 + (y' - y + v' - v)^2 \\ &\quad + (z' - z + w' - w)^2 \end{aligned}$$

näher bestimmt sind, so kann zunächst sowohl Δr in Bezug auf r , wie auch die Zunahmen der Projectionen $u' - u, v' - v, w' - w$ in Bezug auf die ursprünglichen Projectionen des Radius $r: x' - x, y' - y, z' - z$, sehr kleine Größen seyn, so daß die höheren Potenzen immer gegen die niederen vernachlässigt werden und nur die ersten Potenzen der Linearausdehnung und ihrer Projectionen zu berücksichtigen sind.

Diesem einfachsten Falle entsprechen in der Natur die Contractionen und Dilatationen der Körper, veranlaßt durch äußere Kräfte, welche normal auf die äußeren Begränzungsflächen der Massen wirken und zugleich in der Ausdehnung dieser Gränzflächen überall gleiche Werthe haben, also unabhängig von den Coordinaten sind.

Es können *zweitens* die Linearausdehnungen, so wie auch deren Projectionen $u'-u$, $v'-v$, $w'-w$ so große Werthe in Bezug auf r und dessen Projectionen $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, erhalten, daß es nothwendig wird auch die zweite Potenz derselben mit in Rechnung zu ziehen; ja es kann der Fall eintreten, daß obwohl die Aenderung des *Radius vector* r , so wie die Linearausdehnungen nach den Coordinatenaxen sehr kleine Größen sind, diejenigen Glieder der Rechnung, welche die ersten Potenzen derselben enthalten, sämmtlich gleich Null, oder doch vermöge gewisser Werthe der constanten Coëfficienten, mit welchen diese Glieder multiplicirt sind, so klein werden, daß die Größen zweiter Ordnung, um ein genaues Resultat zu erhalten, ebenfalls mit berücksichtigt werden müssen.

Dieser Fall umfaßt die Gesetze der Dehnung und Compression fester Körper über die Gränze der vollkommenen Elasticität hinaus, so wie das durch das Ueberschreiten dieser Gränze bedingte Zerreißen und Zermalmen der Massen.

Drittens können die Verschiebungen der Art seyn, daß zwar die Zunahme des Radius r in Bezug auf diesen, nämlich der Bruch $\frac{dr}{r}$, immer noch eine sehr kleine Größe bleibt, daß dieß aber nicht mehr der Fall ist, mit den Projectionen desselben auf die Coordinatenaxen im Verhältniß zu diesen Projectionen im natürlichen Zustande, so daß also die Brüche $\frac{u'-u}{r}$, $\frac{v'-v}{r}$, $\frac{w'-w}{r}$, so wie die Brüche $\frac{u'-u}{x'-x}$, $\frac{u'-u}{y'-y}$ etc. endliche, ja selbst unendlich große Werthe annehmen können, und in keinem Falle hier irgend eine der höheren Potenzen gegen die niederen vernachlässigt werden darf. Dieser Fall umfaßt die Theorie der Biegung und Torsion elastischer Platten und Stäbe, wie auch die Gesetze der gespannten Saiten, und können die allgemeinen Gleichungen, von welchen die dahin gehörenden Probleme abhängen, vollkommen genau berechnet werden.

Für den vierten Fall, daß nämlich auch das Verhältniß der Linearausdehnung selbst $\frac{dr}{r}$ große Werthe erhält, ist die Rechnung im Allgemeinen nicht mehr ausführbar, obwohl sich auch hier eine genäherte Lösung für besondere Fälle herstellen läßt. Glücklicherweise kommen in der Natur nur sehr wenige Fälle solcher großen Linearausdehnungen vor, nämlich nur an gewissen organischen Substanzen, wie z. B. das Kautschuck, welche ohne die Elasticitätsgränze zu überschreiten, durch äußere Kräfte sehr große Veränderungen in dem Abstände ihrer Molecüle erleiden können; für den besonderen Fall jedoch, daß die Linearausdehnung nach allen Richtungen dieselbe ist, ein Fall, der die Erscheinungen der Wärme, des Druckes im Innern flüssiger Körper, die Gesetze der Gase und Dämpfe bedingt, ist wiederum vermittelt einer einfachen Integration für jede beliebig große Linearausdehnung und Compression der Werth der Resultante der Molecularwirkungen vollkommen darstellbar.

Dies sind die wesentlichsten Unterscheidungen, welche in Bezug auf die Beschaffenheit der Functionen u , v , w gemacht werden können, und welchen, wie man sieht, in der Natur ebenso bestimmt geordnete Klassen von Erscheinungen entsprechen; in der gegenwärtigen Abhandlung werde ich mich nur mit den beiden ersten Fällen beschäftigen, in welchen sowohl die Aenderungen des Radius *vector*, wie die seiner Projectionen so klein sind, daß im Allgemeinen nur die ersten Potenzen, in besonderen Fällen höchstens die zweiten Potenzen, in der Rechnung berücksichtigt zu werden brauchen.

Es sey $f(r)$ die Function des Abstandes, welche die Größe der Molecularwirkung irgend zwei kleiner materieller Theile auf einander ausdrückt, seyen m und m' die Massen der Theile m , so wird

$$m.m'f(r)\frac{z'-z}{r}$$

die Componente der Molecularwirkung in Bezug auf die

Richtung parallel der z Axe seyn. Es geschehen nun die Verschiebungen u, v, w parallel den drei Axen für den Punkt m , und u', v', w' für den Punkt m' , so verwandelt sich der obige Ausdruck in

$$m m' f(r + \Delta r) \frac{z' - z + w' - w}{r + \Delta r},$$

und, wenn man ferner unter Berücksichtigung der oben gemachten Annahme in Bezug auf die Gröfse $\frac{\Delta r}{r}$ entwickelt, in

$$m m' \left[f(r) \frac{z' - z}{r} + f(r) \frac{w' - w}{r} + \left(r \frac{\partial f(r)}{\partial r} - f(r) \right) \frac{\Delta r}{r} \frac{z' - z}{r} \right],$$

worin ferner in Folge der oben gegebenen Ausdrücke für r^2 und $(r + \Delta r)^2$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{x' - x}{r} \cdot \frac{u' - u}{r} + \frac{y' - y}{r} \cdot \frac{v' - v}{r} + \frac{z' - z}{r} \cdot \frac{w' - w}{r}$$

gesetzt werden kann, da sowohl $\frac{\Delta r}{r}$ als die Brüche $\frac{u' - u}{r}$, $\frac{v' - v}{r}$, $\frac{w' - w}{r}$ sehr kleine Gröfsen sind, deren höhere Potenzen und Producte vernachlässigt werden. Für den Ausdruck der kleinen Masse m' können wir das Product des Volums dieses Theiles in seine Dichtigkeit ρ , welche in der ganzen Ausdehnung des Körpers dieselbe ist setzen und das Volum des Theiles m' durch Polarcoordinaten ausdrücken. Bezeichnet nämlich ϑ den Winkel, welchen der Radius vector mm' oder r mit einer durch m parallel der z Axe gelegten Linie bildet (nach der positiven Seite der z Axe gerechnet), φ den Winkel, welchen die Projection von r auf eine durch m parallel der xy Ebene gelegte Fläche mit einer Linie bildet, die ebenfalls in dieser Fläche parallel der x Axe durch m gezogen ist, bezeichnen ferner dr , $d\varphi$, $d\vartheta$ sehr kleine Zunahmen der Gröfsen r , φ , ϑ , so kann das Volum irgend eines kleinen Massentheilchens m' durch $r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ ausgedrückt werden.

Ferner lassen sich die Ausdrücke $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$, nach der Taylor'schen Reihe entwickeln, indem man setzt:

$$\begin{aligned}
 u' - u = & \frac{du}{dx}(x' - x) + \frac{du}{dy}(y' - y) + \frac{du}{dz}(z' - z) + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x' - x)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dy^2}(y' - y)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dz^2}(z' - z)^2 + \frac{d^2u}{dx dy}(x' - x)(y' - y) \\
 & + \frac{d^2u}{dx dz}(x' - x)(z' - z) + \frac{d^2u}{dy dz}(y' - y)(z' - z) + \dots
 \end{aligned}$$

$$v' - v = \frac{dv}{dx}(x' - x) + \dots$$

$$w' - w = \frac{dw}{dx}(x' - x) + \dots$$

in welchen Ausdrücken man diejenigen Glieder, welche mit höheren Potenzen von $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, als der Ersten, multiplicirt sind, im Allgemeinen vernachlässigen kann, ausgenommen in dem Falle, wo sämtliche Glieder der ersten Ordnung gleich Null werden, da man alsdann auch die Glieder der zweiten Ordnung hinzuzunehmen hat.

Da die kleinen Ausdehnungen dr , $d\vartheta$, $d\varphi$ als Differentiale von r , ϑ , φ genommen, und, indem die Masse in ihrer ganzen Ausdehnung den Raum stetig erfüllen soll, die Summation aller Partialwirkungen auf m in eine Integration verwandelt werden kann, so hat man nur die oben gegebenen Entwicklungen von $\frac{dr}{r}$, $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$, m' in den obigen Ausdruck für die Partialwirkung von m' auf m einzusetzen und alsdann, indem man bemerkt, dafs auch $\frac{z' - z}{r} = \cos \vartheta$, $\frac{x' - x}{r} = \sin \vartheta \sin \varphi$, $\frac{y' - y}{r} = \sin \vartheta \cos \varphi$ ist, zu integrieren nach φ zwischen den Gränzen 0 und 2π , nach ϑ zwischen den Gränzen 0 und π , nach r zwischen den Gränzen 0 und R , oder 0 und ∞ , wenn R den grössten Radius darstellt, innerhalb dessen die Wirkungen der Molecularkraft noch berücksichtigt werden müssen.

Ist die von den Theilen m' , $m'' \dots$ auf m ausgeübte Molecularkraft nicht die einzige Wirkung, welche m erfährt, wirken auf m noch äufsere Kräfte, wie z. B. die Schwere, so lassen sich die letzteren sämmtlich durch drei Kräfte mX , mY , mZ ersetzen, welche die Summe der Componenten der äufseren Kräfte nach den drei Coordinatenachsen

darstellen; die Summe dieser letzteren mit den betreffenden Molecularwirkungen muß alsdann gleich Null seyn, wenn der materielle Theil m nach der betreffenden Axe im Gleichgewicht seyn soll.

Führt man die obigen Integrationen aus, so werden sämtliche Glieder, welche die ersten Differentialquotienten von u , v , w und die ersten Potenzen von $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, enthalten gleich Null und man hat in der Entwicklung von $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$, sämtliche Glieder der zweiten Ordnung zu berücksichtigen.

Die Gleichungen des Gleichgewichtes für einen materiellen Theil im Innern einer Masse hängen daher nur von den zweiten Differentialquotienten der Verrückungen u , v , w ab; so erhält man in Bezug auf die Z Axe

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right\} \\ \quad + 2(B - A) \left\{ \frac{d^2 u}{dx dz} + \frac{d^2 v}{dy dz} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right\} + Z = 0 \\ \text{und ähnlich in Bezug auf die } x \text{ und } y \text{ Axe} \\ B \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} \\ \quad + 2(B - A) \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dx dy} + \frac{d^2 w}{dx dz} \right\} + X = 0 \\ B \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right\} \\ \quad + 2(B - A) \left\{ \frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dy dz} \right\} + Y = 0 \end{array} \right.$$

als Gleichungen des Gleichgewichtes für m , in welchen man den gemeinschaftlichen Factor weggelassen und zur Abkürzung

$$\frac{2}{15} \rho \cdot \pi \cdot \int_0^R d \frac{r^4 f(r)}{dr} dr = B, \quad \frac{2}{3} \rho \cdot \pi \cdot \int_0^R r^3 f(r) dr = A \text{ gesetzt hat.}$$

Diese Gleichungen sind im Wesentlichen dieselben, welche schon von Navier, Poisson, Cauchy u. A. für das Gleichgewicht aufgestellt worden sind, obwohl von ihnen auf ganz verschiedene Weise erhalten, mit dem ein-

zigen Unterschiede, daß in ihnen die Gröfse A gleich Null gesetzt worden ist; auf diesen Unterschied, so wie auf die wahre Bedeutung der Constanten A und B werde ich weiter unten ausführlich zurückkommen.

Die Gleichungen (1) sind nicht mehr gültig, wenn m von der äußeren Gränzfläche der Masse um einen kleineren Abstand als R , der Radius der größten in der Rechnung berücksichtigten Moleculardistanz, entfernt liegt, denn alsdann würde sich die obige Integration auf Räume erstrecken, welche nicht mehr stetig von Massen erfüllt sind und man würde statt der Integration eine schwer auszuführende Summation vornehmen müssen. Allein durch eine einfache Betrachtung lassen sich die Bedingungen für das Gleichgewicht derjenigen Theile m , welche in oder nahe bei der äußeren Gränzfläche der Masse liegen, d. h. von ihr um eine kleinere Gröfse als R abstehen, ebenfalls auf Integrationen zurückführen.

Zerlegen wir nämlich die äußere Gränzfläche einer Masse in eine große Anzahl stetig an einander gränzenden sehr kleinen Flächenelemente von beliebiger Gestalt, so daß jedes dieser Elemente in seiner geringen Ausdehnung als eben betrachtet werden kann, und errichten nun auf jedes dieser Elemente und senkrecht zur äußeren Gränzfläche der Masse ein Prisma von der Höhe R in die Masse hinein, so werden in der Gesamtheit der so construirten prismatischen Elemente alle diejenigen materiellen Theile m enthalten seyn, deren Abstand von der Gränzfläche kleiner als R ist; und wenn wir für irgend ein solches prismatisches Element die Resultante der Molecularwirkungen zu berechnen im Stande sind, so haben wir auch die Bedingungen des Gleichgewichtes für die nahe der Oberfläche gelegenen Theile bestimmt.

Betrachten wir ein einzelnes solches prismatisches Element von der Grundfläche ε und setzen der Einfachheit halber voraus, daß diese Grundfläche parallel der xy Ebene der Coordinaten, die Axe des Prismas also parallel der z Axe sey, zerlegen dann das Prisma in sehr dünne Ele-

mente oder Schichten, deren jede die Dicke dp hat, so wird die Masse einer solchen elementaren Schicht, die in irgend einer Entfernung von der Oberfläche liegt, durch $\rho \cdot \varepsilon dp$ auszudrücken seyn.

Bezeichnen wir die Masse eines außerhalb des Prismas liegenden, von der Schicht εdp um den Radius r entfernten Theiles wiederum mit $\rho \cdot r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$, wo ϑ und φ dieselben Winkel wie oben bedeuten, und so daß ϑ den Winkel bezeichnet, welchen r mit der nach *Innen* zu gerechneten Axe des Prismas bildet, so ist die Wirkung einer Schicht des Prismas, z. B. derjenigen, welche das innerste Ende desselben bildet, auf irgend ein äußeres Massentheilchen (r, ϑ, φ) zerlegt nach der Richtung der z Axe der Coordinaten durch $\rho \cdot \rho \cdot r^2 \sin \vartheta f(r) \frac{z'-z}{r} \varepsilon \cdot dp \cdot dr d\vartheta d\varphi$ auszudrücken, und durch das Eintreten der Verschiebungen u, v, w in der ganzen Masse verwandelt sich jene Componente der Partialwirkung in

$$\rho \cdot \rho r^2 \sin \vartheta \varepsilon dp dr d\vartheta d\varphi \left[f(r) \frac{z'-z}{r} + f(r) \frac{w'-w}{r} + \left(r \frac{df(r)}{dr} - f(r) \right) \frac{dr}{r} \frac{z'-z}{r} \right].$$

In Bezug auf die Summation oder Integration aller dieser Partialwirkungen, welche von sämtlichen Schichten $\rho \cdot \varepsilon dp$ des Prismas auf sämtliche außerhalb desselben gelegene Massentheilchen ausgeübt werden, ist zu bemerken, daß wenn der vorhergehende Ausdruck sich auf die Wirkung zweier Theilchen bezieht, welche resp. die Coordinaten x', y', z' für das außerhalb gelegene Theilchen haben, ganz dieselbe Partialcomponente erhalten wird, wenn wir zwei andere ähnliche Theilchen berücksichtigen, deren Coordinaten resp. $x, y, z+p$ und $x', y', z'+p$ sind, wo p irgend einen aliquoten Theil von der Axe des Prismas bezeichnet; es bleiben alsdann für diese letzten Theile die Projectionen auf die drei Axen unverändert, ebenso auch die Größe $\frac{dr}{r} = \frac{x'-x}{r} \frac{u'-u}{r} + \frac{y'-y}{r} \frac{v'-v}{r} + \frac{z'-z}{r} \frac{w'-w}{r}$.

Nennt man nämlich die Verschiebungen, welche die in dem Prisma enthaltene Schicht $(x, y, z+p)$ erfahren resp. u_I, v_I, w_I , ebenso die des außerhalb befindlichen Theiles $(x', y', z'+p)$ resp. u'_I, v'_I, w'_I , so wird, wenn man nach den Potenzen von $x'-x, y'-y, z'-z$ und p entwickelt

$$u'_I - u_I = u' - u + p \frac{d^2 u}{dx dz} (x' - x) + p \frac{d^2 u}{dy dz} (y' - y),$$

und ähnlich für $v'_I - v_I, w'_I - w_I$, d. h. der Unterschied betrifft nur Größen der zweiten Ordnung, welche wir vernachlässigen können; der obige Ausdruck für die Partialcomponente nach der z Axe kann also als unabhängig von p betrachtet werden, da er sonst nur das Differential dp enthält.

Um daher den obigen Ausdruck nach p zu integrieren, braucht man nur anstatt dp den Unterschied der beiden Grenzen von p einzusetzen; allein man sieht sogleich, daß diese Grenzen verschiedene seyn müssen, je nachdem der Winkel ϑ , welchen der *Rad. vector* r mit der nach Innen gerichteten Axe z des Prismas bildet zwischen 0° und 90° oder zwischen 90° und 180° liegt; für alle Partialwirkungen der ersteren Art sind die Integrationsgrößen für p , 0 und R , für alle Wirkungen der zweiten Art sind diese Grenzen 0 und $R + r \cos \vartheta$, da, sobald für Werthe von ϑ , größer als 90° , p den Werth $R + r \cos \vartheta$ erreicht, der außerhalb des Prismas liegende Massentheil gerade in der äußeren Gränzfläche zu liegen kommt, und über diese hinaus der Raum nicht mehr von Masse erfüllt ist.

Vollziehen wir daher zuerst die Integration des obigen Ausdruckes für diejenigen Partialwirkungen, in welchen ϑ unter 90° ist, d. h. für p zwischen den Grenzen 0 und R , für ϑ zwischen den Grenzen 0° und 90° , für φ zwischen den Grenzen 0 und 360° und für r von 0 bis R , so erhalten wir die Gesamtcomponente für diese Klasse von Wirkungen

$$\begin{aligned} & \pi \cdot \varepsilon \cdot \varrho \cdot R \int_0^R r^2 f(r) dr + \pi \cdot \varepsilon \cdot \varrho \cdot R \cdot \frac{dw}{dz} \int_0^R r^2 f(r) dr \\ & + \frac{\pi}{4} \varepsilon \cdot \varrho \cdot R \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 2 \frac{dw}{dz} \right) \int_0^R r^2 \left(r \frac{df(r)}{dr} - f(r) \right) dr. \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für die zweite Klasse von Partialwirkungen, in welchen ϑ zwischen 90° und 180° liegt, also auch zwischen diesen Gränzen nach ϑ zu integrieren ist, die Integration aber für p nur von 0 bis $R + r \cos \vartheta$ genommen werden darf, während die übrigen Gränzen unverändert bleiben.

$$\begin{aligned} & - \pi \cdot \varepsilon \cdot \varrho \cdot R \int_0^R r^2 f(r) dr - \pi \cdot \varepsilon \cdot \varrho \cdot R \cdot \frac{dw}{dz} \int_0^R r^2 f(r) dr \\ & - \frac{\pi}{4} \varepsilon \cdot \varrho \cdot R \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 2 \frac{dw}{dz} \right) \int_0^R r^2 \left(r \frac{df(r)}{dr} - f(r) \right) dr \\ & + \frac{2}{3} \pi \cdot \varepsilon \cdot \varrho \int_0^R r^3 f(r) dr + \frac{2}{3} \pi \cdot \varepsilon \cdot \varrho \cdot \frac{dw}{dz} \int_0^R r^3 f(r) dr \\ & + \frac{2}{15} \pi \cdot \varepsilon \cdot \varrho \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \right) \int_0^R r^3 \left(r \frac{df(r)}{dr} - f(r) \right) dr \end{aligned}$$

Die Summen dieser beiden Werthe giebt den wahren Ausdruck für die Gesamtcomponente aller Molecularwirkungen auf das Prisma εR nach der z Axe, nämlich:

$$\varrho \varepsilon \left[A + \frac{dw}{dz} A + (B - A) \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \right) \right]$$

wenn A und B zur Abkürzung dieselben bestimmten Integrale wie oben bezeichnen, von denen das Eine, nämlich

$$B = \frac{2}{15} \varrho \pi \int_0^R r^4 \frac{df(r)}{dr} dr \text{ aus } \int_0^R r^3 \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) dr$$

mittelst Integration durch Theilung erhalten wird.

Um der obigen Gesamtcomponente der Molecularwirkungen das Gleichgewicht zu halten, muß eine äußere Kraft $P \cdot \varepsilon \cdot \varrho$ auf das betreffende Prisma wirken; wir nennen eine solche äußere Kraft, welche sich nur auf die an der äußeren Oberfläche einer Masse oder nahe unter der-

selben gelegenen Theile erstreckt einen Zug oder Druck, je nachdem diese Kraft die betreffenden Theile von der übrigen Masse zu trennen, oder dieselben damit zu vereinigen strebt, und beziehen die Gröfse der Kraft $P^x \rho$ auf die Einheit der Oberfläche, so dafs also die kleine Oberfläche ε des Prismas die Kraft $P^x \rho \cdot \varepsilon$ erleidet.

Addiren wir diese Kraft zu der obigen Molecularwirkung, so erhält man die Gleichung des Gleichgewichts für ein Prisma parallel der z Axe und in Bezug auf diese Richtung, nach Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren ρ und ε :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -P^z = A + \frac{dw}{dz} A + (B - A) \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \right) \\ \text{und ähnlich in Bezug auf zwei andere Prismen,} \\ \text{die parallel den } x \text{ und } y \text{ Axen liegen} \\ -P^x = A + \frac{du}{dx} A + (B - A) \left(3 \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \\ -P^y = A + \frac{dv}{dy} A + (B - A) \left(\frac{du}{dx} + 3 \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \end{array} \right.$$

wo $P^x \rho$ und $P^y \rho$ die normalen auf die Flächeneinheit bezogenen äufseren Drucke sind, die resp. auf die yz und xz Ebenen der Masse wirken.

Die Partialwirkung irgend einer dünnen Schicht des Prismas auf ein Element der Masse ist resp. nach den Verschiebungen u, v, w , zerlegt nach der x Axe der Coordinaten, ist

$$\rho \cdot \rho \cdot r^2 \sin \vartheta \varepsilon dp dr d\vartheta d\varphi \left[f(r) \frac{x' - x}{r} + f(r) \frac{u' - u}{r} + \left(r \frac{df(r)}{dr} - f(r) \right) \frac{dr}{r} \frac{x' - x}{r} \right]$$

und zerlegt nach der x Axe

$$\rho \cdot \rho \cdot r^2 \sin \vartheta \varepsilon \cdot dp dr d\vartheta \cdot d\varphi \left[f(r) \frac{y' - y}{r} + f(r) \frac{v' - v}{r} + \left(r \frac{df(r)}{dr} - f(r) \right) \frac{dr}{r} \frac{y' - y}{r} \right].$$

Setzt man in diese Ausdrücke für $\frac{dr}{r}$, $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$

die früher gegebenen Werthe ein und integrirt nach p, ϑ, φ, r nach denselben Rücksichten wie vorher, nennt man ferner $\Delta P_x^*, \rho, \Delta P_y^*, \rho$ resp. die nach den Richtungen der x und y Axe auf die Masse wirkenden äusseren Kräfte in der Flächeneinheit, d. h. den betreffenden *Druck* oder *Zug*, der von aussen her stattfindet, so ergeben sich für das Gleichgewicht des Prismas bezüglich nach der x und y Axe, d. h. nach den beiden senkrecht auf seine Axe genommenen Richtungen

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta P_x = A \frac{du}{dz} + (B-A) \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \\ -\Delta P_y = A \frac{dv}{dz} + (B-A) \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ \text{und in ähnlicher Weise in Bezug auf die Prismen, welche resp. senkrecht auf den } yz \text{ und } xz \\ \text{Ebenen stehen} \\ -\Delta P_y = A \frac{dv}{dx} + (B-A) \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} \right) \\ -\Delta P_z = A \frac{dw}{dx} + (B-A) \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \\ -\Delta P_z = A \frac{du}{dy} + (B-A) \left(\frac{du}{dy} + \frac{dw}{dx} \right) \\ -\Delta P_x = A \frac{dw}{dy} + (B-A) \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \end{array} \right.$$

wo $\Delta P_y^*, \Delta P_x^*, \Delta P_z^*, \Delta P_z^*$, die von denjenigen Prismen, welche bezüglich auf den yz und xz Ebenen der Coordinaten senkrecht stehen, erlittenen transversalen äusseren Drucke bezeichnen. Wenn nämlich irgend eine ebene Fläche eines Körpers, z. B. diejenige, welche senkrecht zur z Axe steht einen äusseren Druck oder Zug P_t erleidet, so braucht dieser Druck nicht nothwendig normal gegen die Fläche zu wirken, sondern kann im Allgemeinen ein *schiefer* Druck seyn; immer wird er sich dann aber in die drei Componenten $P^*, \Delta P_x^*, \Delta P_y^*$ den drei Axen der z, x und y Coordinaten bezüglich parallel, zerlegen lassen, welche dann einzeln gleich und entgegengesetzt den betreffenden Summen der Componenten der Molecularwirkungen auf das Prisma seyn müssen.

Aus den 9 Gleichungen (2) und (3) lassen sich im Allgemeinen, wenn die Verschiebungen u , v , w , als Functionen der Coordinaten gegeben sind, die 9 Druckcomponenten auf die äusseren den Coordinatenebenen parallelen Gränzflächen einer Masse vollkommen bestimmen; und umgekehrt, wenn die schiefen Drucke P_x , P_y , P_z , auf die Flächen gegeben sind und man dieselben einzeln in ihre rechtwinkligen Componenten zerlegt, so findet man daraus unmittelbar die Functionen u , v , w , so weit diese von den Coordinaten abhängig sind, also das ganze System der erforderlichen Verschiebungen im Inneren der Masse, vermöge deren allein der Körper unter dem Einflusse der gegebenen äusseren Drucke im Gleichgewicht bleiben kann; ausserdem müssen aber noch die Functionen u , v , w den Gleichungen (1) genügen, damit auch im Innern der Masse jeder Theil derselben im Gleichgewicht sich befindet. Man sieht leicht, dass die letztere Bedingung immer erfüllt wird, wenn alle zweiten Differentialquotienten der Function u , v , w gleich Null sind, und keine äusseren Kräfte auf das Innere der Masse wirken, wenn also u , v , w lineare Functionen von der Form $u = a'x + b'y + c'z$ sind, wo a' , b' , c' constante Gröfsen.

In der gegenwärtigen Abhandlung werde ich mich im Wesentlichen auf die Untersuchung solcher Probleme beschränken, in welchen u , v , w nicht nur Functionen des ersten Grades der Coordinaten sind, sondern in welchen auch die äusseren Drucke auf die Flächen normal sind, was erfordert, dass die sechs ungleichnamigen Differentialquotienten $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dz}$ etc., aus welchen die Gleichungen (3) gebildet sind, sämmtlich gleich Null werden, also $u = \alpha x$, $v = \beta y$, $w = \gamma z$ gesetzt werden kann.

Die Gleichungen (2) und (3) geben zunächst nur die Bedingungen des Gleichgewichtes in Bezug auf Oberflächen, welche den 3 Coordinatenebenen parallel sind, es lassen sich aber aus ihnen die entsprechenden Bedingungen für jede andere Gränzfläche der Masse ableiten, wenn man an-

statt der bisherigen Coordinaten x, y, z andere einführt, die sich auf ein anderes Axensystem beziehen, in Bezug auf welches die betreffende Fläche normal ist und dann in den obigen Gleichungen für x, y, z ihre Werthe in den neuen Coordinaten substituirt. Diese Umformung wird allemal dann nothwendig, auch wenn die betrachtete Gränzfläche Einer der Coordinatenaxen parallel war vor den Verschiebungen, wenn aber die Functionen u, v, w der Art sind, daß die Fläche *nach* den Verschiebungen gewisse, wenn auch noch so kleine Aenderungen in ihrer Lage erhalten hat, eine Rücksicht, welche von allen früheren Bearbeitern dieses Gegenstandes übersehen worden ist; da aber bei der vorausgesetzten einfachen Beschaffenheit der Functionen u, v, w bei den hier vorläufig zu untersuchenden Problemen dieser Fall nie eintreten kann, so werde ich eine solche Umformung der obigen Gleichungen für ein beliebiges anderes rechtwinkliges Coordinatensystem auch erst dann vornehmen, wenn, wie bei der Torsion und Beugung, eine wirkliche, wenn auch noch so geringe Aenderung in der Winkelstellung der bisher den Coordinatenebenen parallelen Gränzflächen eintritt.

Die Gleichungen (2) und (3) sind wesentlich dieselben, welche schon von Poisson und Cauchy für das moleculare Gleichgewicht in der Oberfläche der Körper unter dem Einflusse äußerer Drucke erhalten worden, aber mit dem Unterschiede, daß die genannten Physiker $A=0$ gesetzt haben, eine Abweichung vermöge deren die Lösung der meisten von den obigen Gleichungen abhängenden Probleme andere Resultate ergiebt, Resultate, die häufig nicht mit der Erfahrung übereinstimmen; dies führt mich auf eine nähere Untersuchung über die Bedeutung der Größen B und A , welche gleicherweise in den Gleichungen (1) für das Gleichgewicht im Innern einer Masse, wie in den Gleichungen (2) und (3) für die Oberfläche, auftreten.

Setzt man nämlich in den Gleichungen (2) und (3) $u=v=w=0$, so reduciren sich jene Gleichungen auf

— $P=A$; es müßte daher schon im natürlichen Zustande des Körpers ein Druck P vorhanden seyn, der auf die Oberfläche wirkte, selbst wenn man von dem Luftdrucke abstrahirt, der ja auch ganz weggeschafft werden kann; Poisson und Cauchy behaupten nun, ein solcher äußerer Druck P sey im natürlichen Zustande gar nicht vorhanden, folglich müsse auch $A=0$ seyn und man sieht sogleich, daß es für die aus den Gleichungen (1), (2) und (3) abzuleitende Erscheinungen einen großen Unterschied macht, ob man das Vorhandenseyn eines Druckes, oder vielmehr einer von Außen auf die Oberfläche der Körper wirkenden Kraft annehme oder nicht. Poisson sagt hierüber (a. a. O. S. 365): „*Dans tous les cas où l'on a considéré jusqu'ici l'action moléculaire, par exemple, dans les théories de la capillarité et de la chaleur, on a toujours exprimé les forces qui dérivent de cette action, par des intégrales définies; cependant cette manière de les représenter ne leur est point applicable, ainsi qu'on va le voir par les considérations suivantes. Lorsqu'un corps est dans son état naturel, c'est-à-dire lorsqu'il n'est comprimé par aucune force, qu'il est placé dans le vide, et qu'on fait même abstraction de son poids, non seulement chaque molécule est en équilibre dans son intérieur et à sa surface, mais on verra de plus, que la résultante des actions moléculaires est séparément nulle des deux côtés opposés de chaque petite partie du corps. Dans cet état, les distances qui séparent les molécules doivent être telles que cette condition soit remplie, en ayant égard à leur attraction mutuelle et à la répulsion calorifique que nous comprenons aussi parmi les actions moléculaires. Quelque dur et quelque solide que soit un corps, la force qui s'oppose à la séparation de ses parties est nulle ou n'existe pas dans l'état dont nous parlons: elle ne commence à naître que quand nous cherchons à effectuer cette séparation, et que nous changeons un tant soit peu les distances des molécules. Or, si l'on exprime cette force par une intégrale, il arrive que sa valeur étant nulle dans l'état naturel du corps, elle le sera encore après la varia-*

tion quelconque des distances moléculaires, en sorte que le corps n'opposerait aucune résistance à la separation de ses parties, ce qui serait une absurdité; il en résulte donc que la somme qui exprime l'action totale d'une série de molécules disjointes ne peut pas se convertir dans une intégrale; ce qui tient à la nature de la fonction des distances qui représente l'action de chaque molécule."

Die einfachste und für die Rechnung bequemste Annahme ist allerdings mit Poisson und den übrigen Bearbeitern dieses Gegenstandes zu sagen: im sogenannten natürlichen Zustande, d. h. bei gleichmäßiger Vertheilung der Molecüle einer Masse in jeder Richtung um irgend einen Punkt herum, sey die Kraft, welche auf irgend ein nahe der Oberfläche gelegenes Massentheilchen oder auf einen der obigen prismatischen Theile von der gesammten übrigen Masse ausgeübt werde, gleich Null; diese Kraft entwickle sich erst, indem man die gegenseitige Entfernung der Molecüle um eine gewisse, wenn auch noch so kleine Gröfse gewaltsam ändere; woraus folgt, dafs die Gröfse *A* gleich Null zu setzen ist. Hingegen setze ich die Annahme und lege dieselbe allen folgenden Betrachtungen zu Grunde, dafs die Gröfse *A* selbst im natürlichen Zustande der Masse nicht gleich Null gesetzt werden dürfe, sondern im Allgemeinen einen gewissen Werth habe, eine Annahme, welche viel allgemeiner ist als die obige, indem sie die Möglichkeit, dafs unter den vorkommenden Werthen von *A* auch der Werth Null sey, nicht ausschließt; dafs ferner durch eine gewaltsame Aenderung des Abstandes der Theile einer Masse, die Kraft, welche einer solchen Aenderung widerstrebt, nicht erst *herangerufen*, sondern nur die Gröfse der schon vorhandenen Kraft eine *Aenderung* erleide und dafs diesem Zuwachse der Gesamtwirkung der Molecüle allein die Gröfse der neu hinzugefügten auf die Oberfläche wirkenden Drucke zu entsprechen haben.

Diese Annahme fordert allerdings den Beweis, dafs auch im natürlichen Zustande der Masse ein äufserer Druck oder eine dem entsprechende äufsere Kraft, welche allein auf

die in und nahe der Oberfläche gelegenen Theile der Masse wirke, vorhanden sey. Wenn wir nämlich in den Gleichungen (2) $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz} = \alpha$ setzen, d. h. in der ganzen Masse eine nach allen Richtungen gleiche kleine Linear-
ausdehnung von der Gröfse α eintreten lassen, so reduciren sich diese Gleichungen auf $-P = A + (5B - 4A)\alpha$ und $(5B - 4A)\alpha$ bezeichnet den Zuwachs von A vermöge dieser allgemeinen Ausdehnung der Masse, ein Zuwachs, welcher nothwendig dem zur Ausdehnung angewandten äufseren Drucke das Gleichgewicht halten mufs; bezeichnen wir daher im natürlichen Zustande den äufseren Druck durch $-P_0 = A$ und die Zunahme dieses Druckes durch die Ausdehnung α mit ΔP , so ist $-\Delta P = (5B - 4A)\alpha$.

Nun befindet sich aber die Masse wiederum in einem sogenannten natürlichen Zustande, d. h. sie erfüllt den Raum gleichmäfsig nach allen Richtungen um irgend einen Punkt herum; es könnte also nach der Poisson'schen Annahme eine *gleichmäfsige* Ausdehnung oder Compression einer Masse stattfinden, ohne dafs hiezu eine äufserer Kraft erforderlich wäre, was der Erfahrung widerspricht.

Um zu untersuchen, welcher Art die äufserer Kraft P_0 seyn könne, welche im natürlichen Zustande der Masse und wenn kein künstlicher äufserer Druck, selbst vom atmosphärischen Drucke abgesehen, auf die Masse wirkt, vorhanden seyn mufs, um der Gesamtmolecularwirkung in der Oberfläche das Gleichgewicht zu halten, bemerke ich, dafs wir ein Mittel haben, auch ohne Anwendung eines äufseren Druckes oder Zuges eine nach allen Richtungen gleiche Dilatation oder Compression in einer Masse hervorzubringen; diefs Mittel besteht in einer *Änderung der Temperatur der Masse*.

Bei einer solchen Temperaturänderung mufs offenbar vermöge der stets damit verknüpften Änderung der Molecular-
distanz eine gewisse Molecularkraft in der Oberfläche erregt oder eine schon vorhandene Kraft A geändert werden und dennoch ist kein äufserer Druck vorhanden, durch welchen

das Gleichgewicht erhalten wird; nun bemerken wir aber, daß bei jeder Temperaturänderung einer Masse der neue Gleichgewichtszustand seiner Theile erst dann erreicht wird, wenn ein ähnlicher Temperaturwechsel auch in allen umgebenden Massen, in allen Körpern, welche auf die erstere Masse von der Nähe oder aus der Ferne eine Wirkung zu äußern vermögen, vor sich gegangen ist; diesem äußeren Temperaturwechsel entspricht eine Aenderung der Moleculardistanz, mithin auch eine Aenderung in der Wirkung, welche diese Massen auf die erste Masse ausüben. Die Kraft, welche der Gesamtheit der Molecularwirkungen aller Theile einer Masse auf die an der Oberfläche gelegenen Theile das Gleichgewicht hält, besteht in der Gesamtheit der Wirkungen aller äußeren Massen auf eben diese Oberfläche; denn eine Aenderung in der ersten Kraft bringt, wie die Erfahrung zeigt, allemal eine Aenderung in sämmtlichen umgebenden Massen mit sich und das vollkommene Gleichgewicht in allen diesen Massen findet erst dann statt, wenn ihre *Temperaturen constant* geworden sind. Berühren sich zwei Massen von ungleicher Temperatur, so heißt dies nichts Anderes, als daß ein Gleichgewicht zwischen der Gesamtheit der Molecularwirkungen *A* in jedem Körper auf die Theile an seiner Oberfläche einerseits, und der Wirkung auf diese Theile ausgeübt von der zweiten Masse andererseits, nicht stattfindet; dieser Zustand kommt also einem auf die Oberfläche jeder Masse ausgeübten Drucke oder Zuge gleich und es wird daher in beiden eine allgemeine nach allen Richtungen gleiche Veränderung der Molecularabstände stattfinden, so lange bis der Gleichgewichtszustand in beiden Massen erreicht ist und wir sagen dann, daß die *Temperaturen beide gleich* geworden sind.

Die GröÙe *A*, welche die Gesamtheit der normalen Molecularwirkungen einer Masse auf ein senkrecht zu seiner Oberfläche in derselben errichtetes prismatisches Element derselben Masse darstellt, wollen wir fortan die *Molecularspannung* nennen; diese Kraft findet eben so wohl im Innern der Masse wie an der Oberfläche statt, nur wird

sie im Innern von einer zweiten ähnlichen Wirkung der Masse auf dasselbe Prisma nach der entgegengesetzten Richtung vernichtet. Bei einem Systeme von Verschiebungen u, v, w , welche im Allgemeinen durch die ganze Masse nach verschiedenen Richtungen verschieden sind, läßt sich aus den Gleichungen (2) und (3), wenn man dieselben auf ein im *Inneren* der Masse liegendes prismatisches Element anwendet und successive die Werthe der Molecularwirkungen bestimmt, welche es nach zwei entgegengesetzten Richtungen erleidet, das System der allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts (1) für das Innere ableiten, auf diesem Wege sind diese Gleichungen von Poisson, Lamé, Navier erhalten worden; ich habe jedoch vorgezogen dieselben für sich aus der Betrachtung des Gleichgewichtes eines einzelnen materiellen Punktes zu gewinnen.

Die Ansicht, daß der *Temperaturzustand* der Körper und überhaupt das System von Erscheinungen, welche wir als Wirkung der *Wärme* bezeichnen, in wesentlicher Beziehung zu dem Gleichgewicht der Molecularwirkungen der Theile einer Masse unter sich und mit äußeren Massen stehe, scheint auch schon Poisson nahe gelegen zu haben, wenn er sagt (a. a. O. S. 398): „*Ainsi, dans l'état du corps, qu'on peut regarder comme son état naturel, où il n'est soumis qu'à l'action mutuelle de ses molécules, due à leur attraction et à la chaleur, les intervalles qui les séparent doivent être telles que cette équation ($\sum r^3 f(r) = 0$) ait lieu pour tous les points du corps. Si l'on y introduit une nouvelle quantité de chaleur, ce qui augmentera, pour la même distance l'intensité de la force répulsive, sans changer celle de la force attractive, il faudra que les intervalles moléculaires augmentent de manière que cette équation continue de subsister; et de là vient la dilatation calorifique, différente dans les différentes matières, à cause que la fonction $f(r)$ n'y est pas la même*“; allein die von dem damaligen Zustande der Wärmelehre unzertrennliche Vorstellung eines *Wärmestoffes*, einer *quantité de chaleur*, hinderte ihn die hier gegebene so einfach sich darbietende

Ansicht von der Gesammtheit der Wärmeerscheinungen als Effecte der Gleichgewichtszustände der Theile einer Masse unter sich und mit der Molecularwirkung äußerer Massen auszusprechen. Dafs zum Beweise dieser Theorie eine ausführliche Ableitung der Wärmeerscheinungen im engeren Sinne, und namentlich der Gesetze der Gase und Dämpfe, erforderlich ist, versteht sich von selbst; und ich hoffe in einer späteren Abhandlung diesen Beweis geben zu können. Hier war es mir nur darum zu thun den Grundzug dieser Theorie aufzustellen, um eine klare Vorstellung von der Bedeutung der *Molecularspannung* genannten Gröfse A zu geben und auf die Nothwendigkeit von der Existenz einer äußeren Kraft aufmerksam zu machen, welche auch als ein Zug oder Druck aufgefaßt werden kann, die unter allen Umständen fortwährend auf die in der Oberfläche und nahe derselben gelegenen Theile einer Masse wirkt, um der Molecularspannung A das Gleichgewicht zu halten.

Es verhält sich hiemit ähnlich wie mit dem atmosphärischem Drucke: da letzterer auf alle Körper und auf alle Theile seiner Oberfläche mit gleicher Stärke und immer in normaler Richtung wirkt, so war es unmöglich das Vorhandenseyn eines solchen Druckes zu beweisen, ehe es nicht gelungen war, durch künstliche Mittel eine einseitige Veränderung oder Aufhebung des atmosphärischen Druckes zu bewirken; ebenso wenig wäre es uns möglich gewesen auf das Vorhandenseyn eines der Molecularspannung entsprechenden äußeren Druckes oder Zuges, welchen wir in der Wärmewirkung der umgebenden Massen erkennen, aufmerksam gemacht zu werden, wenn nicht die durch verschiedene Ursachen hervorgerufene einseitige Aufhebung dieser Kraft und damit des Gleichgewichtes der moleculären Wirkungen, welche wir als Temperaturverschiedenheit bezeichnen, uns auf die Nothwendigkeit einer solchen Kraft geführt hätte; ebenso wenig würden wir eine Vorstellung von *Wärme* haben, wenn alle Körper immer mit gleicher

Temperatur ausgestattet wären und nicht zuweilen eine einseitige Aufhebung des Wärmegleichgewichtes stattfände.

Die Molecularspannung A ist bei einer und derselben Masse veränderlich mit dem Dichtigkeitszustande derselben, denn nach jeder beliebig grofsen nach allen Richtungen gleichen Dichtigkeitsänderung ist der Zustand der Masse wieder ein natürlicher, ähnlich demjenigen, von welchen wir ursprünglich ausgingen und wir können auf diesen neuen Zustand wiederum die Gleichungen (2) und (3) anwenden, wenn wir in ihnen für A den jedesmaligen veränderlichen Werth dieser Gröfse substituiren.

Was hingegen die Gröfse $B = \frac{1}{15} \rho \cdot \pi \int_0^R d \frac{r^4 f(r)}{dr} dr$ betrifft,

so ist leicht zu sehen; dafs sie die Differenz der beiden Werthe von $\frac{1}{15} \rho \cdot \pi r^4 f(r)$ bildet, wenn in ihnen successive $r = R$ und $r = 0$ gesetzt wird; für $r = R$ wird nach unserer ursprünglichen Annahme $f(R)$, eine Gröfse, welche gegenüber allen kleineren Werthen von r entsprechenden Werthen dieser Function vernachlässigt werden kann, mithin reducirt sich B auf den Werth von $-\frac{1}{15} \rho \cdot \pi r^4 f(r)$, wenn darin $r = 0$ gesetzt wird, wodurch aber keineswegs auch B gleich Null wird, wie manche anzunehmen scheinen; B kann vielmehr, wie man sieht, alle möglichen endlichen, unendlich kleinen und unendlich grofsen Werthe, je nach der Beschaffenheit der Function f erhalten, B ist der Ausdruck für den Gränzwertb von $-\frac{1}{15} \rho \pi r^4 f(r)$, wenn darin r einen immer kleineren Werth erhält; man sieht auch, dafs dieser Gränzwertb, da wir der Zertheilung der Materie nirgends eine willkürliche Gränze setzen können, ganz unabhängig von dem Dichtigkeitszustande einer Masse ist, und nicht mit dieser wie A sich verändert; B ist für eine chemisch homogene Masse (und mit solchen haben wir es zunächst nur zu thun) unter allen mechanischen Aenderungen ihrer Dichtigkeit eine Constante, die wir als die *chemische Constante* der Masse bezeichnen wollen.

Gehen wir von einem bestimmten Dichtigkeitszustande

einer Masse aus, welchem die Gröfse der Molecularspannung A_0 entspricht und lassen eine in allen Richtungen gleiche Dichtigkeitsänderung von beliebiger endlicher Gröfse, eine allgemeine lineare Ausdehnung α eintreten, so wird durch diese Aenderung die Molecularspannung A_0 in A verwandelt. Läßt man nun von diesem neuen Dichtigkeitszustande aus eine neue aber sehr kleine nach allen Richtungen gleiche Linearausdehnung $\Delta\alpha$ eintreten und bezeichnet die entsprechende Zunahme der Molecularspannung A durch ΔA , so ergibt sich aus den Gleichungen (2)

$$(4) \dots \Delta A = (5B - 4A)\Delta\alpha,$$

welche Gleichung man, da die Aenderungen ΔA und $\Delta\alpha$ sehr kleine Gröfsen sind, indem man für ΔA , dA und für $\Delta\alpha$, $\frac{d\alpha}{1+\alpha}$ setzt, in eine wirkliche Differentialgleichung zwischen A und α verwandeln kann. Dann ergibt sich aus $dA = (5B - 4A) \frac{d\alpha}{1+\alpha}$ durch Integration und indem man berücksichtigt, dafs für $\alpha = 0$, $A = A_0$ ist,

$$(5) \dots A = \frac{5}{4}B - (\frac{5}{4}B - A_0)(1 + \alpha)^{-4}$$

Im Falle das System der Verschiebungen u , v , w in einer Masse von der Art ist, dafs durch dasselbe eine nach allen Richtungen gleiche Dilatation oder Compression stattfindet, läfst sich die damit verbundene Aenderung der Molecularspannung $A - A_0$ also immer vollkommen genau bestimmen, die Verdichtung oder Verdünnung mag grofs oder klein seyn; in allen anderen Fällen (bei ungleicher Ausdehnung nach verschiedenen Richtungen) geben uns die Gleichungen (2) nur die angenäherten Werthe für kleine Dilatationen in den entsprechenden Axenrichtungen.

Die Gleichung (5) bildet die Grundlage für die Entwicklung der Wärmeerscheinungen und namentlich der damit zusammenhängenden Elasticitätsgesetze der Gase und Dämpfe.

Um nun, bevor wir weiter gehen, in Bezug auf die Vorzeichen und relative Gröfse der Werthe A und B in

den verschiedenen Dichtigkeitszuständen einer Masse eine bestimmte Vorstellung zu haben, so will ich annehmen, daß der Mittelpunkt des Coordinatensystems im Innern der Masse liege, daß ferner das prismatische Element von der Grundfläche ε , dessen Gleichgewicht wir betrachten, immer auf der positiven Seite der Coordinaten liege, so daß eine *Linearausdehnung* in der Masse immer eine Vergrößerung der positiven Coordinaten aller Theile mit sich führt und umgekehrt. Aus der Gleichung (4) folgt, daß wenn P eine von außen auf die Oberfläche ε wirkende Kraft ist, die wir einen *Zug* oder einen *Druck* nennen, je nachdem sie die positiven Coordinaten der Theile des prismatischen Elementes zu vergrößern oder zu verringern strebt, und P im ersten Falle positiv, im zweiten Falle negativ setzen — daß dann die Relation

$$-P = (5B - 4A)\Delta\alpha$$

stattfinden muß, wenn nach der kleinen Linearausdehnung $\Delta\alpha$ die Masse vermöge des äußeren Druckes im Gleichgewicht bleiben soll. Nun ist es aber eine allgemeine Eigenschaft aller Körper, fester, flüssiger und gasförmiger, unter dem Einflusse irgend einer äußeren nach allen Richtungen gleich starken *Druckes* P eine neue Gleichgewichtslage anzunehmen, welche stets von einer Zusammenziehung begleitet ist; d. h. einem negativen Werthe von P entspricht immer ein negativer Werth von $\Delta\alpha$; folglich muß, damit die obige Relation statfinde, $5B - 4A$ unter allen Umständen und für alle Körper eine negative Gröfse seyn. Wenn daher, wie wir vorläufig annehmen, B eine positive Gröfse ist, so kann der Werth von A , je nach den verschiedenen Dichtigkeitszuständen der Masse, zwischen den Werthen $+\infty$ und $+\frac{5}{4}B$ variiren; es wird sich später zeigen, daß B bei allen Körpern positiv seyn muß.

Betrachten wir nun ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Flächen den Coordinatenebenen parallel liegen und lassen in der ganzen Masse desselben die constanten aber in den verschiedenen Axenrichtungen ungleichen kleinen

Linearausdehnungen $\frac{du}{dx} = \alpha$, $\frac{dv}{dy} = \beta$, $\frac{dw}{dz} = \gamma$ eintreten, welchen durch die entsprechenden äusseren Drucke P^x , P^y , P^z das Gleichgewicht gehalten wird, so lassen sich die Gleichungen (2) schreiben:

$$-P^x = A\alpha + (B - A)(3\alpha + \beta + \gamma)$$

$$-P^y = A\beta + (B - A)(\alpha + 3\beta + \gamma)$$

$$-P^z = A\gamma + (B - A)(\alpha + \beta + 3\gamma)$$

Diesen Gleichungen zufolge existirt immer für ein gegebenes System kleiner Linearausdehnungen α , β , γ ein bestimmtes System äusserer Drucke P^x , P^y , P^z und nur ein Einziges, ebenso umgekehrt für ein gegebenes System von Drucken ein einziges System von Linearausdehnungen; allein diese Gleichungen sagen keineswegs, dass die Anwendung eines gegebenen Systems äusserer Drucke P^x , P^y , P^z in der Wirklichkeit überhaupt immer ein entsprechendes System von Linearausdehnungen hervorbringe, welche in irgend einem Zeitpunkte der Bewegung den obigen Gleichungen entsprechen und somit Gleichgewicht hervorbringen im Stande wären; es kann im Gegentheil recht wohl möglich seyn, dass in keinem Zeitpunkte der Bewegung gerade die gleichzeitige Existenz der drei entsprechenden Linearausdehnungen eintrete. Die Aufgabe für drei gleichzeitig eintretende Drucke P^x , P^y , P^z , die jedem Zeitpunkte entsprechenden Linearausdehnungen zu finden und zu untersuchen, ob darunter ein bestimmtes System vorkomme, welches den obigen Bedingungen genüge, ist genau genommen eine rein dynamische und ihre Lösung mit grossen Schwierigkeiten verknüpft; allein wir sind im Stande die Frage nach dem möglichen Gleichgewichte bei einem gegebenen Systeme äusserer Drucke durch eine einfache Betrachtung von einer bestimmten Bedingungsgleichung zwischen den drei Drucken und den Grössen A und B abhängig zu machen.

Eliminirt man nämlich aus den obigen drei Gleichungen α und β , so reduciren sie sich auf

$$(6) \quad P^x + \frac{B-A}{2B-A}(2P^y - P^z - P^x) = -(5B - 4A)\gamma.$$

Befindet sich nun das Parallelepiped im Gleichgewicht vermöge der Kräfte P^x , P^y , P^z und der gleichzeitig stattfindenden Linearausdehnungen α , β , γ und man läßt eine der Kräfte, z. B. P^x um eine sehr kleine Gröfse dP^x wachsen, wo man sich P^x als ein an die untere Fläche des Parallelepipeds angehängtes Gewicht vorstellen kann, während die beiden andern Kräfte unverändert bleiben, so muß eine noch so kleine Vergrößerung jenes Gewichtes nothwendig eine positive Zunahme von γ , $d\gamma$ hervorbringen; es muß also der Differentialquotient $\frac{dP^x}{d\gamma} = -\frac{(5B-4A)(2B-A)}{4B-3A}$ positiv seyn, wenn die Masse vermöge der drei gleichzeitigen Kräfte P^x , P^y , P^z in stabilem Gleichgewicht seyn soll; wäre er negativ, so läge die Gleichgewichtslage für die Drucke P^x , P^y , $(P^x + dP^x)$ jenseits der Linearausdehnung γ , d. h. es müßte die Vermehrung des angehängten Gewichtes P^x eine Contraction in dieser Richtung hervorbringen, um die Gleichgewichtslage herbeizuführen, was unmöglich ist. Dieselbe Bedingung und dieselben Werthe erhält man für die Differentialquotienten $\frac{dP^x}{d\alpha}$ und $\frac{dP^y}{d\beta}$.

Nach dem oben Gesagten kann der Werth von A nur zwischen $+\infty$ und $+\frac{5}{4}B$ schwanken; diese Schwankung wird durch die Temperatur der Masse dargestellt; unter allen Umständen bleibt also $5B-4A$ negativ; wenn man aber den Werth von A durch Temperaturerhöhung von sehr großen Werthen allmählich zu kleineren Werthen herabsinkend sich vorstellt, so wird, sobald A den Werth $2B$ erreicht, ein Zeichenwechsel des Differentialquotienten eintreten und es wird kein Gleichgewicht mehr stattfinden können, ausgenommen den Fall, daß $2P^x - P^y - P^z = 0$ werde, denn dann reducirt sich nach Gleichung (6) der Differentialquotient auf den Werth $-(5B-4A)$, welcher unter allen Umständen positiv bleibt; ebenso findet ein Zeichenwechsel für die Differentialquotienten $\frac{dP^x}{d\alpha}$, $\frac{dP^y}{d\beta}$ statt, wenn $(2B-A) = 0$ wird, ausgenommen den Fall, wenn resp. $2P^x - P^y - P^z = 0$ und $2P^y - P^x - P^z = 0$ wer-

den; diese drei Bedingungen werden aber nur gleichzeitig erfüllt, wenn man $P^x = P^y = P^z$ hat; sobald also die Masse durch Erhöhung der Temperatur für ihre Molecularspannung den Werth $2B$ erreicht, kann sie nur dann vermöge drei noch so kleiner Drucke auf ihre den Coordinatenebenen parallelen Oberflächen im Gleichgewichte seyn, wenn diese Drucke, sie mögen positiv oder negativ seyn, einander gleich sind; eine solche Masse nennen wir aber eine flüssige; und da wir sehen, daß für $P^x = P^y = P^z$ auch $\alpha = \beta = \gamma$, d. h. die linearen Ausdehnungen wie die Drucke im Innern der ganzen Masse nach allen Richtungen einander gleich werden, so stellt der obige Satz das *Grundgesetz der Hydrostatik* dar.

Es läßt sich dieser Satz noch auf eine andere anschaulichere, wenn gleich nicht ganz so strenge Weise entwickeln.

Wenn in einem Parallelepiped die drei Linearausdehnungen α, β, γ stattfinden, so wird die Gesamtmolecularwirkung auf drei prismatische Elemente, welche auf den drei Oberflächen des Parallelepipeds senkrecht stehen, gewisse kleine Zunahmen resp. $\Delta A^x, \Delta A^y, \Delta A^z$ erfahren, welche sich den Gleichungen (2) zufolge durch

$$\Delta A^x = A\alpha + (B - A)(3\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\Delta A^y = A\beta + (B - A)(\alpha + 3\beta + \gamma)$$

$$\Delta A^z = A\gamma + (B - A)(\alpha + \beta + 3\gamma)$$

ausdrücken lassen. Wenn nun auf die betreffenden Oberflächen drei äußere Drucke P^x, P^y, P^z gleichzeitig zu wirken anfangen, indem sich die Masse in einem natürlichen Zustande befindet, d. h. vor den Linearausdehnungen α, β, γ , so werden in irgend einem Zeitpunkt t , von dem ersten gleichzeitigen Auftreten der äußeren Drucke an gerechnet, die Linearausdehnungen α, β, γ stattfinden, denen die Zunahmen der Molecularwirkungen $\Delta A^x, \Delta A^y, \Delta A^z$ entsprechen und wir dürfen annehmen, daß in dem folgenden kleinen Zeitabschnitte dt die gleichzeitigen Zunahmen von α, β, γ , $d\alpha, d\beta, d\gamma$ proportional den Kraftsummen resp. $P^x + \Delta A^x, P^y + \Delta A^y, P^z + \Delta A^z$ seyen, so daß die Producte dieser

Größen in die Länge der Zeit dt die respectiven Zunahmen von α, β, γ darstellen, wenn sie noch mit einem constanten positiven Coëfficienten δ multiplicirt werden.

Man hat also:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \delta(P^x + \Delta A^x); \quad \frac{d\beta}{dt} = \delta(P^y + \Delta A^y); \quad \frac{d\gamma}{dt} = \delta(P^z + \Delta A^z);$$

und wenn man für $\Delta A^x, \Delta A^y, \Delta A^z$ die obigen Werthe einsetzt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \frac{d\alpha}{dt} &= P^x + A\alpha + (B-A)(3\alpha + \beta + \gamma) \\ \frac{1}{\delta} \frac{d\beta}{dt} &= P^y + A\beta + (B-A)(\alpha + 3\beta + \gamma) \\ \frac{1}{\delta} \frac{d\gamma}{dt} &= P^z + A\gamma + (B-A)(\alpha + \beta + 3\gamma) \end{aligned}$$

worin α, β, γ Functionen von A sind, A und B constante Größen.

Die Integration dieses Systems simultaner linearer Differentialgleichungen ergibt, wenn man berücksichtigt, daß für $t=0$, $\alpha=\beta=\gamma=0$ und $\frac{d\alpha}{dt}=P^x$; $\frac{d\beta}{dt}=P^y$; $\frac{d\gamma}{dt}=P^z$ stattfinden, die Werthe von α, β, γ , so wie die Werthe von $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ in irgend einem Zeitpunkt der Bewegung

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\frac{1}{3}(2P^x - P^y - P^z)}{2B-A} \cdot e^{\delta(2B-A)t} + \frac{\frac{1}{3}(P^x + P^y + P^z)}{5B-4A} \cdot e^{\delta(5B-4A)t} \\ &\quad + \frac{(3A-4B)P^x - (A-B)(P^y + P^z)}{(5B-4A)(2B-A)} \\ \beta &= \frac{\frac{1}{3}(2P^y - P^x - P^z)}{2B-A} \cdot e^{\delta(2B-A)t} + \frac{\frac{1}{3}(P^x + P^y + P^z)}{5B-4A} \cdot e^{\delta(5B-4A)t} \\ &\quad + \frac{(3A-4B)P^y - (A-B)(P^x + P^z)}{5B-4A)(2B-A)} \\ \gamma &= \frac{\frac{1}{3}(2P^z - P^x - P^y)}{2B-A} \cdot e^{\delta(2B-A)t} + \frac{\frac{1}{3}(P^x + P^y + P^z)}{5B-4A} \cdot e^{\delta(5B-4A)t} \\ &\quad + \frac{(3A-4B)P^z - (A-B)(P^x + P^y)}{(5B-4A)(2B-A)} \end{aligned} \right.$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{3} \delta (2P^x - P^y - P^z) e^{\delta(2B-A)t} \\
&\quad + \frac{1}{3} \delta (P^x + P^y + P^z) e^{\delta(5B-4A)t} \\
\frac{d\beta}{dt} &= \frac{1}{3} \delta (2P^y - P^x - P^z) e^{\delta(2B-A)t} \\
&\quad + \frac{1}{3} \delta (P^x + P^y + P^z) e^{\delta(5B-4A)t} \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{3} \delta (2P^z - P^x - P^y) e^{\delta(2B-A)t} \\
&\quad + \frac{1}{3} \delta (P^x + P^y + P^z) e^{\delta(5B-4A)t}
\end{aligned}$$

Für $t=0$ reduciren sich, wie es seyn muß, diese Gleichungen auf $\alpha=\beta=\gamma=0$ und $\frac{d\alpha}{dt}=P^x$, $\frac{d\beta}{dt}=P^y$, $\frac{d\gamma}{dt}=P^z$; für $t=\infty$ müssen sich die Werthe von α , β , γ auf die nicht mit Exponentialgrößen behafteten Glieder obige Ausdrücke reduciren, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, wie es die Gleichungen (2) erfordern, d. h. es müssen die Exponenten $\delta(2B-A)$ und $\delta(5B-4A)$ negative Größen seyn; bei der letzteren Größe ist dies immer der Fall, bei der ersteren nicht mehr, sobald $A =$ oder $> 2B$ wird; dann werden die Werthe von α , β , γ mit zunehmender Zeit t ohne Ende ebenfalls immer zunehmen und es wird nie Gleichgewichtszustand eintreten können, ausgenommen in dem Falle, daß die Coefficienten $(2P^x - P^y - P^z)$, $(2P^y - P^x - P^z)$, $2P^z - P^x - P^y$ einzeln gleich Null sind, was nur stattfindet, wenn $P^x=P^y=P^z$ gesetzt werden kann; was uns wiederum auf die Definition des flüssigen Aggregatzustandes und auf den Grundsatz der Hydrostatik führt. Ebenso wie die Größen α , β , γ werden auch die Kräfte $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, welche die Summen der gesamten Molecularwirkungen und des äußeren Druckes in Bezug auf jedes prismatische Element in der Oberfläche des Parallelepipeds darstellen, für $t=\infty$ ebenfalls bis ins Unendliche wachsen, so lange die Exponenten nicht *beide* negativ werden; sobald aber nicht bloß $(5B-4A)$, sondern auch der Exponent $(2B-A)$ negativ bleibt, so verschwinden

die Werthe von $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ für $t = \infty$ und es tritt Gleichgewicht ein, so daß die Gleichungen $P^x - \mathcal{A} A^x = 0$, $P^y - \mathcal{A} A^y = 0$, $P^z - \mathcal{A} A^z = 0$ erfüllt werden, wie es die Bedingungen des Gleichgewichts (2) erfordern.

Sind für $A > 2B$ die Drucke P^x , P^y , P^z nicht einander gleich, so wird nicht allein an der Fläche des geringeren Druckes ein Weichen aller materiellen Theile stattfinden, sondern da dann auch im Innern in jedem Punkte der Masse wie an den Oberflächen, auf welche die stärkeren Drucke wirken, die Drucke nach verschiedenen Richtungen hin verschieden sind, so wird auch an jedem Orte ein Ausweichen aller Theile nach den Richtungen des schwächeren Druckes hin stattfinden, welches sofort mit dem Auftreten noch so kleiner Drucke beginnt, und die letzteren daher eigentlich nie zur Wirkung gelangen läßt; daher die absolute Beweglichkeit und Verschiebbarkeit aller Theile einer flüssigen Masse, welche ihre Haupteigenschaft bildet. Der Fundamentalsatz der Hydrostatik, welcher aussagt, daß eine flüssige Masse in allen ihren Theilen nur im Gleichgewicht seyn kann, wenn in jedem ihrer Punkte der Druck nach allen Richtungen derselbe ist, wurde bisher als einfacher Erfahrungssatz oder als unbeweisbares Axiom und Definition des flüssigen Zustandes angenommen, und aus ihm alle Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung flüssiger Körper abgeleitet; hier ist nun aus der Wirkungsweise der Molecularkräfte der Beweis gegeben, daß ein solcher Zustand für alle Körper dann eintreten muß, wenn die Molecularspannung einen gewissen Werth erreicht, d. h. wenn die Temperatur der Masse bis zu einem bestimmten Punkte gestiegen ist.

Wie in den obigen Werthen von α , β , γ der Exponent $(2B - A)$ den Uebergang der Körper aus dem festen in den tropfbarflüssigen Zustand ausdrückt, so wird man auch leicht erkennen, daß der zweite Exponent $(5B - 4A)$ in besonderer Beziehung zu dem gasförmigflüssigen Zustande der Körper stehen muß.

Wirkt nämlich eine nach allen Richtungen gleiche äussere Kraft P auf eine Masse, welche im Anfange der Bewegung die Molecularspannung A hat, so ergibt sich, da in diesem Falle die Kraft und die eintretende Linearausdehnung α beliebig gross gesetzt werden können, die Vermehrung der Molecularspannung nach jeder Richtung aus (5) $\Delta A = A - A_0 = \frac{1}{3}B - A[1 - (1 + \alpha)^{-4}]$ und wenn wir hier ebenfalls die in einem sehr kleinen Zeitabschnitte Δt entstehende kleine Linearausdehnung $\Delta \alpha$ proportional der Summen der wirkenden Kräfte $(P + \Delta A)$ setzen und für Δt , dt , für $\Delta \alpha$, $\frac{d\alpha}{1 + \alpha}$ substituiren, wo die Grösse α im Nenner von $\frac{d\alpha}{1 + \alpha}$ nicht mehr gegen die Einheit vernachlässigt werden kann, wie dies oben bei der Bildung der Differentialgleichungen für die kleinen aber ungleichen Linearausdehnungen α, β, γ geschehen ist, da jetzt α und P beliebige Grössen annehmen können, — so erhält man, wenn δ denselben constanten Coëfficienten wie oben vorstellt

$$\frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = P + \frac{1}{3}B - A[1 - (1 + \alpha)^{-4}]$$

und daraus durch Integration, in der man berücksichtigt, daß für $t = 0$ auch $\alpha = 0$ ist, die Gleichung

$$(8) \quad (1 + \alpha)^4 (P + \frac{1}{3}B - A) = \frac{1}{3}B - A + P \cdot e^{\delta(4P + 5B - 4A)t}$$

Für eine negative Kraft P , d. h. für einen äusseren *Druck*, wird also der Exponent immer negativ bleiben, also auch immer Gleichgewicht stattfinden für $t = \infty$; für ein positives P hingegen, d. h. für einen Zug, der grösser ist als $(5B - 4A)$ ist kein Gleichgewicht möglich, d. h. die ganze Masse wird sich dann durch Diffusion ins Unendliche ausbreiten. Einen Zug vermögen wir mit gewöhnlichen Mitteln nicht an eine flüssige Masse anzubringen; allein die Wärme, d. h. die Molecularwirkung der in höherer Temperatur befindlichen umgebenden Massen wirkt ganz in derselben Weise ausdehnend wie ein an alle Theile der Oberfläche angebrachter Zug, wenn wir daher die positive *Kraft*

P als eine Wirkung der Wärme auffassen, so sagt die obige Gleichung, daß sobald die den Zug P ersetzende Temperaturerhöhung den Werth $(5B - 4A)$ überschreitet, die Masse ins Unendliche diffundirt und nirgends eine Gleichgewichtslage erreichen kann. Wirkt aber aufer dem durch Wärme effectuirten Zuge P noch ein Druck, d. h. eine Kraft $-p$ auf alle Theile der Oberfläche einer Masse, wie wir dieselbe immer durch künstliche Mittel wirken lassen können, und ist $-p$ von der Beschaffenheit, daß der Exponent $4P - p + 5B - 4A$ negativ bleibt, so sieht man leicht, daß vermöge dieses Druckes $-p$, auch bei jeder beliebigen Temperaturerhöhung, d. h. bei noch so großen P eine Gleichgewichtslage der Massentheile erreicht werden muß; und darin scheint der wesentliche Unterschied zwischen den tropfbar-flüssigen und den gasförmig-flüssigen Zuständen einer Masse zu liegen, daß bei jenen das Gleichgewicht unter dem Einflusse der Wärmewirkung allein sich herstellt, bei dem gasförmigen Zustande aber nur unter gleichzeitiger Mitwirkung eines äußeren Druckes, welcher der ausdehnenden Wirkung der Wärme entgegenarbeitet; ein solcher äußerer Druck ist im Allgemeinen durch den Widerstand der Gefäßwände oder an freien Oberflächen durch den *atmosphärischen Druck* bedingt.

Diese Andeutung über die Natur des gasförmigen Zustandes möge hier genügen; eine ausführliche Darstellung desselben muß ich für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

Aus dem durch die Gleichungen (7) gegebenen Werthe für α , β , γ ersieht man, daß wenn $2B - A$ negativ, d. h. wenn die Masse im festen Aggregatzustande befindlich ist und die im Allgemeinen ungleichen Drucke P^x , P^y , P^z auf ihre den Coordinatenebenen parallelen Oberflächen wirken, die Gleichgewichtslage genau genommen erst nach einem unendlich großen Zeitraume vollkommen erreicht wird, daß aber, wegen der logarithmischen Form der Functionen α , β , γ in ihrer Abhängigkeit von der Zeit t , schon nach einem sehr kurzen Zeitraume t , diese Functionen Werthe

erhalten, welche von ihren Endwerthen in der vollkommenen Gleichgewichtslage für $t = \infty$ nur um ein sehr Geringes verschieden sind; daher die große Geschwindigkeit, mit der eine äusseren Drucken oder Zügen unterworfenen Masse ihre neue Gleichgewichtslage scheinbar augenblicklich annimmt; dennoch hat man in vielen Fällen beobachtet, dass nach einem gewissen kleinen Zeitraume die Linearausdehnungen α , β , γ , wie es die obigen Gleichungen verlangen, fortfahren sich um sehr kleine Grössen zu verändern und dass sich kein bestimmter Zeitpunkt angeben lässt, in welchem vollkommene Ruhe in der ganzen Masse eingetreten; diese letztere Eigenschaft der festen Körper hat man die elastische Nachwirkung genannt; man sieht aus den Gleichungen (7), dass die elastische Nachwirkung für dieselben Körper um so größer wird, je kleiner der Exponent $(2B - A)$, d. h. je näher die Massen ihrem Schmelzpunkte kommen.

Die von mir oben entwickelte Vorstellungsweise, nach welcher der Einfluss der Temperaturniedrigung gänzlich auf die Wirkung eines äusseren Zuges resp. Druckes auf die Oberfläche zurückgeführt werden könne, scheint einem gewichtigen Einwurfe zu unterliegen, wenn man bemerkt wie schnell jede Masse vermöge eines sich gleichbleibenden mechanischen Druckes ihre neue Gleichgewichtslage erreicht, verglichen mit der langsamen und bei verschiedenen Körpern so verschiedenen Weise, in welcher die Ausgleichung der Temperaturungleichheiten zwischen Körpern gleicher Temperatur stattfindet; eine Beobachtung, die in der verschiedenen *Wärmeleitungsfähigkeit* der Körper ihren Ausdruck findet; allein man muss bedenken, dass die mechanischen Drucke im ersten Falle während der ganzen Dauer der Bewegung vollkommen *constante* Grössen sind, dass hingegen im zweiten Falle, wenn diese Drucke als *Wärmewirkungen* der umgebenden Massen von verschiedener Temperatur aufgefasst werden, diese Wirkungen während der ganzen Dauer der Bewegung durch die Rückwirkung des erwärmten Körpers in jedem Zeitpunkte ihre

Gröfse ändern, indem die Temperaturquelle bei jeder noch so geringen Wärmeabgabe an einen anderen Körper ihre Temperatur immer um eine äquivalente Gröfse erniedrigt als diejenige des kälteren Körpers erhöht wird; die Kraft P , als Wirkung der Wärme umgebender Massen gedacht, ist also nicht constant, wie ein mechanischer Druck, sondern selbst Function von den in jedem Zeitpunkte stattfindenden Linearausdehnungen beider Massen, mithin auch Function von der Zeit t ; aus diesem Grunde kann es daher nicht unmöglich seyn, dafs wenn in den Differentialgleichungen, die auf die Ausdrücke (7) und (8) führten P ebenfalls wie ΔA eine Function von t darstellt, die Integration dieser Gleichungen für die Linearausdehnungen in irgend einem Zeitpunkte Werthe ergeben würde, die keineswegs Exponentialfunctionen von t enthalten, sondern eine nur langsam mit t convergirende Reihe darstellen würden, woraus sich auf einen bedeutenden Unterschied in der Geschwindigkeit der Herstellung des Gleichgewichtes in beiden Fällen schliesen läfst.

Die Gleichungen (2) sagen aus, dafs es für ein beliebiges System äufserer Drucke auf die drei Oberflächen eines rechtwinklichen Parallelepipeds immer ein System kleiner Linearausdehnungen gebe, vermittelt deren, *wenn die letzteren ein Mal eingetreten sind*, Gleichgewicht in der ganzen Masse stattfinden mufs, aus der Gleichung (6) und dem Werthe des Differentialquotienten

$$\frac{dP^x}{d\gamma} = - \frac{(5B-4A)(2B-A)}{4B-3A}$$

haben wir ferner nachgewiesen, dafs unter der gleichzeitigen Wirkung der Drucke P^x , P^y , P^z das den Gleichungen (2) entsprechende System von Linearausdehnungen immer eintreten wird, so lange $2B-A$ eine negative Gröfse ist, die obigen Drucke, mögen beschaffen seyn, wie sie wollen. Von dieser Regel findet jedoch eine Ausnahme statt; man wird nämlich bemerken, dafs der Werth von $\frac{dP^x}{d\gamma}$ kein genauer Werth ist, wenn $2B-A$ eine sehr kleine Gröfse ist. Da nämlich in den Gleichungen (2), aus welcher jener Dif-

ferentialquotient abgeleitet ist, die Glieder höherer Ordnung fortgelassen sind, so würde auch, wenn man dieselben mit berücksichtigen wollte, der Werth von $\frac{dP^s}{d\gamma}$ noch Glieder enthalten müssen, die mit den Ersten und höheren Potenzen von α, β, γ multiplicirt sind; diese Glieder können vernachlässigt werden, wie wir es bisher gethan haben, so lange der Quotient $-\frac{(5B-4A)(2B-A)}{4B-3A}$ verhältnißmäßig sehr viel größer ist als die mit irgend einer Potenz der Linearausdehnungen behafteten Glieder; dies findet aber nicht mehr statt, sobald $(2B-A)$ sehr klein wird, also jener Quotient selbst von der Ordnung der ersten Potenz der Linearausdehnungen wird; es müssen alsdann, um den genauen Werth von $\frac{dP^s}{d\gamma}$ zu erhalten, in der Entwicklung der Gleichungen (2) noch die Glieder der zweiten Ordnung mit berücksichtigt werden, was ebenfalls geschehen muß, wenn zwar $(2B-A)$ nicht einen kleinen Werth hat, die Linearausdehnungen α, β, γ hingegen, wie die äußeren Drucke so stark werden, daß man die von den Gliedern zweiter Ordnung herrührenden Werthe in den Gleichungen (2) und noch weit mehr in dem daraus abgeleiteten Werthe $\frac{dP^s}{d\gamma}$ nicht mehr vernachlässigen darf.

Um in den Gleichungen (2) die Glieder zweiter Ordnung mit einzuschließen, ist es hinreichend, in der Entwicklung des Ausdruckes für die Elementarwirkung zweier Massentheile nach den Verschiebungen u, v, w , zerlegt z. B. nach der z Axe

$$mm'f(r+\Delta r)\frac{z'-z+w'-w}{r+\Delta r}$$

$$f(r+\Delta r)=f(r)+\Delta r\frac{df(r)}{dr}+\frac{1}{2}\Delta r^2\frac{d^2f(r)}{dr^2}$$

und ebenso für $\frac{\Delta r}{r}$ den genaueren Werth

$$\begin{aligned}\frac{\Delta r}{r} = & \frac{x'-x}{r} \cdot \frac{u'-u}{r} + \frac{y'-y}{r} \cdot \frac{v'-v}{r} + \frac{z'-z}{r} \cdot \frac{w'-w}{r} + \frac{(u'-u)}{r^2} \\ & + \frac{1}{2} \frac{(v'-v)^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{(w'-w)^2}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{(\Delta r)^2}{r}\end{aligned}$$

zu setzen.

In der so bewerkstelligten Entwicklung von

$$mm'f(r+\Delta r)\frac{z'-z+w'-w}{r+\Delta r}$$

können dann die Glieder von höherer als der zweiten Ordnung weggelassen werden; ebenso können wir, da wir vorläufig nur das Gleichgewicht einer rechtwinklich parallelepipedischen Masse betrachten, auf deren Flächen die in der ganzen Ausdehnung dieser Flächen constanten äußeren Drucke P^x , P^y , P^z wirken, mithin die Verschiebungen u , v , w nur Funktionen der entsprechenden gleichnamigen Coordinaten resp x , y , z sind, d. h. $u = \alpha x$; $v = \beta y$; $w = \gamma z$; die sämtlichen ungleichnamigen sechs Differentialquotienten $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, $\frac{dv}{dx}$, = 0 setzen und für die gleichnamigen Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ ihre Werthe α , β und γ substituiren.

Vollzieht man sämtliche einzelne Integrationen in derselben Weise wie früher, so verwandelt sich die dritte der Gleichungen (2) in

$$\begin{aligned} -P^z = & A\gamma + (B-A)(\alpha + \beta + 3\gamma) + (B-A)\left(\frac{48}{14}\gamma^2\right. \\ & + \frac{4}{14}\alpha^2 + \frac{4}{14}\beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma) + C\left(\frac{30}{14}\gamma^2 + \frac{6}{14}\alpha^2 + \frac{6}{14}\beta^2\right. \\ & \left. + \frac{4}{14}\alpha\beta + \frac{12}{14}\alpha\gamma + \frac{12}{14}\beta\gamma\right). \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung

$$\frac{2}{15}\rho \cdot \pi \int_0^R r^3 \left(\frac{1}{2} r^2 \frac{d^2 f(r)}{dr^2} - r \frac{df(r)}{dr} + f(r) \right) dr = C$$

gesetzt worden ist; für die beiden anderen Gleichungen (2) erhält man analoge Ausdrücke, wenn man in dieser für P^x resp. P^y und P^z ; für γ resp. α und β ; und sofort substituirt. Die Größe C läßt sich durch eine einfache Bemerkung auf die bekannten Größen B und A zurückführen. Im Falle nämlich $\alpha = \beta = \gamma$ werden, reduciren sich alle drei Gleichungen auf eine Einzige, welche offenbar identisch mit derjenigen seyn muß, welche man erhält, wenn man aus der Gleichung (5) den Werth von

$$A - A_0 = -P = (\frac{5}{4}B - A)(1 - [1 + \alpha]^{-1})$$

bis auf die zweite Potenz von α genau entwickelt, woraus man

$$-P = (5B - 4A)\alpha - (5B - 4A)\frac{10}{4}\alpha^2$$

erhält; aus der Vergleichung dieses Werthes von $-P$ mit demjenigen, welcher aus den drei obigen Gleichungen hervorgeht, wenn man $P^x = P^y = P^z = P$ und $\alpha = \beta = \gamma$ setzt, ergiebt sich $C = (\frac{32}{10}A - \frac{37}{10}B)$ und diesen Werth von C in die obigen Werthe von P^x, P^y, P^z eingesetzt, erhält man, anstatt der Gleichungen (2) die genaueren

$$(9) \left\{ \begin{aligned} -P^x &= (3B - 2A)\alpha + (B - A)\beta + (B - A)\gamma \\ &\quad + \alpha^2(3A - \frac{57}{14}B) + (\beta^2 + \gamma^2)(A - \frac{17}{14}B) \\ &\quad + (\alpha\beta + \alpha\gamma)(2A - \frac{34}{14}B) + \beta\gamma(A - \frac{16}{14}B) \\ -P^y &= (3B - 2A)\beta + (B - A)\alpha + (B - A)\gamma \\ &\quad + \beta^2(3A - \frac{57}{14}B) + (\alpha^2 + \gamma^2)(A - \frac{17}{14}B) \\ &\quad + (\alpha\beta + \beta\gamma)(2A - \frac{34}{14}B) + \alpha\gamma(A - \frac{16}{14}B) \\ -P^z &= (3B - 2A)\gamma + (B - A)\alpha + (B - A)\beta \\ &\quad + \gamma^2(3A - \frac{57}{14}B) + (\alpha^2 + \beta^2)(A - \frac{17}{14}B) \\ &\quad + (\alpha\gamma + \beta\gamma)(2A - \frac{34}{14}B) + \alpha\beta(A - \frac{16}{14}B). \end{aligned} \right.$$

Um die Anwendung dieser Formeln auf ein rechtwinkliches Parallelepipèd zu vereinfachen, beschränken wir uns auf den gewöhnlichen und fast allein vorkommenden Fall, daß die Masse nur von einem Drucke oder Zuge P in der Richtung der Längensaxe z gedehnt oder comprimirt werde, daß hingegen die den xz und yz Ebenen der Coordinaten parallelen Oberflächen gänzlich frei seyen, wodurch

$P' = P'' = 0$, $\alpha = \beta$ werden mithin die Gleichungen (9) sich reduciren auf:

$$-P = (3B - 2A)\gamma + 2(B - A)\alpha + \alpha^2(3A - \frac{25}{7}B)$$

$$\gamma^2(3A - \frac{57}{14}B) - \alpha\gamma(4A - \frac{34}{7}B)$$

und

$$0 = (4B - 3A)\alpha + (B - A)\gamma + \alpha^2(6A - \frac{54}{7}B)$$

$$+ \gamma^2(A - \frac{17}{14}B + \alpha\gamma(3A - \frac{25}{7}B).$$

Da wir nach dem Obengesagten die genaueren Gleichungen (9) anstatt der Gleichungen (2) nur in dem Falle anzuwenden haben, wenn $2B - A$ eine sehr kleine Gröfse wird, so ist es erlaubt, in allen Gliedern der zweiten Ordnung anstatt A den Werth $2B$ einzusetzen, da der hiedurch begangene Fehler nur von der dritten Ordnung wird und uns so eine grofse Vereinfachung in der Rechnung und Uebersichtlichkeit der erhaltenen Endresultate erlaubt; dann erhält man aus der zweiten der obigen Gleichungen durch Auflösung nach α

$$(10) \quad \alpha = -\frac{(B - A)}{4B - 3A}\gamma + \frac{9}{28}\gamma^2;$$

der andere Wurzelwerth für α ist nicht brauchbar, indem derselbe sehr grofsen Linearausdehnungen α und γ entspricht. Setzt man diesen Werth von α in die Erste der obigen Gleichungen ein und entwickelt wie früher den Differentialquotienten $\frac{dP}{d\gamma}$, so erhält man den genaueren Werth

$$\frac{dP}{d\gamma} = -\frac{(5B - 4A)(2B - A)}{4B - 3A} - \frac{9}{14}B\gamma$$

oder wenn man für γ den angenäherten Werth von P substituirt

$$\frac{dP}{d\gamma} = -\frac{(5B - 4A)(2B - A)}{4B - 3A} + \frac{(4B - 3A)B}{(5B - 4A)(2B - A)}P \cdot \frac{9}{14}$$

für $P = \frac{14}{9} \frac{1}{B} \cdot \left(\frac{(5B - 4A)(2B - A)}{4B - 3A} \right)^2$ wird also $\frac{dP}{d\gamma}$ sein Zei-

chen wechseln und dann keine Gleichgewichtslage der Masse stattfinden, d. h. es muß das Parallelepiped in der Richtung seiner Länge *zerreißen*, und zwar der Theorie nach zu gleicher Zeit in allen Punkten seiner Längensaxe, in der Wirklichkeit aber wegen der nicht zu vermeidenden Ungleichheiten des Querschnittes an demjenigen Punkte zuerst, wo der Querschnitt am dünnsten ist, wo also P zuerst seinen relativ größten Werth erreicht; dieser Werth von P ist, wie man sieht, immer positiv, d. h. ein fester Körper kann nur durch ein an seine Längensaxe gehängtes Gewicht zerrissen, nicht aber durch einen in dieser Richtung allein wirkenden Druck $-P$ zermalmt werden, da in letzterem Falle für jeden negativen Werth von P der Differentialquotient $\frac{dP}{d\gamma}$ positiv bleibt, so lange als $2B - A$ überhaupt noch von Null verschieden und negativ ist.

Umgekehrt, wenn nach der Längensaxe des Parallelepipeds keine äußere Kraft wirkt, auf die zwei Seitenflächen, parallel der xz und yz Ebene der Coordinaten hingegen zwei gleich große Drucke oder Züge, so wird $P^x = 0$, $P^x = P^y = P$, und wiederum $\alpha = \beta$, und die Gleichungen (9) geben:

$$\begin{aligned} 0 &= (3B - 2A)\gamma + 2(B - A)\alpha + \gamma^2(3A - \frac{57}{14}B) \\ &\quad + \alpha^2(3A - \frac{25}{7}B) + \alpha\gamma(4A - \frac{33}{7}B) \\ -P &= 4B - 3A)\alpha + (B - A)\gamma + \alpha^2(6A - \frac{54}{7}B) \\ &\quad + \gamma^2(A - \frac{17}{14}B) + \alpha\gamma(3A - \frac{25}{7}B) \end{aligned}$$

hieraus zieht man

$$\alpha = -\frac{(3B - 2A)}{2(B - A)}\gamma + \frac{27}{56}\gamma^2$$

und

$$\frac{dP}{d\gamma} = \frac{(5B - 4A)(2B - A)}{2(B - A)} + \frac{9}{14}B\gamma$$

oder auch wenn γ durch P ausgedrückt wird,

$$\frac{dP}{d\gamma} = \frac{(5B - 4A)(2B - A)}{2(B - A)} + \frac{18}{14} \cdot \frac{B \cdot (B - A)}{(5B - 4A)(2B - A)} P$$

d. h. wenn

$$P = -\frac{14}{9B} \left(\frac{(5B-4A)(2B-A)}{2(B-A)} \right)^2$$

ist, so wechselt der Differentialquotient $\frac{dP}{d\gamma}$, der hier wegen der Bedeutung von P als auf der Richtung der Linear- ausdehnung γ senkrecht stehender Druck immer negativ seyn muß, wenn die Gleichgewichtslage erreicht werden soll — sein Zeichen, wird positiv, wodurch die Erreichung des Gleichgewichtszustandes unmöglich gemacht ist; dieß kann aber, wie man sieht, nur bei einem negativen Werthe von P , d. h. bei einem *Drucke* stattfinden. Ein Parallelepiped kann also nie durch auf seine Seitenflächen angebrachte Züge *zerrissen* werden, wie dieß nach seiner Längenrichtung durch ein an seine Längensaxe gehängtes Gewicht möglich ist, wohl aber können Seitendrucke es *zermalmen*, was wiederum durch einen einzigen nach der Längensaxe wirkenden Druck nicht möglich war; und da die obigen Formeln im Allgemeinen nur für kleine Werthe von $(2B-A)$ gelten, so ergibt sich, daß der Zug, durch welchen eine Masse nach ihrer Längenrichtung zerrissen wird und der Druck P , durch welchen sie nach ihrer transversalen Richtung zermalmt wird, nahezu dieselben numerischen Gröfsen haben, welche die *absolute Festigkeit* der Masse ausdrücken, die aber, wie man sieht, mit der Gröfse der Molecularspannung A , d. h. mit der Temperatur, veränderlich ist; im Grunde ist auch ein Zermalmen nach transversaler Richtung nichts Anderes als ein Zerreißen nach normaler Richtung, und beide Vorgänge können als eine Verflüssigung der Masse an dem Punkte des geringsten Querschnittes angesehen werden.

Man erkennt aus Gleichung (10), daß, wenn nur eine einzige äufere Kraft nach der Längenrichtung des Parallelepipeds wirkt, im Gleichgewichtszustande immer ein bestimmtes Verhältniß, angenähert der Bruch $-\frac{(B-A)}{4B-3A}$ zwischen jeder der Transversalcontractionen und der Longitudinalausdehnung stattfindet; dieß Verhältniß soll nach

Poisson's Theorie immer $= -\frac{1}{3}$ seyn; Wertheim's Versuche ergeben es ziemlich nahe $= -\frac{1}{3}$; aus der hier gegebenen Theorie folgt, dass dies Verhältniß überhaupt mit der Temperatur veränderlich ist, dass es aber bei allen festen Körpern, da A hier immer zwischen den Gränzen $+\infty$ und $+2B$ liegen muß, nur innerhalb der Werthe $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$ schwanken kann; indem der erstere Werth nur für den Schmelzpunkt gilt. Um die letztere Theorie zu prüfen, füge ich hier einige Reihen der Wertheim'schen Versuche bei, in welchen neben einander die zusammengehörigen Werthe von α und γ eines jeden Versuches gegeben und daraus in der dritten Verticalreihe der Quotient $\frac{\alpha}{\gamma}$ berechnet ist, jedoch nur diejenigen Versuche, in welchen die Linearausdehnung γ den Werth $\frac{1}{100}$ nicht übersteigt, da unsere Formeln überhaupt nur für kleine Gestaltveränderungen Gültigkeit haben.

Versuche an quadratischen Kautschuckstäben (d. Ann. Bd. 78, S. 385):

γ	α	$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{B-A}{4B-3A}$
0,004351	0,002881	0,66
0,012427	0,00823	0,66
0,02129	0,007613	0,36
0,024066	0,008436	0,35
0,03614	0,013992	0,39
0,04261	0,01152	0,27
0,051176	0,01728	0,34
0,06695	0,0214	0,32
0,1045	0,0470	0,45

Man sieht, dass die Kleinheit der zu messenden Größen keine große Genauigkeit gestattet, dass sich aber dennoch im Allgemeinen der Quotient $\frac{\alpha}{\gamma}$, wie es die Theorie verlangt, zwischen den Gränzen 0,5 und 0,33 hält.

Ebenso erhält Wertheim aus Versuchen mit Messingröhren für das Verhältniß der Volumenausdehnung zur Längenausdehnung, welches nach der Poisson'schen Theorie

immer $= \frac{1}{2}$ seyn sollte, nach der hier gegebenen Entwicklung aber zwischen den Werthen 0 und $\frac{1}{3}$ schwanken kann, in drei Versuchen den Quotienten 0,32, und in vier Versuchen an Glasröhren schwankt dieser Quotient zwischen 0,30 und 0,38; entschieden aber geht schon aus diesen Versuchen die Unrichtigkeit der Poisson'schen Theorie hervor.

Ich will schliesslich noch die Lösung eines hieher gehörenden Problems geben, nämlich die Gestaltveränderung, welche eine Hohlkugel, deren innerer Radius R , deren äußerer Radius R' ist, erleidet, wenn sie von innen und von außen den Drucken resp. P und P' ausgesetzt ist. Setzen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Hohlkugel, so wird jedes Massentheilchen, dessen Coordinaten x, y, z sind, dessen Abstand vom Mittelpunkte $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist, nur eine Verschiebung U in der Richtung dieses Radius r erleiden können; mithin wird man $u = U \frac{x}{r}$; $v = U \frac{y}{r}$; $w = U \frac{z}{r}$ setzen können, oder auch $u = \frac{df U dr}{\partial x}$; $v = \frac{df U dr}{\partial y}$; $w = \frac{df U dr}{\partial z}$, wo U nur eine Function von r seyn kann; aus den letzten Werthen von u, v, w folgt $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$; $\frac{du}{dz} = \frac{dw}{\partial x}$; $\frac{dv}{dz} = \frac{dw}{\partial y}$, und wenn man diese Werthe in die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes (I) einsetzt, so reduciren sich diese drei Gleichungen auf die Einzige:

$$\frac{d\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)}{dz} = 0,$$

mithin $\frac{du}{\partial x} + \frac{dv}{\partial y} + \frac{dw}{\partial z} = \theta$, wo θ eine noch zu bestimmende Constante bedeutet; daraus erhält man

$$\frac{du}{\partial x} + \frac{dv}{\partial y} + \frac{dw}{\partial z} = \theta = \frac{dU}{dr} + 2 \frac{U}{r},$$

und durch Integration, wenn C eine zweite Constante bedeutet $U = \frac{\theta}{3} r - \frac{C}{r^2}$; woraus man

$$u = \frac{\theta}{3}x - \frac{Cx}{r^3}; \quad v = \frac{\theta}{3}y - \frac{Cy}{r^3}; \quad w = \frac{\theta}{3}z - \frac{Cz}{r^3}$$

zieht und die Gleichungen des Gleichgewichtes (2) geben z. B. für den Punkt $x=0, y=0, z=R$

$$-P = (5B - 4A)\frac{\theta}{3} + (2B - A)\frac{2C}{R^3}$$

Ebenso wird für den entsprechenden Punkt in der äußeren Fläche $x=0, y=0, z=R'$

$$-P' = (5B - 4A)\frac{\theta}{3} + (2B - A)\frac{2C}{R'^3};$$

woraus man die Werthe der Constanten θ und C immer finden kann.

Für $P=P'$ muß $C=0$ werden, also wird dann für den Punkt $x=0, y=0, z=R, u=0, v=0, w=\frac{\theta}{3}R$, und da man $\frac{\theta}{3} = -\frac{P}{5B-4A}$ findet, so wird durch die Wirkung der beiden Drucke P der Radius R in $R\left(1 - \frac{P}{5B-4A}\right)$ verwandelt, also wenn, wie es gewöhnlich der Fall ist, die Kraft P einen Druck vorstellt und also negativ ist, so wird der innere Halbmesser der Kugel in dem Verhältnisse von $1:1 - \frac{P}{5B-4A}$, also der Inhalt ungefähr in dem Verhältniß von $1:1 - \frac{3P}{5B-4A}$ verkleinert. Es muß daher auch ein Verhältniß der Drucke P und P' geben, mit welchem der Inhalt der Kugel unverändert bleibt; dies findet man, wenn man für $x=0, y=0, z=R, w=\frac{\theta}{3}R - \frac{CR}{R^3}=0$ setzt, woraus man $C=\frac{\theta}{3}R^3$ zieht; ebenso wird dann $-P=\theta(2B-A)$ und für das verlangte Verhältniß von P und P' erhält man die Bedingung

$$P_1 = P + \frac{2}{3}\theta(2B-A)\left(\frac{R}{R'}\right)^3$$

oder auch

$$P_1 = \frac{P}{3} \left[(5B-4A)(3B-2A) - (2B-A)\left(\frac{R}{R'}\right)^3 \right].$$

Der Fall, in welchen der innere und der äußere Druck

einander gleich sind, also eine Verringerung des Inhaltes stattfindet, hat seine Anwendung in den Versuchen mit dem Piezometer, mittelst dessen man die Zusammendruckbarkeit der Flüssigkeit bestimmt; um aus der scheinbaren Zusammendruckbarkeit, welche die Gestaltsveränderung des Gefäßes in sich einschließt, die absolute Zusammendruckbarkeit zu berechnen, hat man eine der hier angegebenen Formeln anzuwenden, da die zu diesem Zwecke von Poisson gegebene Correctionsformel, wie es sich auch durch die Versuche von Regnault und Wertheim gezeigt hat, unrichtig ist.

Die kubische Zusammendruckbarkeit der Flüssigkeiten mittelst eines Druckes P , welche nach unserer Theorie durch $\frac{3P}{5B-4A}$ dargestellt wird, ist also mit der Temperatur veränderlich, und muß, wie die Formel zeigt, mit steigender Temperatur, d. h. mit abnehmendem A , größer werden, da $5B-4A$ immer negativ bleiben muß; durch die Versuche von Regnault und Grassi ist diese Eigenschaft der Flüssigkeiten für alle, mit Ausnahme des Wassers, bestätigt worden. Da aber in diesen Versuchen die Zusammendrückung durch comprimirt Luft bewerkstelligt wird, die unmittelbar mit dem Wasser in Berührung tritt, so kann es wohl möglich seyn, daß die beim Wasser bemerkte Anomalie durch eine Aufnahme von atmosphärischer Luft verursacht wird.

Außer den hier gelösten Problemen giebt es noch eine Menge hierher gehöriger Aufgaben, deren Lösung jedoch schon von anderen Bearbeitern dieses Gegenstandes und namentlich von Lamé, bewerkstelligt worden ist, und in ihren Resultaten nicht wesentlich modificirt werden, wenn man sie mittelst der hier gegebenen Formeln behandeln will.

Im Allgemeinen sieht man, daß wenn das System der Verschiebungen u, v, w in bestimmten Functionen von x, y, z gegeben ist, man durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichungen (1), (2) und (3) alle übrigen unbekannten

Größen P^x , P^y ... unmittelbar bestimmt findet und damit die Aufgaben in jeder Beziehung gelöst werden. Dieß ist jedoch nur bei wenigen Aufgaben der Fall. Gewöhnlich ist nur die Form der Functionen u , v , w im Allgemeinen, zuweilen auch nur eine Differentialgleichung zwischen den Größen u , v , w und x , y , z vorhanden; dann muß aber wenn die Aufgabe nicht überhaupt unbestimmt bleiben soll, eine entsprechende Anzahl von Bedingungen in Bezug auf die Beschaffenheit der äußeren Drucke P^x , P^y , P^z ... gegeben seyn.

Aufgaben dieser Art werden sich immer in der Weise lösen lassen, daß man die Functionen u , v , w mittelst unbestimmter Coëfficienten nach den Potenzen von x , y , z geordnet darstellt, indem man

$$u = a'x + b'y + c'z + d'x^2 \dots$$

$$v = a''x \dots$$

$$w = a'''x \dots$$

setzt, aus diesen Gleichungen die Ersten und Zweiten Differentialquotienten bestimmt, dieselben in die Gleichungen (1), (2) und (3) einsetzt und durch die Verbindung der so erhaltenen Gleichungen mit den in der Aufgabe gegebenen Bedingungsgleichungen die noch unbestimmten Größen a' , b' , c' ... vollkommen bestimmt.

Diese Art von Lösung tritt namentlich in der Theorie von der Biegung und Torsion elastischer Platten und Stäbe ein, welche ich in einer bald folgenden zweiten Abhandlung ausführlich behandeln werde.

Dresden, im Juni 1857.