Bei dem rotierenden Sektor wird zum Beispiel mit dieser optischen Methode noch $\frac{1}{100}$ Grad abgelesen, dies entspricht bei einem Teilkreisdurchmesser von 12 cm einem Bogen von ca. 0,02 mm.

Es ist demnach möglich, den Durchmesser des Dynamometers wesentlich zu verringern und dadurch den Verlust durch die Luftreibung der Scheiben, der bei der Wirkungsgradbestimmung an kleinen Maschinen unter Umständen nicht mehr vernachlässigt werden kann, herabzudrücken.

Der Einfluß des Luftwiderstandes auf die Messung des Drehmomentes wird am kleinsten, wenn die Scheiben e und f mit der Teilung und den Nonien auf der Seite der zu messenden Maschine liegen. Die durch das Anbringen des rotierenden Spiegels erhöhte Luftreibung der Scheibe d gibt dann zu Fehlern keinen Anlaß.

Es steht nichts im Wege, zwei um 180° voneinander entfernte Spiegel und Teilungen zu verwenden, um Fehler durch Exzentrizität der Scheiben und des Maßstabes zu eliminieren. Die Spiegel müssen dann mit der Achse einen etwas größeren und einen etwas kleineren Winkel als 45° bilden, damit die Bilder bei der Rotation getrennt mit dem Fernrohr oder mit dem bloßen Auge beobachtet werden können.

Die Eichung des Dynamometers geschieht statisch durch zwei Hebel, die an den äußeren Flanschen a und b angeschraubt werden, und deren entgegengesetzte Enden man mit gleich großen Gewichten belastet.

Man erhält auf diese Weise den Verdrehungswinkel des Dynamometers als Funktion des Drehmomentes. Die Diagramme der so erhaltenen Federmaßstäbe sind praktisch gerade Linien. Ist n die Tourenzahl/min, M das dem Dynamometerausschlag entsprechende Drehmoment in mkg, so ist die vom Dynamometer übertragene Leistung in PS:

$$N = 0,001\,396 \cdot n \cdot M.$$

Zusammenfassung. Die Brodhunsche Vorrichtung zur Ablesung einer umlaufenden Teilung ist vom Verfasser auf solche Dynamometer übertragen, denen das Prinzip der Torsionsmessung während der Drehung zugrunde liegt. Das beschriebene Verfahren eignet sich besonders für die käuflichen Torsionskraftmesser von Gebr. Amsler in Schaffhausen und übertrifft an Genauigkeit die bei diesen Meßgeräten bisher verwendete stroboskopische Ablesevorrichtung.

Numerische Interpolation und Differentiation empirischer Funktionen.

Von

v. Sanden, Göttingen.

1. Der allgemeine Ansatz. Um den funktionellen Zusammenhang zweier Größen y und x, der durch irgendeine physikalische Messungsreihe gewonnen werden soll, festzulegen, macht man vielfach von der graphischen Darstellung Gebrauch, indem man die aus den Messungen gewonnenen zusammengehörigen Werte von x und y auf Millimeterpapier aufträgt. Man erhält damit eine Reihe von Punkten, die man durch eine Kurve zu verbinden sucht, um so die gesuchte Funktion $y = f(x)$ darzustellen.

Sind die bei jeder Messung unvermeidlichen Fehler beträchtlich, so ist es vielfach unmöglich, durch die Punkte selbst eine glatte Kurve hindurchzulegen. Man hilft sich dann in der Weise, daß man eine Kurve einzeichnet, die glatt verläuft, aber nicht durch die Punkte selbst hindurchgeht, sondern nur möglichst nahe an sie herankommt.

Die hierin liegende Unbestimmtheit macht sich besonders störend bemerkbar, wenn es gilt, den Differentialquotienten $f'(x)$ für einen oder mehrere Werte von x zu bestimmen, da eine Tangente an jene Kurve nur sehr ungenau bestimmt ist. Diese Unsicherheit läßt sich eher vermeiden, wenn man das graphische Verfahren durch einen analytischen Prozeß ersetzt. Auch diesem liegt die Idee zugrunde, eine glatt verlaufende Kurve, d. h. Funktion anzugeben, die sich den gemessenen Werten möglichst gut anschließt; nur gestattet die analytische Behandlung, einen präziseren Ansatz hierfür zu formulieren und durchzuführen.

Als Funktion, die zur Approximation der beobachteten Werte dienen soll, wählen wir eine sog. ganze rationale Funktion, die die Form hat:

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Darin sollen die Koeffizienten a_i gewöhnliche Zahlen bedeuten. Wir werden in unseren allgemeinen Betrachtungen einen beliebig hohen Grad n voraussetzen. Bei praktischen Rechnungen wird man indessen gewöhnlich mit dem Werte $n = 2$ oder 3 bereits auskommen können (s. Abschnitt 3).

Je nach der Wahl des „Grades“ n dieser Funktion zeigt sie mehr oder weniger Schwankungen in ihrem Verlaufe. Da ihr Differentialquotient $g'(x)$ nach einem bekannten Satze $(n - 1)$ Nullstellen hat, kann die Funktion $g(x)$ gerade $(n - 1)$ Maxima oder Minima bekommen. Sie ist also hinreichend schmiegsam, um auch einen komplizierteren beobachteten Funktionsverlauf wiederzugeben. Andererseits ist ihre analytische Behandlung, Differentiation und Integration erfreulich einfach.

Mit einer solchen Funktion $g(x)$ wollen wir nun eine irgendwie gegebene empirische Funktion $y = f(x)$ approximieren. Diese wird durch Messungen meistens so bestimmt sein, daß man für eine Reihe äquidistanter Werte von x die zugehörigen Werte y beobachtet hat. Es kann aber auch vorkommen, daß $f(x)$ kontinuierlich, etwa durch ein Registrierinstrument gegeben, vorliegt.

Deshalb wollen wir unsere Ansätze diesem allgemeineren Falle anpassen. Die Spezialisierung auf diskret beobachtete Werte wird sich leicht ergeben.

Wir wollen nun die gegebene Funktion $f(x)$ in der Weise innerhalb eines Intervalles von x_1 bis x_2 durch eine ganze rationale Funktion

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

approximieren, daß das Integral über die Quadrate der Abweichungen beider Funktionen voneinander einen möglichst kleinen Wert bekommt. Es ist dies nicht die einzige Möglichkeit, eine gute Approximation zu definieren; aber dieser Ansatz hat sich besonders gut bewährt und wird in der sog. Methode der kleinsten Quadrate ebenfalls zugrunde gelegt.

Dies Integral

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)\}^2 dx$$

ist, wenn man einen ganz bestimmten Grad n von $g(x)$ voraussetzt, nur eine Funktion der $(n + 1)$ Koeffizienten $a_0 \dots a_n$.

Um M zu einem Minimum zu machen, hat man also die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion M nach den Größen $a_0 \dots a_n$ gleich Null zu setzen.

Dies liefert die Bedingung:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M}{\partial a_\lambda} = \int_{x_1}^{x_2} x^\lambda \cdot \{f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)\} dx = 0$$

für $\lambda = 0, 1, 2 \dots n$.

Das sind aber gerade $(n + 1)$ lineare Gleichungen für die Koeffizienten a_i . Durch Auflösen dieser Gleichungen erhält man also die Koeffizienten einer ganzen rationalen

Funktion $g(x)$, die, für den einmal gewählten Grad n , die beste Approximation darstellt. Je höher man n wählt, eine desto bessere Approximation wird man erreichen. Den Wert, den das Integral M wirklich annimmt, nachdem man die a_λ berechnet hat, kann man als ein Maß für die Güte der Approximation ansehen.

Die so ermittelte Ersatzfunktion $g(x)$ spielt nun genau die Rolle der „glatten Kurve“, die man beim graphischen Verfahren durch die gemessenen Punkte hindurchlegt. Man benutzt sie, um Funktionswerte selbst zu berechnen, ganz besonders aber auch, um den Differentialquotienten zu ermitteln, der ja von $g(x)$ leicht zu bilden ist¹⁾.

2. Die Formeln und ihre Berechnung. Wir wollen die Bestimmung der Koeffizienten a_λ für die Fälle $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$ und $n = 3$ durchführen.

Es ist dazu zweckmäßig, statt x eine neue Variable u durch die Gleichung

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 - x_2}{2} \cdot u$$

einzuführen, bei der die Grenzen des Integrals -1 und $+1$ werden.

Wir schreiben daher im folgenden $y = f(u)$ für die gegebene Funktion und

$$g(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n.$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial M}{\partial a_\lambda} = \int_{-1}^{+1} u^\lambda \cdot \{f(u) - g(u)\} du = 0$$

liefert im Falle $n = 0$ für den einzigen dabei auftretenden Koeffizienten a_0 (also $\lambda = 0$) die Gleichung:

$$\int_{-1}^{+1} f(u) - a_0 du = 0$$

und daraus folgt:

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} f(u) \cdot du \quad \dots \dots \dots 1)$$

d. h. der Mittelwert der Funktion $f(x)$.

Für $n = 1$ hat man es mit a_0 und a_1 zu tun und bekommt für a_0 dieselbe Gleichung wie vorher:

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} f(u) \cdot du$$

und für a_1 die Bedingung:

$$\int_{-1}^{+1} u \cdot \{f(u) - a_0 - a_1 \cdot u\} du = 0, \quad \dots \dots \dots 2)$$

woraus durch Integration folgt:

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} u \cdot f(u) \cdot du$$

¹⁾ Man überzeugt sich leicht, daß der Differentialquotient $g'(x)$ von $g(x)$ auch eine Approximation des Differentialquotienten $f'(x)$ von $f(x)$ darstellt, wenn man für $f(x)$ eine konvergente Potenzreihe ansetzt. Kann man diese, unbeschadet der erforderlichen Genauigkeit, beim m ten Gliede abbrechen, so bedeutet das doch den zulässigen Ersatz von $f(x)$ durch eine ganze rationale Funktion $P(x)$ m ten Grades. Macht man dann den Grad n unserer approximierenden Funktion $g(x)$ gleich m , so führt unser Verfahren gerade auf die „abgebrochene Potenzreihe“ $P(x)$. Die Differentialquotienten von $P(x)$ und $g(x)$ stimmen dann natürlich auch überein. Andererseits weiß man, daß man eine Potenzreihe gliedweise differenzieren darf, um den Differentialquotienten der durch sie dargestellten Funktion zu erhalten.

Für Approximation durch Fourier-Reihen, die man durch denselben Ansatz bekommen kann, gilt dies nicht.

Wir führen weiterhin zur Abkürzung Größen J_μ ein und setzen

$$J_\mu = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} u^\mu \cdot f(u) du \dots \dots \dots 3)$$

Für $n = 2$ erhalten wir durch entsprechende Integrationen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + \frac{a_2}{3} &= J_0 \\ \frac{a_1}{3} &= J_1 \\ \frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} &= J_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 4)$$

und daraus durch Auflösen nach den a_i für die Koeffizienten die Werte:

$$a_0 = \frac{3}{4} \cdot (3 J_0 - 5 J_2)$$

$$a_1 = 3 \cdot J_1$$

$$a_2 = \frac{15}{4} \cdot (3 J_2 - J_0).$$

Für $n = 3$ findet man:

$$a_0 + \frac{a_2}{3} = J_0$$

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{5} = J_1$$

$$\frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} = J_2$$

$$\frac{a_1}{5} + \frac{a_3}{7} = J_3$$

und für die Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{3}{4} \cdot (3 J_0 - 5 J_2) \\ a_1 &= \frac{15}{4} \cdot (5 J_1 - 7 J_3) \\ a_2 &= \frac{15}{4} \cdot (3 J_2 - J_0) \\ a_3 &= \frac{35}{4} \cdot (5 J_3 - 3 J_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 5)$$

wobei wieder die Werte $J_0, J_1 \dots$ durch 3) definiert sind.

Die Auswertung der Integrale J_μ erfolgt zweckmäßig nach der Simpsonschen Regel. Hierzu ist es notwendig, daß die Funktionswerte von $f(x)$ für äquidistante Werte von x gegeben sind. Man bedient sich dann mit Vorteil folgender Tabelle.

Eine erste Kolonne enthält die Werte von x , laufend von x_1 bis x_2 , für die $f(x)$ beobachtet ist. Die Anzahl dieser Werte muß ungerade sein, um die Simpson-Regel gebrauchen zu können, und hinreichend groß, um eine gute Approximation des Integrals durch die Simpson-Regel sicher zu stellen. In eine zweite Kolonne schreibt man die Werte der neu eingeführten Variablen u , die zwischen -1 und $+1$ läuft. Durch die Verteilung der äquidistanten u -Werte auf die x -Werte erledigt sich die Substitution

x	u	f(u)	u · f(u)	u ² · f(u)	u ³ · f(u)
x ₁	— I	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	0	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x ₂	+ I	.	.	.	.
		J ₀	J ₁	J ₂	J ₃

der neuen Variablen u von selbst! Die dritte Kolonne nimmt die gemessenen Funktionswerte $f(u)$ (oder $f(x)$) auf. Die folgenden Kolonnen entstehen nacheinander durch Multiplikation der vorhergehenden Kolonne mit u . Darauf erfolgt die Addition jeder Kolonne nach der Simpsonschen Regel¹⁾.

Mit den so berechneten Integralen kann man die Koeffizienten a_k bilden und damit die approximierende ganze rationale Funktion aufbauen.

Der Fall $n = 2$ ist besonders bequem für die Bestimmung des Differentialquotienten in der Mitte des Intervalls x_1 bis x_2 ²⁾.

Hier ist nämlich $u = 0$, und $\frac{dg(u)}{du} = a_1 + 2 a_2 u + \dots$ wird daher einfach gleich $a_1 = 3 J_1$.

Dazu ist also nur eine Integration erforderlich. (Im Schema ist die zwischen den fettgedruckten Strichen liegende Kolonne zu addieren!)

Es erscheint vielleicht paradox, eine Differentiation durch eine Integration zu ersetzen; aber jeder Praktiker im numerischen Rechnen weiß, daß sich numerisch eben genauer integrieren als differenzieren läßt.

3. Beispiel: Für $x = 1, 2 \dots 8, 9$ sind folgende Werte von y beobachtet: 16; 66; 142; 257; 401; 575; 801; 1050; 1319.

Die letzte Stelle ist dabei um mehrere Einheiten unsicher.

Es soll der Differentialquotient für $x = 5$ bestimmt werden!

Wir wählen zur besseren Übersicht über die Genauigkeit des Verfahrens einmal $n = 2$ und darauf $n = 3$ und bilden gleich das vollständige Schema. (Für $n = 2$ würde dasselbe nur bis zum Doppelstrich reichen!)

x	u	f(u)	u · f(u)	u ² · f(u)	u ³ · f(u)
1	— I	16	— 16,0	16,0	— 16,0
2	— 3/4	66	— 49,5	37,1	— 27,8
3	— 1/2	142	— 71,0	35,5	— 17,8
4	— 1/4	257	— 64,2	16,0	— 4,0
5	0	401	0,0	0,0	0,0
6	1/4	575	143,8	36,0	9,0
7	1/2	801	400,5	200,2	100,1
8	3/4	1050	789,0	592,0	444,0
9	+ I	1319	1319,0	1319,0	1319,0
		J ₀ = 492,3	J ₁ = 218,3	J ₂ = 188,8	J ₃ = 131,4

¹⁾ Man kann dabei auch so vorgehen: Man trägt in die 3. Kolonne statt $f(u)$ der Reihe von oben nach unten nach $f(u)$; $4 f(u)$; $2 f(u)$; $4 f(u)$... $4 f(u)$, $f(u)$ ein und bildet dann die folgenden Kolonnen durch Multiplikation mit u . Dann hat man nur in den Kolonnen zu addieren, um die J_μ zu bekommen.

²⁾ Will man den Differentialquotienten nur an einer Stelle, so wird man die Messungen so anordnen, daß diese Stelle mitten in den Meßbereich fällt.

$n = 2$	$n = 3$
$a_0 = 400$	$a_0 = 400$ (Für die eigentliche
$a_1 = 655$	$a_1 = 644$ Aufgabe ist nur a_1
$a_2 = 278$	$a_2 = 278$ erforderlich!)
	$a_3 = 18,4$
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=5} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{dy}{du}\right)_{u=0} = \frac{a_1}{4} = 164$	$\frac{a_1}{4} = 161$

Der Unterschied, ob man nach den Formeln für $n = 2$ oder $n = 3$ rechnet, beträgt in diesem Falle noch nicht 2%.

Man erkennt auch aus dem relativ kleinen Werte $a_3 = 18,4$, daß in diesem Falle eine Approximation durch eine ganze rationale Funktion zweiten Grades ausreichend ist.

Berechnet man den Wert M des Integrales (S. 53), so findet man in der Tat für $n = 2$ $M = 317$, für $n = 3$ $M = 215$, also keinen wesentlichen Erfolg durch $n = 3$.

Es wird sich auch im allgemeinen empfehlen, bei der Differentiation nach der Formel für $n = 2$ zu rechnen, d. h. durch eine Parabel zweiten Grades zu approximieren und das Intervall x_1 bis x_2 mit Rücksicht auf den beobachteten Funktionsverlauf so zu begrenzen, daß eine Approximation dieses Funktionsstückes durch eine Parabel mit vertikaler Achse plausibel erscheint, ev. vertauscht man die abhängige mit der unabhängigen Variablen, wenn eine Approximation durch eine Parabel mit horizontaler Achse zweckmäßiger erscheint.

Die Rechnung erfordert wenig Mühe und liefert eine befriedigendere Ausnutzung der Messungsergebnisse als die rein zeichnerische Behandlung.

Über die Darstellung der Vorgänge bei Kabeln durch Raumkurven¹⁾.

Von

Manne Siegbahn.

1. Übersicht und Ziel. Die theoretische Behandlung der Fernleitung von Wechselströmen bei Kabeln und Freileitungen ist im Falle stationären Zustandes als klarlegt anzusehen. Die Lösungen lassen sich in analytischer Form durch Verwendung komplexer Größen leicht anschreiben, die dann auch geometrisch gedeutet werden können. Sehr elegant wird die Darstellung, wenn man die Lösung durch ein Spiralendiagramm gibt. Die Spannung bzw. Stromstärke läßt sich unter Umgehung ziemlich langwieriger numerischer Rechnungen dann in verschiedenen Punkten des Kabels rein graphisch finden. Bei einer anderen Art der Darstellung werden am besten die Amplitudenwerte oder ihre Quadrate längs des Kabels graphisch aufgetragen. Hierbei geht aber eine andere Größe, die Phasenverschiebung, verloren oder erfordert eine besondere Kurve.

Um sich aber ein greifbares Bild aller der wichtigsten Wechselstromgrößen zu beschaffen, scheint mir das weiter unten beschriebene Verfahren zweckmäßig zu sein. Es stellt eine Zusammenfassung der zwei obengenannten Methoden dar, und zwar so, daß der elektrische Zustand längs des Kabels durch eine um den Kabel gewickelte Raumkurve dargestellt wird, deren Projektion senkrecht zum Kabel das Spiralendiagramm ist, und

¹⁾ Die in dieser Arbeit beschriebenen und abgebildeten Modellkurven erscheinen im Verlage von Martin Schilling, Leipzig.