Les transformations de contact entre les éléments fondamentaux de l'espace.

(Par E.-O. LOVETT, à Princeton, New Jersey, États-Unis d'Amérique.)

Le rôle capitale des notions de transformation et groupe dans la géométrie moderne mis en évidence par l'ouvrage de SOPHUS LIE et les Mémoires de MM. BIANCHI, KLEIN, POINCARÉ, et autres, est l'inspiration de ce travail qui s'occupe avec les transformations de contact entre les éléments les plus essentiels de l'espace, savoir multiplicités singulières, sphères, surfaces développables ou applicables, lignes asymptotiques et lignes de courbure, et qui, en ce qui concerne la géométrie de l'espace à plusieurs dimensions, se base sur un Mémoire récent, *Journal de M. Jordan*, 1901, où on trouve une application de la théorie de groupes finis à la construction des éléments de la géométrie euclidienne ordinaire et différentielle de l'espace à n dimensions, et une application de la théorie de groupes infinis à la théorie de la déformation de variétés euclidiennes et non-euclidiennes.

DÉFINITIONS ET MÉTHODES DE DÉTERMINATION DES TRANSFORMATIONS DE CONTACT DE L'ESPACE À $n + 1$ DIMENSIONS.

Un élément de surface est l'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point; il a pour coordonnées les coordonnées cartésiennes (z , x_1 , $x_2, \dots, x_n$) du point et les coefficients de direction p_1 , $p_2, \dots, p_n$ du plan

$$Z - z = \sum_1^n p_i (X_i - x_i). \quad (1)$$

Une multiplicité d'éléments est définie par un système d'équations, entre les coordonnées $z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ de l'un quelconque de ses éléments, satisfaisant à l'équation de PFAFF

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0. \quad (2)$$

Si ce système se compose de $n + 1$ équations distinctes, il définit une multiplicité M_n d'éléments.

LIE dit encore que l'équation de PFAFF (2) exprime que l'élément $(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ et l'élément infiniment voisin $(z + dz, x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n)$ sont unis. Une multiplicité est alors une famille d'éléments dans laquelle chaque élément est uni à tout élément infiniment voisin de la famille.

On dit que la transformation

$$\left. \begin{aligned} z' &= Z(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \\ x'_i &= X_i(z, x, p), \\ p'_i &= P_i(z, x, p), \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

est une transformation de contact de l'espace à $n + 1$ dimensions $(z, x_1, x_2, \dots, x_n)$ si elle laisse invariante l'équation de PFAFF (2).

Il résulte immédiatement de là que ces transformations forment un groupe et sont deux à deux inverses l'une de l'autre.

La définition des transformations de contact est susceptible de prendre une forme géométrique si l'on emploie les notions de multiplicités d'éléments et d'éléments unis. On peut définir une transformation de contact comme une transformation d'éléments qui change toujours des éléments unis en éléments unis, c'est-à-dire qui transforme des multiplicités M_n en multiplicités M_n , et LIE a montré que les transformations de contact sont les seules transformations en z, x, p qui changent tout système de $n + 1$ équations, satisfaisant à l'équation de PFAFF (2), en un système jouissant la même propriété.

On peut faire la détermination des formes explicites des équations définissantes d'une transformation de contact des manières suivantes :

1.^o Au moyen de l'opération d'intégration en employant le théorème de LIE, DARBOUX et MAYER. Pour que les équations (3) définissent une transformation de contact il faut et il suffit que l'on ait une identité de la forme

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = \frac{1}{\rho} (dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n). \quad (4)$$

LIE, DARBOUX et MAYER en déduisent qu'il faut et il suffit que les fonctions $Z, X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n$ soient liées par des relations identiques de la forme

$$\left. \begin{aligned} (Z, X_i) &= (X_i, X_k) = (P_i, X_k) = 0, & (i \neq k) \\ (P_i, X_i) &= \rho, & (P_i, Z) = \rho P_i. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2.° Au moyen des opérations de différentiation et élimination en employant le théorème de LIE qui dit en effet qu'on obtient toutes les transformations de contact en $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ en éliminant les indéterminées λ entre des équations de la forme

$$\Omega_1(z, x_1, \dots, x_n, z', x'_1, \dots, x'_n), \quad \Omega_2(z, x, z', x') = 0, \dots,$$

$$\Omega_q(z, x, z', x') = 0$$

$$p_i = - \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \dots + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial z}},$$

$$p'_i = - \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z'} + \dots + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial z'}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pour les définitions et théorèmes précédents on peut consulter

GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, tome II.

LIE-SCHEFFERS, *Geometrie der Berührungstransformationen*, tome I.

LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT ENTRE LES MULTIPLICITÉS SINGULIÈRES.

Entre les multiplicités des éléments de surface ils existent quelques unes qui ont la propriété que tous ses éléments sont deux à deux des éléments unis. Il est peut-être permisible de nommer telles multiplicités des éléments multiplicités singulières. On trouve trois types de ces multiplicités singulières: la famille de tous les éléments de surface d'un point, l'agrégat de tous

les éléments de surface d'une ligne droite, et l'ensemble de tous les éléments de surface d'un plan. Le problème de déterminer toutes les transformations de contact qui changent les multiplicités singulières en multiplicités singulières demande qu'on détermine les catégories suivantes de transformations de contact: 1.° les transformations des points en points; 2.° les transformations qui changent les points en points et les plans en plans; 3.° les transformations qui changent les points en plans et les plans en points; 4.° les transformations des droites en droites; 5.° les transformations entre les plans.

On sait bien que la première catégorie se compose du groupe infini de toutes les transformations ponctuelles prolongées; ils sont définies par $n + 1$ équations directrices entre les coordonnées ponctuelles des espaces correspondants. La deuxième catégorie consiste en le groupe fini des transformations projectives; ces transformations sont déterminées au moyen de $n + 1$ équations directrices bilinéaires; on établira ces résultats connus dans la suite s'en servant d'une méthode déjà employée dans le plan (LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*). La troisième catégorie se construit de toutes les transformations dualistiques; ces transformations-ci connues se déterminent d'une équation directrice bilinéaire. La quatrième catégorie se compose des transformations des deuxième et troisième catégories, savoir des transformations projectives et dualistiques; ce résultat connu se révèle immédiatement de notre définition de multiplicité singulière. On dérive la forme et quelques propriétés de la cinquième catégorie dans les pages suivantes.

LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT

QUI CHANGENT LES POINTS EN POINTS ET LES PLANS EN PLANS.

Employons nous, pour la resolution de ce problème la méthode des transformations infinitésimales. Soit

$$Uf \equiv \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1)$$

la transformation infinitésimale, où les fonctions ξ_i et ζ sont des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ qui doivent être déterminées de façon telle que la transformation soit une plan-en-plan transformation; la condition nécessaire et suffisante pour cette détermination est que les équations aux dérivées ar-

tielles

$$p_{ij} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

ne changent pas sous la transformation.

Les variations des x_j sous la transformation infinitésimale ponctuelle Uf sont

$$\delta x_j = \xi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \delta t, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

où δt est une infinitésimale arbitraire.

Pour déterminer les variations de p_i et p_{ij} il est nécessaire à construire le second prolongement

$$U''f = Uf + \sum_1^n \pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \sum_1^n \sum_j \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_{ij}} \quad (4)$$

de la transformation Uf . On fait cette construction de la manière suivante : — En variant l'identité

$$dz - \sum_1^n p_i dx_i = 0 \quad (5)$$

on a

$$d \delta z = \sum_1^n (dx_i \delta p_i + p_i d \delta x_i); \quad (6)$$

en substituant les valeurs (3) des variations δx_i et en observant que l'équation (6) doit exister identiquement pour toutes les valeurs des dx_i on trouve les n équations suivantes pour la détermination des variations δp_i :

$$\zeta_{x_i} + p_i \zeta_z = \delta p_i + \sum_1^n p_j (\xi_{j x_i} + p_i \xi_{j z}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

ou

$$\pi_i \equiv \delta p_i = \zeta_{x_i} + p_i \zeta_z - \sum_1^n p_j (\xi_{j x_i} + p_i \xi_{j z}). \quad (8)$$

De la même façon on varie les identités

$$dp_j = \sum_1^n p_{ij} dx_i \quad (9)$$

et trouve les valeurs suivantes pour les variations des p_{ij}

$$\pi_{ij} \equiv \delta p_{ij} = \tau_{ix_j} + p_j \pi_{ix} + \sum_1^n p_{ij} \pi_{ip_j} - \sum_1^n p_{i_j} (\xi_{j x_j} + p_i \xi_{j z}). \quad (10)$$

Pour que la famille de tous les ∞^{n+1} plans de l'espace soit invariante

sous la transformation Uf il faut que les équations

$$\pi_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

aient lieu en conséquence des équations (2); donc on a les équations de condition suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{x, x_j} &= 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \\ \xi_{i, z} &= 0, \quad \xi_{i, x_j x_j} = 0, \quad \xi_{i, x_j z} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq i; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \zeta_{z x_i} - \xi_{i, x_i x_j} &= 0, \quad \zeta_{z z} - 2 \xi_{i, x_i z} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ \zeta_{z x_i} - \xi_{j, x_i x_j} &= 0, \quad \zeta_{z z} - \xi_{i, x_i z} - \xi_{j, x_j z} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Les équations (12) demandent que la fonction ξ_i soit linéaire dans toutes les x_j avec exception de x_i , contenant aucune produit de la forme $x_j z$, où $j \neq i$. D'ailleurs les mêmes équations disent que la fonction φ est une fonction linéaire des quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$ sans termes de la forme $x_i x_j$. Donc on a

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \sum_1^n \varphi_j(x_i) x_j + \psi(x_i) z + \chi(x_i), \quad j \neq i; \\ \zeta &= \sum_1^n \rho_j(z) x_j + \sigma(z), \quad j = 1, 2, \dots, i, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

On voit aussi que l'équation

$$\rho_j = \alpha_j + \beta_j \quad (15)$$

doit avoir lieu en conséquence de l'équation

$$\zeta_{x_j z z} = 0; \quad (16)$$

et encore les équations (13) montrent que

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j(x_i) &\equiv \alpha_i x_i + \gamma_i, & \psi(x_i) &\equiv A x_i + B, \\ \chi(x_i) &\equiv \alpha_i x_i^2 + \delta_i x_i + \theta_i, & \sigma(z) &\equiv A z^2 + C z + D; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

donc en changeant commodément les constantes et en écrivant

$$V \equiv \sum_1^n a_i x_i + b_i, \quad (18)$$

on a enfin

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \sum_1^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i z + x_i V + \gamma_i, \\ \zeta &= \sum_1^n \lambda_j x_j + \mu z + z V + \nu. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

D'après un théorème bien connu de LIE les transformations finies engendrées par la transformation ponctuelle infinitésimale (1) sont données par l'intégration du système

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz'}{\zeta(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z')} &= \frac{dx'_1}{\xi_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z')} = \dots \\ \dots &= \frac{dx'_n}{\xi_n(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z')} = dt, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

avec les conditions initiales

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \dots, \quad x'_n = x_n, \quad z' = z, \quad t = 0;$$

ce qui donne

$$x'_1 = \frac{L_1}{N}, \quad x'_2 = \frac{L_2}{N}, \dots, \quad x'_n = \frac{L_n}{N}, \quad z' = \frac{M}{N},$$

où les fonctions $L_1, L_2, \dots, L_n, M, N$, sont de la forme

$$\sum_1^n l_j x_j + m z + n;$$

les l_j, m, n étant des constantes quelconques.

LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT QUI CHANGENT LES PLANS EN PLANS; LES TRANSFORMATIONS ENTRE SURFACES DÉVELOPPABLES.

Il est clair qu'on obtient la transformation de contact la plus générale entre tous les plans de l'espace à $n+1$ dimensions en formant tous les produits

$$D P D \quad (1)$$

où D est la transformation dualistique générale et P est une transformation ponctuelle tout-à-fait arbitraire.

Pour écrire la forme analytique des transformations on peut prendre pour la transformation dualistique D sans perte de généralité la transformation généralisée de LEGENDRE

$$X_i = p_i, \quad Z = \zeta = \sum_1^n p_i x_i - z, \quad P_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

De la transformation ponctuelle arbitraire P

$$X'_i = \varphi_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z'), \quad Z' = \varphi_0(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z') \quad (3)$$

on déduit

$$dX'_i = \sum_1^n (\varphi_{iz'} p'_j + \varphi_{ix'_j}) dx'_j, \quad dZ' = \sum_1^n (\varphi_{0z'} p'_j + \varphi_{0x'_j}) dx'_j; \quad (4)$$

donc

$$\sum_1^n P'_i dX'_i = \sum_1^n (\varphi_{0z'} p'_i + \varphi_{0x'_i}) dx'_i = \sum_1^n P'_i \sum_1^n (\varphi_{iz'} p'_j + \varphi_{ix'_j}) dx'_j, \quad (5)$$

et encore

$$\sum_1^n P'_i (\varphi_{iz'} p'_j + \varphi_{ix'_j}) = \varphi_{0z'} p'_j + \varphi_{0x'_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

La résolution de ce système des équations linéaires pour les quantités P'_i donne

$$\left. \begin{aligned} P'_i | \varphi_{1z'} p'_{1x'_1} + \varphi_{1x'_1}, \quad \varphi_{2z'} p'_2 + \varphi_{2x'_2}, \dots, \quad \varphi_{nz'} p'_n + \varphi_{nx'_n} | = \\ | \varphi_{1z'} p'_1 + \varphi_{1x'_1}, \quad \varphi_{2z'} p'_2 + \varphi_{2x'_2}, \dots, \quad \varphi_{i-1z'} p'_{i-1} + \varphi_{i-1x'_{i-1}}, \\ \varphi_{0z'} p'_i + \varphi_{0x'_i}, \quad \varphi_{i+1z'} p'_{i+1} + \varphi_{i+1x'_{i+1}}, \dots, \quad \varphi_{nz'} p'_n + \varphi_{nx'_n} |. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Enfin en appliquant la transformation de LEGENDRE aux variables originaux et aux variables transformés, et en écrivant

$$M_i \equiv (H_1, H_2, \dots, H_n)_i, \dots, \quad M_{n+1} \equiv (H_1, H_2, \dots, H_n)_{n+1} \quad (8)$$

pour les mineurs de $m_1, m_2, \dots, m_{n+1}$ du déterminant

$$\left| \frac{\partial H_1}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial H_2}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial p_2}, \dots, \quad \frac{\partial H_n}{\partial p_{n-1}}, \quad m_{n+1} \right| \quad (9)$$

nous trouvons pour les équations explicites des plan-en-plan transformations de contact

$$\left. \begin{aligned} X_i \sum_0^n x_j (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)_{j+1} = \\ = \sum_0^n x_j (\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \dots, \varphi_n, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})_{j+1}, \\ x_0 = 1; \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ Z = \sum_1^n X_i \varphi_i(\zeta, p_1, p_2, \dots, p_n) - \varphi_0(\zeta, p_1, p_2, \dots, p_n); \\ P_i = \varphi_i(\zeta, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad \zeta = \sum_1^n p_i x'_i - z, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

où les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont des fonctions arbitraires.

On observe en passant que les fonctions P_i satisfont aux équations aux dérivées partielles

$$P_{ix_j} + p_j P_{ix} \equiv P_{(ij)} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad (11)$$

on peut vérifier ce fait soit directement par différentiation ou par la considération suivante.

Les équations aux dérivées partielles du second ordre

$$p_{ij} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

sont des invariants sous les transformations de contact entre les plans.

En posant

$$F^{(i)} = F_{x_i} + p_i F_x + \sum_1^n p_{ij} F_{p_j}, \quad (13)$$

en vertu des identités

$$dZ = \sum_1^n P_i dX_i, \quad dP_i = \sum_1^n P_{ij} dX_j, \quad (14)$$

on a

$$P_j^{(i)} = \sum k P_{jk} x_k^{(i)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad (15)$$

la résolution de ce système des équations linéaires pour P_{jk} donne

$$P_{ij} = \frac{\Phi(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, P_j, X_{i+1}, \dots, X_n)}{\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)} = \frac{\Phi(X_1, X_2, \dots, X_{j-1}, P_i, X_{j+1}, \dots, X_n)}{\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)}, \quad (16)$$

où

$$\Phi(T_1, T_2, \dots, T_n) \equiv |T_1^{(1)}, T_2^{(2)}, \dots, T_n^{(n)}|. \quad (17)$$

Donc pour l'invariance de la famille de tous les plans de l'espace il faut que

$$\left. \begin{aligned} \Phi(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n) &\equiv 0, \\ \Phi(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, P_j, X_{i+1}, \dots, X_n) &= 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ \Phi(X_1, X_2, \dots, X_{j-1}, P_i, X_{j+1}, \dots, X_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

soient vraies pour toutes les valeurs de $p_1, p_2, \dots, p_n$; donc on a

$$\Delta \equiv |X_{(11)}, X_{(22)}, \dots, X_{(nn)}| \equiv 0, \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} |X_{(11)}, X_{(22)}, \dots, X_{(i-1, i-1)}, P_{(jj)}, X_{(i+1, i+1)}, \dots, X_{(nn)}| &= 0, \\ |X_{(11)}, X_{(22)}, \dots, X_{(j-1, j-1)}, P_{(ii)}, X_{(j+1, j+1)}, \dots, X_{(nn)}| &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

en observant que les équations (20) sont des n systèmes des équations linéaires dont les déterminants sont le déterminant réciproque de Δ , on a

$$P_{(i1)} = 0, \quad P_{(i2)} = 0, \dots, \quad P_{(in)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

D'ailleurs l'application de la méthode de M. MAYER à ces systèmes complets donne

$$P_i = \varphi_i(\zeta, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

où les fonctions φ_i sont des fonctions quelconques.

Enfin on a en même temps la résolution d'un problème plus générale. En effet l'équation

$$|p_{11}, p_{22}, \dots, p_{nn}| = 0 \quad (23)$$

doit être invariante sous les transformations entre les surfaces développables de l'espace à $n + 1$ dimensions. Il est facile de vérifier que les conditions nécessaires et suffisantes sont exprimées par les équations (21); donc la famille de transformations de contact qui transforment une surface développable quelconque en une surface développable est identique à la famille de toutes les transformations de contact entre les plans.

LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT ENTRE LES LIGNES DROITES ET LES SPHÈRES.

Une des plus belles découvertes de la Géométrie moderne est la transformation de contact connue sous le nom de transformation de LIE qui établit une liaison entre les droites et les sphères. Proposons-nous de trouver toutes les transformations de l'espace ordinaire qui changent les lignes droites en sphères. Dans le cas de trois variables x, y, z il y aura trois classes de transformation de contact suivant qu'on établit un, deux ou trois relations entre x, y, z, X, Y, Z . Nous sommes donc conduits à déterminer les formes d'un, deux ou trois équations directrices qui sont capables de représenter droite-en-sphère transformations de contact.

Supposons qu'on parte d'une seule relation entre x, y, z, X, Y, Z

$$\Phi(x, y, z, X, Y, Z) = 0. \quad (1)$$

La droite

$$x = az + b, \quad y = cz + d \quad (2)$$

sera transformée dans la surface donnée par l'équation

$$\Phi(X, Y, Z, a, b, c, d) = 0 \quad (3)$$

que l'on obtient en éliminant z au moyen des équations

$$\Phi(az + b, cz + d, z, X, Y, Z) = 0, \quad \Phi_z = 0. \quad (4)$$

Pour que la transformation soit unique, il est clair que le degré de la fonction Φ par rapport au variable z doit être égal deux au plus; c'est-à-dire, la fonction Φ doit être de la forme

$$\Phi_1 x^2 + \Phi_2 y^2 + \Phi_3 z^2 + \Phi_4 yz + \Phi_5 zx + \Phi_6 xy + \Phi_7 x + \Phi_8 y + \Phi_9 z + \Phi_{10} = 0, \quad (5)$$

où les Φ_i sont des fonctions des variables X, Y, Z . Ainsi, en posant

$$P = a^2 \Phi_1 + c^2 \Phi_2 + \Phi_3 + c \Phi_4 + a \Phi_5 + a c \Phi_6, \quad (6)$$

$$Q = 2 a b \Phi_1 + 2 c d \Phi_2 + d \Phi_4 + b \Phi_5 + (a d + b c) \Phi_6 + a \Phi_7 + c \Phi_8 + \Phi_9, \quad (7)$$

$$R = b^2 \Phi_1 + d^2 \Phi_2 + b d \Phi_6 + b \Phi_7 + d \Phi_8 + \Phi_{10}, \quad (8)$$

la transformée de la droite (2) est la surface

$$Q^2 - 4 P R = 0, \quad (9)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} & d^2 \Phi_1^2 + b \Phi_2^2 + (a d - b c)^2 \Phi_6^2 + a^2 \Phi_7^2 + c^2 \Phi_8^2 + \Phi_9^2 \\ & - 4 \Phi_1 \{ (a d - b c)^2 \Phi_2 + b^2 \Phi_3 - b (a d - b c) \Phi_4 \\ & \quad + a (a d - b c) \Phi_8 - a d \Phi_9 + a^2 \Phi_{10} \} \\ & - 4 \Phi_2 \{ d^2 \Phi_3 + d (a d - b c) \Phi_5 - c (a d - b c) \Phi_7 - c d \Phi_8 + c^2 \Phi_{10} \} \\ & - 4 \Phi_3 \{ b d \Phi_6 + b \Phi_7 + d \Phi_8 + \Phi_{10} \} \\ & + 2 \Phi_4 \{ b d \Phi_5 + d (a d - b c) \Phi_6 + (a d - 2 b c) \Phi_7 \\ & \quad - c d \Phi_8 + d \Phi_9 - c \Phi_{10} \} \\ & - 2 \Phi_5 \{ b (a d - b c) \Phi_6 + a b \Phi_7 + (2 a d - b c) \Phi_8 - b \Phi_9 + 2 a \Phi_{10} \} \\ & - 2 \Phi_6 \{ a (a d - b c) \Phi_7 + c (a d - b c) \Phi_8 + (a d + b c) \Phi_9 - 2 a c \Phi_{10} \} \\ & + 2 \Phi_7 \{ a c \Phi_8 + a \Phi_9 \} + 2 c \Phi_8 \Phi_9 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Pour que cette surface soit une quadrique pour toutes les valeurs de a, b, c, d il faut que les fonctions Φ_i aient la forme

$$\Phi_i = l_i X + m_i Y + n_i Z + \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (11)$$

où les l_i, m_i, n_i, μ_i sont des constantes.

Si l'on veut que cette quadrique soit une sphère pour toutes les valeurs, de a, b, c, d , il est nécessaire que les fonctions

$$\Phi_4, \Phi_5, \Phi_6, \Phi_7, \Phi_8, \Phi_9 \quad (12)$$

se réduisent à des constantes absolues. Donc en introduisant les hypothèses suivantes qui n'imposent aucune restriction

$$\Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = \Phi_7 = \Phi_8 = \Phi_9 = 0, \quad (13)$$

l'équation de la quadrique devient

$$(ad-bc)^2 \Phi_1 \Phi_2 + d^2 \Phi_2 \Phi_3 + b^2 \Phi_3 \Phi_1 + a^2 \Phi_1 \Phi_{10} + c^2 \Phi_2 \Phi_{10} + \Phi_3 \Phi_{10} = 0. \quad (14)$$

Pour que cette surface-ci soit une sphère il faut et il suffit qu'on ait les relations suivantes

$$Sl_1 l_2 = Sl_2 l_3 = Sl_3 l_1 = Sl_1 l_{10} = Sl_2 l_{10} = Sl_3 l_{10}, \quad (15)$$

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = l_1 m_3 - l_3 m_1 = \dots = l_1 n_2 - l_2 n_1 = \dots = m_1 n_{10} - m_{10} n_1 = 0. \quad (16)$$

Les équations (16) sont équivalentes aux relations

$$l_1 : l_2 : l_3 : l_{10} = m_1 : m_2 : m_3 : m_{10} = n_1 : n_2 : n_3 : n_{10}; \quad (17)$$

par conséquent

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \quad \Psi_i = k_i \Psi_1, \quad i = 2, 3, \dots, 10, \\ \Psi_j &= \Phi_j - \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, 10, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

et, en vertu des équations (15), on a

$$k_2 = k_3 = k_{10} = 1; \quad (19)$$

c'est-à-dire

$$\Phi_i = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (20)$$

Ainsi, la forme de l'équation directrice devient

$$\Phi = (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(x^2 + y^2 + z^2 + 1) + \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3 z^2 + \mu_4 = 0. \quad (21)$$

Il faudra adjoindre à cette équation pour déterminer X, Y, Z, P, Q les équations suivantes

$$\Phi_x + p \Phi_z = 0, \quad \Phi_4 + q \Phi_z = 0, \quad \Phi_x + P \Phi_z = 0, \quad \Phi_4 + Q \Phi_z = 0; \quad (22)$$

donc on trouve la forme explicite de la droite-en-sphère transformation de contact au moyen de la résolution par rapport aux X, Y, Z, P, Q du

système :

$$\left. \begin{aligned} (x + p z)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + \mu_1 x + \mu_3 p &= 0, \\ (y + q z)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + \mu_2 y + \mu_3 q &= 0, \\ (x^2 + y^2 + z^2 + 1)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3 z^2 + \mu_4 &= 0, \\ \gamma P + \alpha &= 0, \quad \gamma Q + \beta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Mais il n'est pas possible de résoudre ce système-ci par rapport aux X , Y , Z et ainsi, la fonction Φ (21) n'est pas capable de définir une transformation de contact. On conclut de là qu'il n'y a point de transformations de contact univoques déterminées par une équation directrice, qui changent les lignes droites en sphères.

On remarque, en passant, que toutes les ∞^∞ transformations de contact définies par une équation directrice de la forme

$$x \rho_1(X, Y, Z) + y \rho_2(X, Y, Z) + z \rho_3(X, Y, Z) + \rho_4(X, Y, Z) = 0, \quad (24)$$

transforment les lignes droites en des lignes courbes; que toutes les ∞^∞ transformations définies par une équation de la forme

$$\sigma_1(x, y, z) X + \sigma_2(x, y, z) Y + \sigma_3(x, y, z) Z + \sigma_4(x, y, z) = 0 \quad (25)$$

changent les lignes droites en des surfaces développables; et enfin, que les seules transformations de contact définies par une équation qui transforment les lignes droites en des lignes droites sont les ∞^{15} transformations déterminées par l'équation bilinéaire

$$(l_1 X + m_1 Y + n_1 Z + \mu_1) x + \dots = 0. \quad (26)$$

Les transformations (25) sont équivalentes aux transformations ponctuelles arbitraires

$$x_1 = \sigma_1(x, y, z) / \sigma_4(x, y, z), \dots, z_1 = \sigma_3(x, y, z) / \sigma_4(x, y, z) \quad (27)$$

suivies de la transformation par polaires réciproques par rapport à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0 \quad (28)$$

déterminée par l'équation directrice

$$X x_1 + Y y_1 + Z z_1 - 1 = 0. \quad (29)$$

Dans le cas des transformations (26) les transformations (27) sont des transformations homographiques.

Supposons maintenant qu'il existe deux relations indépendantes entre x, y, z, X, Y, Z :

$$\Omega_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0. \quad (30)$$

La transformation la plus générale déterminée par ces deux équations directrices changeant la ligne droite

$$y + kx + m = 0, \quad z + lx + n = 0, \quad (31)$$

en la surface donnée par l'équation

$$\Omega(X, Y, Z, k, l, m, n) = 0, \quad (32)$$

que l'on obtient en éliminant x, y, z au moyen des quatre équations (30) et (31).

Pour que la ligne droite soit transformée dans une surface unique il faut que l'une des équations (30) soit linéaire par rapport aux variables x, y, z ; pour que la transformée soit une quadrique il est nécessaire que l'autre équation soit linéaire dans x, y, z et que les deux équations soient linéaires par rapport aux variables X, Y, Z .

Considérons donc les ∞^3 transformations qui sont déterminées par deux équations bilinéaires

$$x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \varphi_4 = 0, \quad x\varphi_5 + y\varphi_6 + z\varphi_7 + \varphi_8 = 0, \quad (33)$$

où

$$\varphi_i \equiv a_i X + b_i Y + c_i Z + d_i. \quad (34)$$

La transformée de la ligne droite (31) sera la surface du second degré

$$\left. \begin{aligned} & \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_6 & \varphi_7 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_4 \\ \varphi_6 & \varphi_8 \end{vmatrix} - l \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_7 & \varphi_8 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_5 & \varphi_6 \end{vmatrix} - \\ & - n \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_5 & \varphi_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_5 & \varphi_8 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Cette quadrique peut se réduire à une sphère pour toutes les valeurs de k, l, m, n dans les deux cas suivants :

1.^o Quand tous les six déterminants de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_5 & \psi_6 & \psi_7 & \psi_8 \end{array} \right\| \quad \psi_i \equiv \varphi_i - d_i, \quad (36)$$

se réduisent à la forme

$$\text{Const.} (X^2 + Y^2 + Z^2); \quad (37)$$

2.^o Quand un déterminant quelconque de la matrice se réduit à la forme (37) et les fonctions φ_i correspondant aux fonctions ψ_i restant dans la matrice se réduisent à des constantes: par exemple, soient les fonctions $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_6, \varphi_7$ constantes et le déterminant $\varphi_1 \psi_8 - \varphi_4 \psi_5$ de la forme (37).

Dans le premier cas nous avons deux familles de ∞^{15} droite-en-sphère transformations de contact.

En effet les équations

$$\left. \begin{aligned} a_i a_\sigma - a_\rho a_j &= b_i b_\sigma - b_\rho b_j = c_i c_\sigma - c_\rho c_j = 0, \\ a_i b_\sigma + b_i a_\sigma - a_\rho b_j - b_\rho a_j &= 0, \\ b_i c_\sigma + c_i b_\sigma - b_\rho c_j - c_\rho b_j &= 0, \\ c_i a_\sigma + a_i c_\sigma - c_\rho a_j - a_\rho c_j &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

qui sont nécessaires et suffisantes pour que le déterminant

$$\psi_i \psi_\sigma - \psi_\rho \psi_j \quad (39)$$

soit changé dans la forme (37) possédant les solutions symétriques

$$\left. \begin{aligned} b_i &= a_i \sqrt{-1}, \quad b_\rho = -a_\rho \sqrt{-1}, \quad b_j = a_j \sqrt{-1}, \quad b_\sigma = -a_\sigma \sqrt{-1}, \\ c_i &= \pm a_\rho, \quad c_\rho = \mp a_i, \quad c_j = \pm a_\sigma, \quad c_\sigma = \mp a_j; \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

ainsi, on trouve que les deux systèmes de fonctions

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j &= a_j X + i a_j Y + c_j Z + d_j, \\ \varphi_{j+4} &= c_j X - i c_j Y - a_j Z + d_{j+4}, \quad j = 1, 2, 3, 4; \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_j &= a_j X + i a_j Y - c_j Z + d_j, \\ \varphi'_{j+4} &= c_j X - i c_j Y + a_j Z + d_{j+4} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

sont capables de définir deux familles de ∞^5 transformations qui changent les lignes droites en sphères.

En formant les équations

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \sum_{i=1}^4 (a_{1i} X + i a_{1i} Y + a_{2i} Z + a_{3i}) x_i = 0, \\ \Omega_2 &= \sum_{i=1}^4 (a_{2i} X - i a_{2i} Y - a_{1i} Z + a_{4i}) x_i = 0, \\ \Omega_1^x &= \frac{\Omega_1^y}{\Omega_2^y} = \frac{\Omega_1^x}{\Omega_2^x} = \frac{\Omega_1^y}{\Omega_2^y}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

et les équations

$$\left. \begin{aligned} \Omega_3 &= \sum_1^4 (a_{1j} X - i a_{1j} Y + a_{2j} Z + a_{3j}) x_j = 0, \\ \Omega_4 &= \sum_1^4 (a_{2j} X + i a_{2j} Y - a_{1j} Z + a_{4j}) x_j = 0, \\ \frac{\Omega_3^x}{\Omega_4^x} &= \frac{\Omega_3^y}{\Omega_4^y} = \frac{\Omega_3^X}{\Omega_4^X} = \frac{\Omega_3^Y}{\Omega_4^Y}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

où

$$\left. \begin{aligned} \omega^x &= \omega_x + p \omega_z, & \omega^y &= \omega_y + q \omega_z, \\ \omega^X &= \omega_X + P \omega_Z, & \omega^Y &= \omega_Y + Q \omega_Z, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

nous vérifions facilement que les transformations définies par les équations dérivées sont des transformations de contact. Nous voyons ensuite que, en particulierisant les constantes des équations (43) de la manière suivante

$$\left. \begin{aligned} a_{14} &= a_{21} = a_{33} = a_{42} = 1, \\ a_{11} &= a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{41} = a_{43} = a_{44} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

ou les constantes des équations (44) de la manière suivante

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -a_{24} = a_{32} = -a_{43} = 1, \\ a_{12} &= a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{33} = a_{34} = a_{41} = a_{42} = a_{44} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

nous avons la correspondance célèbre étudiée par LIE

$$Z x_1 + z_1 + X + i Y = 0, \quad (X - i Y) x_1 + y_1 - Z = 0. \quad (48)$$

En combinant la transformation de LIE (48) avec toutes les droite-en-droite transformations ponctuelles du groupe projectif général

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1, & \rho z_1 &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3, \\ \rho y_1 &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2, & \rho &= \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

on obtient ∞^{15} droite-en-sphère transformations de contact déterminées par deux équations

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_4 X + i \alpha_4 Y + \alpha_1 Z + \alpha_3) x + \dots &= 0, \\ (\alpha_1 X - i \alpha_1 Y - \alpha_4 Z + \alpha_2) x + \dots &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

qui sont de la forme (43).

Donc les transformations (S) de la famille (43) se déduisent de la transformation (Λ) de LIE (48) et des transformations (Π) de groupe projectif général au moyen de l'équation symbolique

$$S = \Pi \Lambda. \quad (51)$$

Encore on combine la transformation de LIE avec toutes les droite-en-droite transformations de contact définies par l'équation

$$(\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z + \delta_1) x + \dots = 0; \quad (52)$$

les ∞^{15} droite-en-sphère transformations (Σ) résultantes sont déterminées par les deux équations

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_1 X - i \alpha_1 Y + \alpha_4 Z + \alpha_2) + \dots &= 0, \\ (\alpha_4 X + i \alpha_4 Y - \alpha_1 Z + \alpha_3) + \dots &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

de la forme (44); ainsi pour les transformations (44) on a l'équation symbolique

$$\Sigma = D \Lambda, \quad (54)$$

où D est la transformation dualistique générale.

Revenons maintenant au deuxième cas, savoir quand un déterminant quelconque de la matrice (36) se réduit à la forme (37) et les fonctions φ_i correspondant une fonction ψ_i restant dans la matrice se réduisent à des constantes. Nous trouvons six familles de ∞^{13} transformations définies par deux équations bilinéaires de la forme

$$\left. \begin{aligned} \omega_5 &= (a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1) x + \\ &\quad + d_2 y + d_3 z + a_4 X + b_4 Y + c_4 Z + d_4 = 0, \\ \omega_6 &= (a_5 X + b_5 Y + c_5 Z + d_5) x + \\ &\quad + d_6 y + d_7 z + a_8 X + b_8 Y + c_8 Z + d_8 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

où les constantes sont assujetties aux conditions

$$\left. \begin{aligned} a_1 a_8 - a_4 a_5 &= b_1 b_8 - b_4 b_5 = c_1 c_8 - c_4 c_5 = d_1 d_8 - d_4 d_5 = 0, \\ a_1 b_8 + a_8 b_1 - a_4 b_5 - a_5 b_4 &= 0, \\ b_1 c_8 + b_8 c_1 - b_4 c_5 - b_5 c_4 &= 0, \\ c_1 a_8 + c_8 a_1 - c_4 a_5 - c_5 a_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Des équations

$$\left. \begin{aligned} \omega_5 &= 0, & \omega_6 &= 0, \\ \frac{\omega_5^x}{\omega_6^x} &= \frac{\omega_5^y}{\omega_6^y} = \frac{\omega_5^X}{\omega_6^X} = \frac{\omega_5^Y}{\omega_6^Y} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

nous voyons que les transformations sont des transformations de contact.

Les droites se transforment en des points si

$$d_1 : d_2 : d_3 : d_4 = d_5 : d_6 : d_7 : d_8; \quad (58)$$

et en des plans, si

$$a_1 : b_1 : c_1 : a_4 : b_4 : c_4 = a_5 : b_5 : c_5 : a_8 : b_8 : c_8. \quad (59)$$

Nous voyons ensuite que, en particulierisant les constantes de la manière suivante

$$\left. \begin{aligned} a_4 = a_5 = c_1 = -c_8 = d_3 = d_6 = 1, & \quad b_4 = -b_5 = \sqrt{-1}, \\ a_1 = a_8 = b_1 = b_8 = c_4 = c_5 = d_1 = d_2 = d_5 = d_7 = d_8 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

nous avons la transformation (48) de LIE.

Enfin les valeurs des constantes

$$\left. \begin{aligned} a_3 = a_6 = -a_8 = -c_2 = c_7 = d_4 = 1, & \quad b_3 = -b_6 = \sqrt{-1}, \\ a_1 = a_4 = a_5 = b_1 = b_4 = b_5 = c_1 = c_4 = c_5 = c_8 = \\ & = d_1 = d_2 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

donnent la transformation de contact définie par les équations

$$(X + iY)z - Zy + 1 = 0, \quad (X - iY)y + Zz - x = 0; \quad (62)$$

cette transformation est équivalente à une transformation par polaires réciproques déterminée par l'équation directrice

$$Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 - 1 = 0 \quad (63)$$

suivie de la transformation de LIE.

Pour obtenir les formes explicites des transformations de cette famille (55) et (56) on fait un changement des constantes arbitraires et on considèrerait la forme quadratique

$$\left| \begin{array}{cc} 1, X + 1, Y + 1, Z & 4, X + 4, Y + 4, Z \\ 3, X + 3, Y + 3, Z & 2, X + 2, Y + 2, Z \end{array} \right|, \quad (64)$$

qui se réduit à la forme

$$\text{Const. } (X^2 + Y^2 + Z^2), \quad (65)$$

si les constantes soient assujetties aux conditions :

$$\left. \begin{aligned} 1_1 2_1 - 3_1 4_1 &= 1_2 2_2 - 3_2 4_2 = 1_3 2_3 - 3_3 4_3 = 0, \\ 1_1 2_2 + 1_2 2_1 - 3_1 4_2 - 3_2 4_1 &= 0, \\ 1_2 2_3 + 1_3 2_2 - 3_2 4_3 - 3_3 4_2 &= 0, \\ 1_3 2_1 + 1_1 3_2 - 3_3 4_1 - 3_1 4_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

À cause de la symétrie et de l'invariance de ces équations-ci sous les substitutions

$$(1\ 2\ 3\ 4) : (2\ 1\ 4\ 3); \quad (1\ 2\ 3\ 4) : (4\ 3\ 2\ 1); \quad (1\ 2\ 3\ 4) : (3\ 4\ 1\ 2);$$

et sous une permutation cyclique des indices, il est nécessaire à considérer seulement les quarante cinq cas suivants des sept cent quatre-vingt douze manières à choisir sept constantes arbitraires :

1.^o cas : Soient les quantités

$$1_1, 1_2, 1_3, 3_1, 4_1, 4_2, 4_3$$

des constantes tout-à-fait arbitraires; les équations de condition sont linéaires et les cinq constantes restantes sont des fonctions suivantes des constantes données

$$2_1 = 3_1 4_1 \Delta, \quad 2_2 = 3_1 4_2 \Delta, \quad 2_3 = 3_1 4_3 \Delta, \quad 3_2 = 3_1 1_2 \Delta, \quad 3_3 = 3_1 1_3 \Delta,$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4_1 & -1_3 & 0 & -1 \\ 4_1 & 0 & -1_2 & 1_1 & 0 \\ 4_2 & 0 & 1_1 & -1_2 & 0 \\ 4_2 & -4_3 & 0 & 1_2 & 1_3/1_1 \\ 4_3 & 4_2 & 0 & -1_3 & -1_2/1_1 \end{vmatrix}.$$

2.^o cas : Supposons que les constantes

$$1_1, 1_2, 1_3, 3_1, 3_2, 3_3, 4_1$$

aient des valeurs arbitraires; on construit immédiatement les formes des inconnues en remarquant que ce cas-ci se déduit du premier cas par la sub-

stitution

$$(3_1, 3_2, 3_3, 4_1, 4_2, 4_3) : (4_1, 4_2, 4_3, 3_1, 3_2, 3_3).$$

3.^o cas: Soient

$$1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, 4_1$$

les données; en posant

$$\begin{aligned} \alpha &= 1_1 2_2 + 1_2 2_1, & \beta &= 1_2 2_3 + 1_3 2_2, & \gamma &= 1_3 2_1 + 1_1 2_3, \\ \delta &= 1_2 2_2 - 1_1 2_1, & \varepsilon &= 1_2 2_2 - 1_3 2_3, & \zeta &= 4_1, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} 3_1 &= \frac{\alpha \xi - \delta \zeta}{\xi^2 + \zeta^2}, & 3_2 &= \frac{\alpha \zeta + \delta \xi}{\xi^2 + \zeta^2}, \\ 3_2 &= \frac{\gamma (\alpha \zeta + \delta \xi) - \beta (\alpha \xi - \delta \zeta)}{\zeta (\alpha \zeta + \delta \xi) - \xi (\alpha \xi - \delta \zeta)}, & 4_3 &= \frac{(\beta \zeta - \gamma \xi) (\xi^2 + \zeta^2)}{\alpha \zeta^2 + 2 \delta \xi \zeta - \alpha \xi^2}, \end{aligned}$$

où $\xi \equiv 4_2$ est une racine de l'équation du sixième degré

$$\rho_0 x^6 + \zeta \alpha \rho_1 x^5 + \zeta^2 \rho_2 x^4 + \zeta^3 \alpha \rho_3 x^3 + \zeta^4 \rho_4 x^2 + \zeta^5 \alpha \rho_5 x + \zeta^6 \rho_6 = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \alpha^2 (\delta - \varepsilon) - \gamma (\alpha \beta - \gamma \delta), & \rho_1 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4 \delta (\delta - \varepsilon), \\ \rho_2 &= \alpha^2 (\varepsilon - 6 \delta) - 3 \alpha \beta \gamma - (\beta^2 - 2 \gamma^2) \delta + 4 \delta^2 (\delta - \varepsilon), \\ \rho_3 &= 2 (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + 4 \delta^2), & \rho_4 &= \alpha^2 (\varepsilon + 5 \delta) - 3 \alpha \beta \gamma - (2 \beta^2 - \gamma^2) \delta - 4 \delta^2 \varepsilon, \\ \rho_5 &= \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - 3 \delta \varepsilon, & \rho_6 &= -\alpha^2 \varepsilon - \beta^2 \delta - \alpha \beta \gamma. \end{aligned}$$

4.^o cas: Les données sont

$$1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2;$$

nous avons

$$4_1 = \frac{1_1 2_1 3_1 - 1_2 2_2 3_1 + 1_1 2_1 3_2}{3_1^2 + 3_2^2}, \quad 4_2 = \frac{1_1 2_1 3_1 - 1_1 2_1 3_2 + 1_2 2_2 3_2}{3_1^2 + 3_2^2},$$

la quantité 4_3 est une racine de l'équation quadratique

$$l x^2 + m x + n = 0$$

où

$$\begin{aligned} l &= 1_2 1_3 (3_1^2 + 3_2^2) (1_1 3_2 - 1_2 3_1), \\ m &= (3_1^2 + 3_2^2) \{ 1_1^2 1_3^2 (3_1^2 2_1 + 2 2_2 3_1 3_2 + 3_2^2 2_1) - 2 1_1 1_2 1_3^2 (2_1 3_1 3_2 + 2_2 3_2) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = & 1_{113} \{ (1_{12} 2_{11} - 1_{33} 2_{12}) (3_{111} - 3_{112} + 3_{122} - 3_{222}) \} \\
& - 1_{123} \{ (1_{12} 2_{11} - 1_{33} 2_{12}) (3_{111} + 3_{112} + 3_{122} - 3_{222}) + \\
& \quad + 1_{12} 2_{12} (3_{111} - 3_{112} - 3_{122} - 3_{222}) + \\
& \quad + 2_{22} (1_{22} + 1_{33}) 3_{112} + 1_{11} 2_{11} 3_{122} + 1_{22} 1_{33} 3_{222} \} \\
& - 1_{223} \{ (1_{22} 2_{22} - 3_{112} 2_{12} + 1_{33} 2_{22}) 3_{111} + 2_{11} 2_{11} 3_{112} + \\
& \quad + (1_{11} 2_{11} - 1_{12} 2_{12} + 1_{33} 2_{22}) 3_{122} \} \\
& - 1_{333} \{ (1_{12} 2_{11} - 1_{11} 2_{12}) (3_{111} - 3_{112} + 3_{122} - 3_{222}) + \\
& \quad + (1_{22} 2_{12} - 1_{12} 2_{22}) (3_{112} + 3_{222}) \} ; \\
& k_{lmn} = k_l k_m k_n ;
\end{aligned}$$

enfin les paramètres

$$2_3 = \theta, \quad 3_3 = \varphi$$

sont données par les équations

$$\begin{aligned}
(1_{23} \xi - 1_{31} \eta) \varphi &= 1_{33} (1_2 2_1 - 1_1 2_2) + (1_{13} 3_2 - 1_{23} 3_1) \zeta, \\
1_1 \theta &= 3_1 \zeta + \xi \varphi + 1_3 2_1,
\end{aligned}$$

où

$$\xi = 4_1, \quad \eta = 4_2, \quad \zeta = 4_3.$$

5.^o cas : On cherche les valeurs des constantes

$$2_1, 2_2, 2_3, 3_3, 4_3$$

comme fonctions des constantes

$$1_1, 1_2, 1_3, 3_1, 3_2, 4_1, 4_2;$$

on trouve

$$\begin{aligned}
2_1 = \xi &= \frac{1_1 (3_1 4_1 - 3_2 4_2) + 1_2 (3_1 4_2 + 3_2 4_1)}{1_1^2 + 1_2^2}, \\
2_2 = \eta &= \frac{1_1 (3_1 4_2 + 3_2 4_1) - 1_2 (3_1 4_1 - 3_2 4_2)}{1_1^2 + 1_2^2},
\end{aligned}$$

en substituant ces valeurs dans les équations

$$\begin{aligned}
(3_1 4_2 - 3_2 4_1) \theta &= \begin{vmatrix} 1_2 \zeta + 1_3 \eta & 3_2 \\ 1_1 \zeta + 1_3 \xi & 3_1 \end{vmatrix}, \\
(3_1 4_2 - 3_2 4_1) \varphi &= \begin{vmatrix} 4_2 & 1_2 \zeta + 1_3 \eta \\ 4_1 & 1_1 \zeta + 1_3 \xi \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

on a $\vartheta = 3_3$, et $\varphi = 4_3$ en des fonctions de $\zeta = 2_3$; enfin l'équation

$$\varphi \theta + 1_2 \eta - 1_3 \zeta - 3_2 4_2 = 0$$

devient une équation quadratique en ζ

$$\lambda \zeta^2 + \mu \zeta + \nu = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \lambda &= (1_2 3_1 - 1_1 3_2)(1_1 4_2 - 1_2 4_1), & \nu &= (1_2 \eta - 3_2 4_2)(3_1 4_2 - 3_2 4_1)^2, \\ \mu &= (1_3 4_2 \zeta - 1_3 4_1 \eta)(1_2 3_1 - 1_1 3_2) - (1_1 4_2 - 1_2 4_1)(1_3 3_2 \zeta - 1_3 3_1 \eta) - \\ & & & - 1_3 (3_1 4_2 - 3_2 4_1)^2. \end{aligned}$$

6.^o cas: Pour déterminer

$$\xi = 3_1, \quad \eta = 3_2, \quad \zeta = 3_3, \quad \theta = 4_3, \quad \varphi = 2_3$$

en fonctions des autres coefficients il suffit d'observer que ce cas-ci se déduit du cas 4.^o par la substitution

$$(\theta \varphi 3_1 3_2) : (\varphi \theta 4_1 4_2).$$

7.^o cas: Il s'agit de trouver

$$\xi = 4_1, \quad \eta = 4_2, \quad \zeta = 4, \quad \theta = 2_2, \quad \varphi = 3_1$$

en termes des autres constantes; il paraît que φ est une racine de la cubique

$$a \varphi^3 + b \varphi^2 + c \varphi + d = 0,$$

où

$$\begin{aligned} a &= 2_2 3_2 (1_{22} + 1_{33}), & b &= -3_2 \{ 2_1 3_2 (1_{22} + 1_{33}) + 21_{12} 2_2 3_2 + 21_{13} 2_2 3_3 \}, \\ c &= 3_{22} (1_{11} 2_2 + 1_1 2_1) + 3_{22} (1_{13} 2_1 2_3 - 1_{23} 2_2 3_3 - 1_{12} 2_2 - 1_{22} 2_1) + \\ & & & + 3_2 (1_{11} 2_2 3_{33} + 1_{22} 2_2 3_{33} - 1_{13} 2_2 3_3 - 1_{23} 2_1 3_3), \\ d &= 1_3 2_1 3_{22} (1_2 3_3 - 1_3 2_2) + 1_1 3_{22} (3_{22} + 3_{33}) (1_2 2_2 - 1_1 2_1) - \\ & & & - 3_{22} 3_3 (1_1 2_2 + 1_2 2_1) (1_2 3_3 - 1_3 3_2) - \\ & & & - 3_{22} (1_2 2_2 - 1_1 2_1) (1_2 3_2 + 1_3 3_3); \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{3_2 (1_2 2_2 - 1_1 2_1) + (1_1 2_2 + 1_2 2_1) \varphi}{3_{22} + \varphi^2}, & \xi &= \frac{1_1 2_2 + 1_2 2_1 - \varphi \eta}{3_2}, \\ \theta &= \frac{(3_{22} + 3_{33}) \eta - 2_2 (1_2 3_2 + 1_3 3_3)}{1_2 3_3 - 1_3 3_2}, & \zeta &= \frac{(1_2 3_2 + 1_3 3_3) \eta - 2_2 (1_{22} + 1_{33})}{1_2 3_3 - 1_3 3_2}. \end{aligned}$$

8.^o cas : Les constantes

$$1_1, 1_2, 1_3, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2$$

sont données; la solution de ces cas se construit du cas précédent au moyen de la substitution

$$(1_1 2_1 3_1 1_3 2_3 3_3) : (1_3 2_3 3_3 1_1 2_1 3_1).$$

9.^o cas : Pour exprimer les constantes

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 2_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_1$$

en fonctions des autres coefficients on remarque que les équations

$$1_1 \xi - 1_2 \eta = 3_1 \varphi + 3_2 4_2,$$

$$1_2 \xi + 1_1 \eta = 3_2 \varphi + 3_1 4_2,$$

déterminent ξ et η en fonctions linéaires de φ ; ensuite les équations

$$1_3 \zeta - 4_1 \theta = 1_1 \xi - 3_1 \varphi, \quad 1_2 \zeta - 4_2 \theta = 1_3 \eta - 3_2 4_3,$$

donnent ζ et θ en fonctions linéaires de φ ; enfin l'équation

$$\theta \varphi - 1_3 \xi - 1_1 \zeta + 3_1 4_3 = 0$$

devient une quadratique pour φ .

10.^o cas : Supposons que

$$1_1, 1_2, 1_3, 3_1, 3_2, 4_1, 4_2$$

soient des constantes arbitraires; les valeurs des coefficients

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 2_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_3$$

se trouvent de la solution du cas 9.^o par la substitution

$$(\theta \varphi 3_1 3_2 4_1 4_3) : (\varphi \theta 4_1 4_2 3_2 3_3).$$

11.^o cas : Il faut qu'on trouve les expressions qui expriment les constantes

$$\xi = 3_1, \quad \eta = 3_2, \quad \zeta = 3_3, \quad \theta = 4_3, \quad \varphi = 2_1$$

en fonctions des autres paramètres; les formules cherchées se déduisent de la solution du cas 7.^o au moyen de la substitution

$$(\xi \zeta \theta \varphi 1_1 1_3 2_1 2_3 3_2 3_3 4_1 4_2) : (\zeta \xi \varphi \theta 1_3 1_1 2_3 2_1 4_2 4_1 3_3 3_2).$$

12.^o cas : On demande les formes des paramètres

$$\xi = 3_1, \quad \eta = 3_2, \quad \zeta = 3_3, \quad \theta = 4_1, \quad \varphi = 2_3$$

en fonctions des autres coefficients; la solution se dérive du cas 11.^o au moyen de la substitution

$$(\xi \zeta 1_1 1_3 2_3 4_1 4_2) : (\zeta \xi 1_3 1_1 2_1 4_3 4_2).$$

13.^o cas: Des cinq inconnues

$$\xi = 3_2, \quad \eta = 3_3, \quad \zeta = 2_2, \quad \theta = 2_3, \quad \varphi = 4_3,$$

les paramètres ξ et ζ sont déterminées par les équations

$$4_1 \xi - 1_2 \zeta = 3_1 4_1 - 1_1 2_1, \quad 4_1 \xi - 1_1 \zeta = 3_1 4_2 - 1_2 2_1;$$

les constantes φ et η sont données en fonctions linéaires de θ des équations

$$\xi \varphi + 4_2 \eta = 1_2 \theta + 1_3 \zeta, \quad 3_1 \varphi + 4_1 \eta = 1_1 \theta + 1_3 2_1;$$

enfin l'équation

$$\varphi \eta - 4_2 \xi + 1_2 \zeta - 1_3 \theta = 0$$

est une quadratique pour θ .

14.^o cas: Il s'agit d'exprimer les coefficients

$$\xi = 3_2, \quad \eta = 3_3, \quad \zeta = 2_1, \quad \theta = 2_3, \quad \varphi = 4_3$$

en termes des autres coefficients; la solution est simple: les équations

$$4_2 \xi + 1_1 \zeta - 1_2 2_2 - 3_1 4_1 = 0, \quad 4_1 \xi + 1_2 \zeta + 1_1 2_2 - 3_1 4_2 = 0,$$

déterminent ξ et ζ ; les équations

$$\xi \varphi + 4_2 \eta - 1_2 \theta - 1_3 2_2 = 0, \quad 3_1 \varphi + 4_1 \eta - 1_1 \theta - 1_3 \zeta = 0,$$

donnent φ et η en fonctions de θ ; et l'équation

$$\varphi \eta - 4_2 \xi - 1_3 \theta + 1_2 2_2 = 0$$

devient une quadratique pour θ .

15.^o cas: Les paramètres ξ et θ des cinq paramètres inconnus

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 3_1, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_3$$

se déterminent en fonctions linéaires de ζ au moyen des équations

$$1_2 \xi - 4_2 \theta = 4_1 \zeta - 1_1 2_1, \quad 1_1 \xi - 4_1 \theta = 4_2 \zeta - 1_2 2_1;$$

les constantes η et φ sont des fonctions linéaires fractionnelles des équations

$$1_3 \eta - 3_3 \varphi = 1_1 2_1 - 4_1 \zeta, \quad 1_1 \eta - \zeta \varphi = 3_1 4_1 - 1_3 2_1;$$

enfin l'équation

$$1_3 \xi + 1_2 \eta - \theta \varphi - 3_3 4_2 = 0$$

est une quadratique pour ζ .

16.^o cas : La solution de ce cas, savoir

$$\xi = 1_2, \quad \eta = 1_3, \quad \zeta = 3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_3,$$

est une conséquence immédiate du cas 13.^o et de la substitution

$$(\xi \eta \zeta \theta 1_1 1_2 1_3 2_1) : (\zeta \theta \xi \eta 2_1 2_2 2_3 1_1).$$

17.^o cas : On cherche

$$\xi = 3_1, \quad \eta = 3_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 1_1, \quad \varphi = 4_3$$

en fonctions des autres constantes et on trouve ξ et θ des équations linéaires

$$4_2 \xi + 2_1 \theta = 1_2 2_2 + 3_1 4_1, \quad 4_1 \xi - 2_2 \theta = 1_2 2_1 - 3_1 4_2;$$

les équations

$$4_2 \eta + \xi \varphi = 2_2 \zeta + 1_2 2_3, \quad 4_1 \eta + 3_1 \varphi = 2_1 \zeta + 2_3 \theta$$

deviennent des équations linéaires par rapport aux ζ , η , φ et elles déterminent η et φ en fonctions linéaires de ζ ; enfin l'équation

$$\varphi \eta + 4_2 \xi - 2_3 \zeta + 1_2 2_2 = 0$$

est une quadratique pour ζ .

18.^o cas : Les équations

$$2_1 \zeta - 2_2 \theta = 3_1 4_1 - 4_2 \xi, \quad 2_2 \zeta + 2_1 \theta = 3_1 4_2 + 4_1 \xi,$$

expriment ζ et θ des cinq quantités

$$\xi = 3_2, \quad \eta = 3_3, \quad \zeta = 1_1, \quad \theta = 1_2, \quad \varphi = 4_3,$$

en fonctions linéaires de ξ ; les paramètres η et φ sont déterminées en fonctions linéaires fractionnelles de ξ par les équations

$$4_2 \eta + \xi \varphi - 2_3 \theta - 1_3 2_2 = 0, \quad 4_1 \eta + 3_1 \varphi - 2_3 \zeta - 1_3 2_1 = 0;$$

et ξ est une racine de l'équation quadratique

$$\varphi \eta + 2_2 \theta - 4_2 \xi - 1_3 2_3 = 0.$$

19.^o cas : Les constantes arbitraires sont

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_2, \quad \theta = 1_3, \quad \varphi = 4_3;$$

ζ est une fonction linéaire de ξ donnée par l'équation

$$2_1 \zeta + 1_1 \xi - 3_1 4_2 - 3_2 4_1 = 0;$$

ξ est une solution de l'équation quadratique

$$\xi \zeta - 1_1 2_1 + 3_1 4_1 - 3_2 4_2 = 0;$$

les équations

$$1_1 \eta - 3_1 \varphi = 3_3 4_1 - 2_1 \theta, \quad \zeta \eta - 3_2 \varphi = 3_3 4_2 - \xi \theta,$$

déterminent η et φ en fonctions linéaires de θ ; enfin l'équation

$$\eta \theta - 3_3 \varphi - 1_1 2_1 + 3_1 4_1 = 0$$

est une quadratique en θ .

20.° cas: Les constantes

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_1, \quad \theta = 1_3, \quad \varphi = 4_3$$

s'expriment en fonction des sept autres paramètres en observant que l'équation

$$1_2 \xi - 2_1 \zeta + 3_1 4_1 - 3_2 4_2 = 0$$

détermine ξ en fonction linéaire de ζ ; que l'équation

$$\xi \zeta + 1_2 2_1 - 3_1 4_1 - 3_2 4_2 = 0$$

est une quadratique en ζ ; que les paramètres η et θ sont des fonctions linéaires de φ des équations

$$\xi \theta + 1_2 \eta = 3_2 \varphi + 3_3 4_2, \quad \zeta \eta + 2_1 \theta = 3_1 \varphi + 3_3 4_1,$$

et enfin que l'équation

$$\eta \theta - 1_2 \xi - 3_3 \varphi + 3_2 4_2 = 0$$

devient une quadratique en φ .

21.° cas: On obtient les formules pour les valeurs de

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_1, \quad \theta = 1_2, \quad \varphi = 4_3$$

de la manière suivante: l'équation

$$2_1 \zeta - \xi \theta - 3_1 4_1 + 3_2 4_2 = 0$$

donne ζ en fonction linéaire de $\xi \theta$; de l'équation

$$\xi \zeta + 2_1 \theta - 3_1 4_2 - 3_2 4_1 = 0$$

on voit que θ est une fonction dont le numérateur est une fonction linéaire, et le dénominateur une fonction quadratique, de ξ ; maintenant on remarque que ζ devient une fonction de ξ de la même forme que la fonction θ ; en substituant ces valeurs de ζ et θ dans les équations

$$1_3 \eta - 3_3 \varphi - \xi \theta + 3_2 4_2 = 0, \quad \theta \eta - 3_2 \varphi + 1_3 \xi - 3_3 4_2 = 0$$

on trouve pour η une cubique fonction de ξ sur une fonction quadratique de ξ , et pour φ une quintique en ξ sur une fonction quartique de ξ ; enfin ξ est une racine de l'équation du cinquième degré

$$\eta \zeta - 3_1 \varphi + 1_3 2_1 - 3_3 4_1 = 0.$$

22.° cas : Des paramètres

$$\xi = 3_1, \quad \eta = 3_2, \quad \zeta = 4_1, \quad \theta = 4_2, \quad \varphi = 2_1,$$

ζ est une fonction linéaire de ξ donnée par l'équation

$$3_3 \zeta + 4_3 \xi - 1_3 2_1 - 1_1 2_3 = 0;$$

ξ est une racine de l'équation quadratique

$$\xi \zeta + 1_3 2_3 - 1_1 2_1 - 3_3 4_3 = 0;$$

η et θ sont des fonctions linéaires de φ données par les équations

$$\zeta \eta - 1_1 \varphi + \xi \theta - 1_2 2_1 = 0, \quad 4_3 \eta - 1_3 \varphi + 3_3 \theta - 1_2 2_3 = 0;$$

et φ est une racine de la quadratique

$$\eta \theta - 1_2 \varphi + 1_3 2_3 - 3_3 4_3 = 0.$$

23.° cas : Les systèmes des équations pour déterminer les paramètres

$$\xi = 3_1, \quad \eta = 3_2, \quad \zeta = 2_1, \quad \theta = 2_2, \quad \varphi = 4_2,$$

est linéaire; ζ est égale

$$\frac{3_1 4_1 - 3_3 4_3 + 1_3 2_3}{1_1};$$

ξ est donnée de l'équation

$$4_3 \xi = 1_3 \zeta + 1_1 2_3 - 3_3 4_1;$$

enfin η , θ , φ sont des solutions du système linéaire

$$1_1 \theta - 3_1 \varphi - 4_1 \eta + 1_2 \zeta = 0, \quad 1_2 \theta - 3_2 \varphi - 1_3 2_3 + 3_3 4_3 = 0,$$

$$1_3 \theta - 3_3 \varphi - 4_3 \eta + 1_2 2_3 = 0.$$

24.^o cas: On détermine les paramètres

$$\xi = 4_1, \quad \eta = 4_2, \quad \zeta = 2_1, \quad \theta = 2_2, \quad \varphi = 3_2$$

de la manière suivante: ξ et ζ sont solutions des équations

$$3_1 \xi - 1_1 \zeta = 3_2 4_3 - 1_3 2_3, \quad 3_3 \xi - 1_3 \zeta = 1_1 2_3 - 3_1 4_3;$$

φ et η sont fonctions linéaires de θ données par les équations

$$1_1 \theta + 1_2 \zeta - 3_1 \eta - \varphi \xi = 0, \quad 1_3 \theta - 4_3 \varphi - 3_3 \eta + 1_2 2_3 = 0;$$

et θ est une racine de la quadratique

$$\varphi \eta - 1_2 \theta + 1_3 2_3 - 3_3 4_3 = 0.$$

25.^o cas: Il s'agit d'exprimer

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 3_1, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_3,$$

en fonction des autres paramètres; les équations

$$1_1 \xi - 4_1 \zeta - 1_2 \eta + 1_2 \theta = 0, \quad 1_2 \xi + 1_1 \eta - 4_1 \zeta - 4_1 \theta = 0$$

déterminent ξ et ζ en fonctions linéaires de η et θ ; on substitue ces valeurs de ξ et ζ dans l'équation

$$\varphi \zeta - 1_3 \xi - 1_1 2_3 + 3_3 4_1 = 0,$$

et on élimine $\varphi \theta$ au moyen de l'équation

$$\varphi \theta - 1_3 \eta - 1_2 2_3 + 3_3 4_2 = 0;$$

l'équation résultante et l'équation

$$1_2 \eta - 4_2 \theta + 3_3 \varphi - 1_3 2_3 = 0$$

donnent φ et θ en fonction de η ; enfin l'équation

$$\varphi \theta - 1_3 \eta - 1_2 2_3 + 3_3 4_2 = 0$$

devient une quadratique en η .

26.^o cas: Les formes des paramètres

$$\xi = 1_1, \quad \eta = 1_2, \quad \zeta = 3_1, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_3$$

en fonction des autres constantes se déduisent du cas 25.^o par la substitution

$$(1, 1 \ 1_3 \ 2_3) : (2, 2_2 \ 2_3 \ 1_3).$$

27.^o cas : Pour obtenir les paramètres

$$\xi = 1_1, \quad \eta = 1_2, \quad \zeta = 2_1, \quad \theta = 2_1, \quad \varphi = 4_3,$$

il est nécessaire de résoudre le système des équations

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \xi \zeta - \eta \theta - 3_1 4_1 + 3_2 4_2 &= 0, & \text{(ii)} \quad \eta \theta + 3_2 \varphi - 1_3 2_3 - 3_2 4_2 &= 0, \\ \text{(iii)} \quad \xi \theta + \eta \zeta - 3_1 4_2 - 3_2 4_1 &= 0, & \text{(iv)} \quad 2_3 \eta + 1_3 \theta - 3_2 \varphi - 3_3 4_2 &= 0, \\ \text{(v)} \quad 2_3 \xi + 1_3 \zeta - 3_1 \varphi - 3_3 4_1 &= 0; \end{aligned}$$

des équations (ii) et (iv) on a

$$\eta \theta + a \eta + b \theta - c = 0;$$

des équations (i), (ii) et (iv) on trouve

$$\xi \zeta + e \xi + f \zeta - k = 0;$$

pour l'équation (iii) on peut écrire

$$\xi \theta + \eta \zeta - l = 0;$$

les équations (iv) et (v) donnent

$$\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \rho \theta + \sigma = 0;$$

de ce système il résulte que η et ζ sont déterminées par les équations quadratiques

$$\begin{aligned} (a \eta - c)(f \zeta - k) + (\eta \zeta - l)(\eta + b)(\zeta + e) &= 0, \\ \lambda(f \zeta - k)(\eta + b) + \rho(a \eta - c)(\zeta + e) - (\mu \eta + \nu \zeta + \sigma)(\eta + b)(\zeta + e) &= 0. \end{aligned}$$

28.^o cas : Les équations pour déterminer

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_3$$

demandent que

$$\xi = \frac{1_2 2_2 - 3_2 4_2 + 3_1 4_1}{1_1} = \frac{3_1 4_2 + 3_2 4_1 - 1_1 2_2}{1_2};$$

donc toutes les sept paramètres

$$1_1, 1_2, 2_2, 3_1, 3_2, 4_1, 4_2$$

ne peuvent pas être arbitraires.

29.^o cas : Les formes des paramètres

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_3$$

on trouve de la manière suivante: le système à résoudre est

$$\begin{aligned} a\xi + b\eta + c\theta - k &= 0, & b\xi + a\eta + h\theta - l &= 0, & f\xi + g\varphi + e\eta - k &= 0, \\ \eta\xi + j\varphi - m &= 0, & \xi\xi - \varphi\theta - n &= 0; \end{aligned}$$

la cinquième équation devient la quadratique

$$\begin{aligned} & \{ l j (h b - a c) + e (b k - a l) + k (b^2 - a^2) \} \eta^2 \\ & + \{ (a c - b h) (j k - g m) - e j (h k - c l) + f m (b^2 - a^2) - \\ & \quad - k (a l - b k) + g n (a h - b c) \} \eta \\ & + (h k - c) (j k - g m) - f m (a l - b k) - n j (a h - b c) = 0 \end{aligned}$$

en substituant les fonctions ξ , θ , ζ , et φ de η déduites des autres équations.

30.^o cas: Des cinq paramètres

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_3,$$

ξ et θ se déterminent par les équations

$$1_2 \xi - 4_2 \theta - 1_1 2_1 + 3_1 4_1 = 0, \quad 1_1 \xi - 4_1 \theta + 1_2 2_1 - 3_1 4_2 = 0;$$

et les trois équations

$$\begin{aligned} \xi \zeta - \varphi \theta + 1_2 \eta - 3_3 4_2 &= 0, & 1_1 \eta + 2_1 \zeta - 3_1 \varphi - 3_3 4_1 &= 0, \\ \zeta \eta - 1_2 \xi + 4_2 \theta - 3_3 \varphi &= 0, \end{aligned}$$

donnent une quadratique pour φ .

31.^o cas: La solution de ce cas, c'est-à-dire la détermination des formes de

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_1,$$

suivit immédiatement du cas précédent au moyen de la substitution

$$(\theta \varphi 1_1 1_2 2_1 3_1 3_3 4_1 4_2) : (\varphi \theta 1_2 1_1 2_2 4_2 4_3 3_2 3_1).$$

32.^o cas: Le système des équations pour trouver

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_2$$

en fonction des autres paramètres est

$$\begin{aligned} 1_1 \xi - 1_2 \eta + 3_2 \varphi - 3_1 4_1 &= 0, & 1_2 \xi + 1_1 \eta - 3_1 \varphi - 3_2 4_1 &= 0, \\ 1_2 \eta - 2_3 \zeta + 4_3 \theta - 3_2 \varphi &= 0, \\ \eta \zeta - \theta \varphi + 1_2 2_3 - 3_2 4_3 &= 0, & \xi \zeta - 4_1 \theta + 1_1 2_3 - 3_1 4_3 &= 0; \end{aligned}$$

on voit sans difficulté qu'on a

$$\eta = L_1(\xi), \quad \varphi = L_2(\xi), \quad \zeta = \frac{L_3(\xi)}{L_4(\xi)}, \quad \theta = \frac{Q_1(\xi)}{L_4(\xi)},$$

où L est une abbreviation de fonction linéaire et Q est une abbreviation de fonction quadratique; enfin ξ est déterminée par l'équation cubique:

$$L_1(\xi) L_3(\xi) - L_2(\xi) Q_1(\xi) - c L_4(\xi) = 0.$$

33.^o cas: Supposons que les constantes soient

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_1;$$

les équations

$$\zeta \eta + 1_2 2_3 - 3_2 4_3 - 3_3 4_2 = 0, \quad 2_3 \zeta - 1_2 \eta + 3_2 4_2 - 3_3 4_3 = 0,$$

donnent deux valeurs à chacune des paramètres ζ et η ; les quantités θ et φ s'expriment en fonction de ξ par les équations

$$1_1 \eta + 1_2 \xi - 4_2 \theta - 3_2 \varphi = 0, \quad \xi \zeta - 4_3 \theta - 3_3 \varphi + 1_1 2_3 = 0;$$

et l'équation

$$\varphi \theta - 1_1 \xi + 1_2 \eta - 3_2 4_2 = 0$$

est une quadratique en ξ .

34.^o cas: Quelles fonctions des autres paramètres doivent être les constantes

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_1?$$

Des équations

$$1_2 \xi - 4_2 \theta + 3_1 \varphi - 1_1 2_1 = 0, \quad 1_1 \xi - \varphi \theta + 1_2 2_1 - 3_1 4_2 = 0,$$

on écrit les formes suivantes de ξ et θ :

$$\xi = Q_1(\varphi) | L_2(\varphi), \quad \theta = L_1(\varphi) | L_2(\varphi);$$

des équations

$$\xi \zeta + 1_2 \eta - 4_3 \theta - 3_3 4_2 = 0, \quad 1_1 \eta + 2_1 \zeta - 3_3 \varphi - 3_1 4_3 = 0,$$

on a

$$\eta = C_1(\varphi) | Q_3(\varphi), \quad \zeta = Q_2(\varphi) | Q_3(\varphi);$$

enfin l'équation

$$\zeta \eta - 1_2 \xi + 4_2 \theta - 3_3 4_3 = 0$$

est une sextique

$$L_2(\varphi) Q_2(\varphi) C_1(\varphi) - 1_2 Q_1(\varphi) Q_3^2(\varphi) + 4_2 L_1(\varphi) Q_3(\varphi) - \\ - 3_3 4_3 L_2(\varphi) Q_3^2(\varphi) = 0.$$

35.^o cas: Pour trouver les valeurs des constantes

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_2$$

on remarque que les équations

$$4_1 \theta + 2_3 \zeta = 1_1 \xi + 3_3 4_3, \quad 4_3 \theta - \xi \zeta = 1_1 2_3 - 3_3 4_1,$$

donnent

$$\theta = Q_1(\xi) | L_2(\xi), \quad \zeta = L_1(\xi) | L_2(\xi);$$

et les équations

$$3_2 \varphi - 1_2 \eta = 4_1 \theta - 1_1 \xi, \quad \theta \varphi - 1_1 \eta = 1_2 \xi - 3_2 4_1,$$

donnent

$$\varphi = Q_2(\xi) | Q_3(\xi), \quad \eta = \frac{\text{Quartique}(\xi)}{L_2(\xi) Q_3(\xi)};$$

enfin l'équation

$$\zeta \eta - 3_3 \varphi + 1_2 2_3 - 3_2 4_3 = 0$$

devient la quintique

$$\text{Quartique}(\xi) L_1(\xi) + (1_2 2_3 - 3_2 4_3) L_2^2(\xi) Q_3(\xi) - 3_3 L_2^3(\xi) Q_2(\xi) = 0$$

en ξ .

36.^o cas: Les constantes à trouver dans ce cas sont

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_2;$$

les paramètres ξ et ζ se déterminent des équations

$$1_1 \xi - 2_3 \zeta = 3_1 4_1 - 3_3 4_3, \quad \xi \zeta = 3_3 4_1 + 3_1 4_3 - 1_1 2_3;$$

η et θ sont des fonctions linéaires de φ des équations

$$1_2 \xi + 1_1 \eta - 4_1 \theta - 3_1 \varphi = 0, \quad 1_3 \xi - 4_3 \theta - 3_3 \varphi + 1_2 2_3 = 0;$$

et l'équation

$$\theta \varphi - 1_2 \eta + 2_3 \zeta - 3_2 4_3 = 0$$

devient une quadratique en φ .

37.^o cas: Il s'agit de déterminer les formes des paramètres

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_3;$$

en formant les équations de condition on trouve ξ et η immédiatement; θ et φ sont des fonctions linéaires de ζ qui se détermine par la résolution d'une quadratique.

38.^o cas: Les inconnues

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_3;$$

on construit θ et φ immédiatement; ξ et η sont des fonctions linéaires de φ qui est une racine d'une quadratique.

39.^o cas: Supposons que les constantes à déterminer sont

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_3$$

on trouve ξ et θ sans difficulté; η et ζ sont linéaire en φ , et φ est donnée par une équation quadratique

40.^o cas: Des quantités

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_1,$$

on trouve ξ et φ ; les paramètres η et ζ sont des fonctions linéaires de θ , et θ est une solution d'une quadratique.

41.^o cas: On détermine les formes des paramètres

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_2$$

au moyen de la résolution du cas 39.^o et la substitution

$$(\theta \varphi 3_1 3_3 4_1 4_2) : (\varphi \theta 4_1 4_3 3_1 3_2).$$

42.^o cas: La construction des formes des constantes

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_1$$

n'est pas si simple; des équations

$$1_2 \xi - \eta \zeta = 3_2 4_1 - 3_3 4_3, \quad \xi \zeta + 1_2 \eta = 3_2 4_3 + 3_3 4_2,$$

nous avons

$$\xi = L_1(\zeta) | Q_1(\zeta), \quad \eta = L_2(\zeta) | Q_1(\zeta);$$

les équations

$$1_1 \xi - 4_2 \theta - 3_2 \varphi + 1_2 2_1 = 0, \quad 1_1 \eta + 2_1 \zeta - 4_3 \theta - 3_3 \varphi = 0,$$

donnent

$$\theta = \frac{C_2(\zeta)}{(3_2 4_3 - 3_3 4_2) Q_1(\zeta)}, \quad \varphi = \frac{C_1(\zeta)}{(3_2 4_3 - 3_3 4_2) Q_1(\zeta)};$$

enfin l'équation

$$\theta \varphi + 1_2 \xi - 1_1 2_1 - 3_2 4_2 = 0$$

devient la sextique

$$C_1(\zeta) C_2(\zeta) + (3_2 4_3 - 3_3 4_2) \{ 1_2 L_1(\zeta) Q_1(\zeta) - (1_1 2_1 + 3_2 4_2) Q_1^2(\zeta) \} = 0.$$

43.^o cas: La solution de ce cas, savoir

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_1$$

se déduit du cas 34.^o par la substitution

$$(\theta \varphi 1_1 1_2 2_1 3_3 3_1 4_2 4_3) : (\varphi \theta 1_2 1_1 2_2 4_3 4_1 3_1 3_3).$$

44.^o cas : Ce cas

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_2,$$

est une conséquence directe du cas 34.^o et de la substitution

$$(\theta \varphi 3_3 3_1 4_2 4_3) : (\varphi \theta 4_3 4_1 3_2 3_3).$$

45.^o cas : Les formes des constantes

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_2,$$

se déterminent de la solution du cas 42.^o au moyen de la substitution

$$(1_1 1_2 2_1 3_2 4_2) : (1_2 1_1 2_3 3_1 4_1).$$

En tentant de trouver de semblables transformations dans les espaces à un plus grand nombre de dimensions, on peut chercher à déterminer les formes des fonctions qui définissent la correspondance voulue en exprimant les conditions que le déterminant correspondant sera capable de représenter le premier membre de l'équation d'une hypersphère.

Ainsi, si dans l'espace à n dimensions, la ligne droite

$$\sum_1^n \alpha_{i,j} x_j + \alpha_{i,0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

doit être transformée en sphère par la correspondance établie par les équations

$$\sum_1^n \varphi_i (X_1, X_2, \dots, X_n) x_i + \varphi_0 (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0,$$

$$\sum_1^n \psi_i (X_1, X_2, \dots, X_n) x_i + \psi_0 (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0,$$

l'équation

$$|\alpha_{1,0}, \alpha_{2,1}, \dots, \varphi_{n-1}, \psi_n| = 0$$

doit se réduire à la forme

$$\sum_1^n X_i (X_i + \beta_i) + \gamma = 0, \quad \beta_i, \gamma \text{ constantes};$$

mais cette réduction est en général impossible, ce qui est clair et de la géométrie et de la théorie des formes algébriques.

Cependant pour l'espace à quatre dimension on trouve que la transformation curieuse déterminée par les équations directrices

$$\begin{aligned}x + (Z - i W) z - (X + i Y) (w + 1) &= 0, \\y - (X - i Y) z - (Z + i W) (w + 1) &= 0\end{aligned}$$

transforme actuellement les droites arbitraires en sphères.

Les propriétés caractéristiques de cette transformation-ci se révélant sans peine en notant que la droite

$$w + l z + a = 0, \quad x + m z + b = 0, \quad y + n z + c = 0$$

est transformée en la sphère

$$\begin{vmatrix} l & 1 & a - 1 \\ Z - i W - m & -(X + i Y) & -b \\ X - i Y + n & Z + i W & c \end{vmatrix} = 0.$$

Parmi ces propriétés on peut remarquer : 1.^o que la transformation n'est pas une transformations de contact, comme le criterium de LIE le montre; 2.^o qu'elle dégénère en le transformations de LIE quand la quatrième dimension s'annule; 3.^o que la correspondance directe est (1, 1), mais que l'inverse est (1, ∞^4); 4.^o que si une droite réelle doit être transformée en une sphère la sphère se réduit à un point, mais qu'autrement le rayon de la sphère est différent de zéro.

Il n'échappera pas à l'observation du lecteur que la méthode dont on s'est servi ci-dessus peut être employée à construire des correspondances entre les lignes, les plans et les hyperplans des ordres divers d'un espace à n dimensions, et les hypersurfaces de cet espace, respectivement, non seulement dans le cas de deux équations directrices de la forme ci-dessus, mais aussi dans le cas de ν telles équations de cette forme, où ν peut avoir une valeur quelconque entre 1 et n ; en particulier le cas où $\nu = n$, quand il est possible, donne des transformations ponctuelles. Enfin on voit que ces correspondances forment des léaisons entre les géométries des hyperplans des ordres divers et la géométrie des hypersphères tout-à-fait analogues à la liaison entre la géométrie de droites et la géométrie des sphères de l'espace ordinaire.

LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT ENTRE LES SPHÈRES
DE L'ESPACE À n DIMENSIONS.

Si on désigne par $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ les coordonnées du centre, et par ρ le radius de la sphère, il faut que l'équation

$$\sum_1^n d\xi_i^2 - d\rho^2 = 0$$

soit une équation invariante sous toutes les transformations cherchées, car, de la définition d'une transformation de contact sphères tangentes doivent être changées en sphères tangentes; donc, ce qui on sait bien, le problème se réfère à la détermination des transformations conformes ponctuelles de l'espace $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \rho\sqrt{-1})$ à $n+1$ dimensions; la solution de ce problème-ci LIE a trouvé (LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, tome III), savoir que toutes ces transformations conformes constituent un groupe à $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ paramètres, engendré par les transformations infinitésimales

$$p_j, \quad x_j p_k - x_k p_j, \quad \sum_1^n x_l p_l, \quad 2x_j \sum_1^n x_l p_l - p_j \sum_1^n x_l^2, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

De la même manière on traite le problème de trouver les transformations ponctuelles entre les variétés applicables de l'espace à n dimensions; M. STAECKEL a donné la solution de ce problème dans l'espace ordinaire (*Comptes Rendus*, 1895); son raisonnement se traduit pour le cas de l'espace à n dimensions par un seul changement des indices.

Soient

$$V_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \quad V_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$$

deux variétés applicables. On se propose de déterminer toutes les transformations

$$X_{1i} = \varphi_{1i}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}),$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$X_{2i} = \varphi_{2i}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}),$$

qui changent la couple précédente en une couple de variétés

$$V_1(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}), \quad V_2(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n})$$

encore applicables.

On fait le changement de variables

$$x_{2j} = i x'_{2j}, \quad X_{2j} = i X'_{2j}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

donc il faut et il suffit que l'équation

$$\sum_1^n (d x_{1j}^2 + d x_{2j}^2) = 0$$

soit une équation invariante sous les transformations

$$X_{1j} = \varphi_{1j}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, i x'_{21}, i x'_{22}, \dots, i x'_{2n}),$$

$$X_{2j} = \varphi_{2j}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, i x'_{21}, i x'_{22}, \dots, i x'_{2n});$$

c'est-à-dire que ces équations ci définissent une représentation conforme de la variété $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x'_{21}, x'_{22}, \dots, x'_{2n})$ sur la variété $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}, X'_{21}, X'_{22}, \dots, X'_{2n})$; mais d'après le théorème de LIE toutes ces représentations conformes constituent un groupe de transformations semblable au groupe à $\frac{1}{2}(2n+1)(2n+2)$ paramètres de toutes les transformations par rayons vecteurs réciproques de l'espace à $2n$ dimensions.

À une couple réelle de surfaces S_1, S_2 ils correspondent $\infty^{\frac{1}{2}(2n+1)(2n+2)}$ couples réelles Σ_1, Σ_2 ; si on exclut les couples qui on peut faire coïncider par mouvements et par transformations de similitude, on a $\infty^{n(n+2)}$ différentes couples correspondantes.

LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT ENTRE LES LIGNES ASYMPTOTIQUES ET LES LIGNES DE COURBURE.

Il y a une autre catégorie intéressante de problèmes dans la géométrie des transformations de contact; cette catégorie se compose des questions où on cherche à trouver les transformations qui changent une surface en une surface de la manière que, à une famille des lignes remarquables sur l'une

surface corresponde une famille remarquable des lignes sur l'autre surface; par exemple, les transformations de contact entre les lignes asymptotiques, les lignes de courbure, les *D*-lignes, les cercles géodésiques, et cetera. Toutes les transformations de contact qui transforment les lignes asymptotiques en lignes asymptotiques sont bien connues; LIE a trouvé par la géométrie que la famille consiste de transformations projectives et dualistiques. Une conséquence la plus importante de la transformation de LIE entre les lignes droites et les sphères est que ses formules font correspondre aux lignes asymptotiques lignes de courbure. LIE a remarqué aussi que toutes les transformations de contact qui transforment les lignes asymptotiques en lignes de courbure font correspondre sphères aux lignes droites. (Voiie *Mathematische Annalen*, tome V; LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, tome II.) LIE s'est proposé de déterminer toutes les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure; et M. DARBOUX donne le résultat suivant, qui résume les recherches de LIE: Les transformations de contact les plus générales qui conservent les lignes de courbure sont celles qui soumettent les six coordonnées homogènes d'une sphère à la transformation linéaire la plus générale qui conserve la relation quadratique entre les coordonnées. (*Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, tome I, p. 63.) On se propose ici de faire la détermination analytique de toutes les transformations des deux classes de transformations de contact: 1.^o les transformations qui changent les lignes asymptotiques en lignes de courbure; 2.^o les transformations qui conservent les lignes asymptotiques.

LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT QUI TRANSFORMENT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES
EN LIGNES DE COURBURE.

Soit

$$\left. \begin{aligned} X &= X(x, y, z, p, q), & Y &= Y(x, y, z, p, q), & Z &= Z(x, y, z, p, q) \\ P &= P(x, y, z, p, q), & Q &= Q(x, y, z, p, q) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

la transformation la plus générale cherchée.

On a les relations établies par les théorèmes de LIE, DARBOUX et

MAYER

$$\left. \begin{aligned} [P Q] &= [P Y] = [Q X] = [X Y] = [X Z] = [Y Z] = 0, \\ [P X] &= [Q Y] = \frac{1}{P} [P Z] = \frac{1}{Q} [Q Z] = \rho = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

où

$$\left. \begin{aligned} [\Phi \Psi] &= \Phi_p \Psi^x - \Phi^x \Psi_p + \Phi_q \Psi^y - \Phi^y \Psi_q, \\ \Phi_p &= \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad \Phi_q = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad \Phi^x = \Phi_x + p \Phi_z, \quad \Phi^y = \Phi_y + q \Phi_z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Pour que les lignes asymptotiques se transforment en lignes de courbure il faut que la forme

$$\left. \begin{aligned} \Omega &\equiv \{ (1 + P^2) S - P Q R \} d X^2 + \\ &+ \{ (1 + P^2) T - (1 + Q^2) R \} d X d Y + \{ P Q T - (1 + Q^2) S \} d Y^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

soit égale à zéro en conséquence de l'équation

$$r d x^2 + 2 s d x d y + t d y^2 = 0. \quad (5)$$

Pour développer la forme (4) on observe d'abord qu'on a (Voi- re la note de M. VIVANTI, *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, tome V.)

$$R = \frac{\varphi(P, Y)}{\varphi(X, Y)}, \quad S = \frac{\varphi(X, P)}{\varphi(X, Y)} = \frac{\varphi(Q, Y)}{\varphi(X, Y)}, \quad T = \frac{\varphi(X, Q)}{\varphi(X, Y)},$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(U, V) &= U^{(x)} V^{(y)} - U^{(y)} V^{(x)} \equiv \\ &\equiv \begin{vmatrix} U^x & V^x \\ U^y & V^y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_p & V_p \\ U_y & V_y \end{vmatrix} r + \left\{ \begin{vmatrix} U^x & V^x \\ U_p & V_p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_q & V_q \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \right\} s + \\ &+ \begin{vmatrix} U^x & V^x \\ U_q & V_q \end{vmatrix} t + \begin{vmatrix} U_p & V_p \\ U_q & V_q \end{vmatrix} (r t - s^2), \\ U^{(x)} &= U^x + r U_p + s U_q, \quad U^{(y)} = U^y + s U_p + t U_q; \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} d X^2 &= \{ X^{(x)} d x + X^{(y)} d y \}^2, \\ d X d Y &= \{ X^{(x)} d x + X^{(y)} d y \} \{ Y^{(x)} d x + Y^{(y)} d y \}, \\ d Y^2 &= \{ Y^{(x)} d x + Y^{(y)} d y \}^2. \end{aligned}$$

En posant

$$\left. \begin{aligned} \varphi(P, Y) &= A' + B' r + C' s + D' t + E' (r t - s^2) \equiv \varphi(X, Y) R, \\ \varphi(X, P) &= A'' + B'' r + C'' s + D'' t + E'' (r t - s^2) \equiv \varphi(X, Y) S, \\ \varphi(X, Q) &= A''' + B''' r + C''' s + D''' t + E''' (r t - s^2) \equiv \varphi(X, Y) T, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} K''' P Q - K'' (1 + Q^2) &= K_1, \\ K''' (1 + P^2) - K' (1 + Q^2) &= K_2, \\ K'' (1 + P^2) - K' P Q &= K_3, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

et remarquant en passant que on peut avoir les équations simultanées

$$K_1 = K_2 = K_3 = 0, \quad (7)$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 + P^2 & -P Q \\ 1 + P^2 & 0 & -(1 + Q^2) \\ P Q & -(1 + Q^2) & 0 \end{vmatrix} \quad (8)$$

étant égal à zéro identiquement, on trouve pour la fonction Ω la forme suivante

$$\Omega = \left\{ \begin{aligned} &M_1 (Y^{(x)})^2 + M_2 X^{(x)} Y^{(x)} + M_3 (X^{(x)})^2 \} d x^2 \\ &+ \{ 2 M_1 Y^{(x)} Y^{(y)} + M_2 (X^{(x)} Y^{(y)} + X^{(y)} Y^{(x)}) + \\ &\quad + 2 M_3 X^{(x)} X^{(y)} \} d x d y \\ &+ \{ M_1 (Y^{(y)})^2 + M_2 Y^{(y)} X^{(y)} + M_3 (X^{(y)})^2 \} d y^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

où

$$M_i = A_i + B_i r + C_i s + D_i t + E_i (r t - s^2). \quad (10)$$

Donc on aura

$$\Omega = (\varphi_1 r + \varphi_4) d x^2 + (2 \varphi_2 s + \varphi_5) d x d y + (\varphi_3 t + \varphi_6) d y^2, \quad (11)$$

où

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 2 X^x X_p A + X^{x^2} B + (X_p^2 A + 2 X^x X_p B_3) r + \\ &\quad + (2 X_p X_q A + 2 X^x X_q B + 2 X^x X_p C) s + \\ &\quad + (2 X^x X_p D + X^{x^2} E) t \\ &+ X_p^3 B r^2 + (2 X_p X_q \dot{B} + X_p^2 C) r s + \\ &\quad + (X_p^2 D + 2 X^x X_p E) r t + (2 X_p X_q D + 2 X^x X_q E) s t \\ &+ (X_q^2 B + 2 X_p X_q C - 2 X^x X_p E) s^2 + \\ &\quad + (X_p^2 E r + 2 X_p X_q E s) (r t - s^2) + X_q^2 E s^2 t; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
2\varphi_2 = & (2 X^x X_p + 2 X^y X_q) A + 2 X^x X^y C + \\
& + \{ 2 X_p^2 A + (2 X^x X_p + 2 X^y X_q) B + 2 X^y X_p C \} r \\
& + \{ 2 X_p X_q A + (2 X^x X_p + 2 X^y X_q) C - 2 X^x X^y E \} s + \\
& + \{ 2 X_q^2 A + 2 X^x X_q C + (2 X^x X_p + 2 X^y X_q) D \} t \\
& + 2 X_p^2 B r^2 + (2 X_p X_q B + 2 X_p^2 C - 2 X^y X_p E) r s + \\
& + \{ 2 X_q^2 B + 2 X_p X_q C + 2 X_p^2 D + \\
& + (2 X^x X_p + 2 X^y X_q) E \} r t \\
& + \{ 2 X_p X_q C - (2 X^x X_p + 2 X^y X_q) E \} s^2 + \\
& + \{ 2 X_q^2 C + 2 X_p X_q D - 2 X^x X_q E \} s t + 2 X_q^2 D t^2 \\
& + \{ 2 X_p^2 E r + 2 X_p X_q E s + 2 X_q^2 E t \} (r t - s^2);
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 = & 2 X^y X_q A + X^y^2 D + (2 X^y X_q B + X^y^2 E) r + \\
& + (2 X_p X_q A + 2 X^y X_q C + 2 X^y X_p D) s \\
& + (X_q^2 A + 2 X^y X_q D) t + (2 X_p X_q B + 2 X^y X_p E) r s + \\
& + (2 X_q^2 B + 2 X^y X_q E) r t \\
& + (2 X_p X_q C + X_p^2 D - 2 X^y X_q E) s^2 + (X_q^2 C + 2 X_p X_q D) s t + \\
& + X_q^2 E t^2 + X_p^2 E r s^2 + (2 X_p X_q s + X_q^2 t) E (r t - s^2);
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_4 = & X^x^2 A + (2 X^x X_q A + X^x^2 C) s + X^x^2 D t + \\
& + (X_q^2 A + 2 X^x X_q C - X^x^2 E) s^2 + 2 X^x X_q D s t \\
& + (X_q^2 C - 2 X^x X_q) s^3 + X_q^2 D s^2 t - X_q^2 E s^4;
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_5 = & 2 X^x X^y A + (2 X^y X_p A + 2 X^x X^y B) r + \\
& + (2 X^x X_q A + 2 X^x X^y D) t \\
& + (2 X_p X_q A + 2 X^x X_q B + 2 X^y X_p D + 2 X^x X^y E) r t + \\
& + 2 X^y X_p B r^2 + 2 X^x X_q D t^2 \\
& + (2 X_p X_q D + 2 X^x X_q E) r t^2 + (2 X_p X_q B + 2 X^y X_p E) r^2 t + \\
& + 2 X_p X_q E r^2 t^2;
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_6 = & X^y^2 A + X^y^2 B r + (2 X^y X_p A + X^y^2 C) s + 2 X^y X_p B r s + \\
& + (X_p^2 A + 2 X^y X_p C - X^y^2 E) s^2 \\
& + X_p^2 B r s^2 + (X_p^2 C - 2 X^y X_p) s^3 - X_p^2 E s^4;
\end{aligned} \tag{17}$$

où

$$\begin{aligned}
 X^{\omega^2} K &\equiv X^{\omega^2} K_3 + X^{\omega} Y^{\omega} K_2 + Y^{\omega^2} K_1, \\
 X_p^2 K &\equiv X_p^2 K_3 + X_p Y_p K_2 + Y_p^2 K_1, \\
 X^{y^2} K &\equiv X^{y^2} K_3 + X^y Y^y K_2 + Y^{y^2} K_1, \\
 X_q^2 K &\equiv X_q^2 K_3 + X_q Y_q K_2 + Y_q^2 K_1, \\
 2 X^{\omega} X^y K &\equiv 2 X^{\omega} X^y K_3 + (X^{\omega} Y^y + X^y Y^{\omega}) K_2 + 2 Y^{\omega} Y^y K_1, \\
 2 X_p X_q K &\equiv 2 X_p X_q K_3 + (X_p Y_q + X_q Y_p) K_2 + 2 Y_p Y_q K_1, \\
 2 X^y X_p K &\equiv 2 X^y X_p K_3 + (X^y Y_p + X_p Y^y) K_2 + 2 Y^y Y_p K_1, \\
 2 X^{\omega} X_q K &\equiv 2 X^{\omega} X_q K_3 + (X^{\omega} Y_q + X_q Y^{\omega}) K_2 + 2 Y^{\omega} Y_q K_1, \\
 2 (X^{\omega} X_p \pm X^y X_q) K &\equiv 2 (X^{\omega} X_p \pm X^y X_q) K_3 + \\
 &\quad + (X^{\omega} Y_p + X_p Y^{\omega} \pm X^y Y_q \pm X_q Y^y) K_2 + \\
 &\quad + 2 (Y^{\omega} Y_p \pm Y^y Y_q) K_1.
 \end{aligned} \tag{18}$$

En comparant l'équation

$$\Omega = 0 \tag{19}$$

avec l'équation (5) on trouve

$$\varphi(X, Y) = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0 \tag{20}$$

pour toutes les valeurs des quantités r, s, t ; ce qui donne les équations suivantes pour obtenir les formes des fonctions X, Y, P, Q :

$$\begin{aligned}
 X^{\omega^2} A &= 0, \tag{21} & X_p^2 E &= 0, \tag{24} & X^{\omega^2} D &= 0, \tag{27} & X^{y^2} B &= 0, \tag{30} \\
 2 X^{\omega} X^y A &= 0, \tag{22} & 2 X_p X_q E &= 0, \tag{25} & 2 X^{\omega} X_q D &= 0, \tag{28} & 2 X^y X_p B &= 0, \tag{31} \\
 X^{y^2} A &= 0, \tag{23} & X_q^2 E &= 0, \tag{26} & X_q^2 D &= 0, \tag{29} & X_p^2 B &= 0, \tag{32} \\
 2 X^y X_p A + 2 X^{\omega} X^y B &= 0, \tag{33} \\
 2 X_p X_q B + 2 X^y X_p E &= 0, \tag{38} \\
 2 X^{\omega} X_q A + X^{\omega^2} C &= 0, \tag{34} \\
 2 X^{\omega} X_q C + 2 (X^{\omega} X_p - X^y X_q) D &= 0, \tag{39} \\
 2 X^y X_p A + X^{y^2} C &= 0, \tag{35} \\
 X_p^2 C - 2 X^y X_p E &= 0, \tag{40} \\
 2 X^{\omega} X_q A + 2 X^{\omega} X^y D &= 0, \tag{36} \\
 X_q^2 C - 2 X^{\omega} X_q E &= 0, \tag{41} \\
 2 (X^{\omega} X_p - X^y X_q) B - 2 X^y X_p C &= 0, \tag{37} \\
 2 X_p X_q D + 2 X^{\omega} X_q E &= 0, \tag{42}
 \end{aligned}$$

$$2 (X^x X_p - X^y X_q) A + 2 X^{x^2} B - 2 X^x X^y C = 0, \quad (43)$$

$$2 (X^x X_p - X^y X_q) A + 2 X^x X^y C - 2 X^{y^2} D = 0, \quad (44)$$

$$X_p^2 A + 2 X^y X_p C - X^{y^2} E = 0, \quad (45)$$

$$X_q^2 A + 2 X^x X_q C - X^{x^2} E = 0, \quad (46)$$

$$2 X_q^2 B + 2 X_p X_q C - 2 (X^x X_p - X^y X_q) E = 0, \quad (47)$$

$$2 X_p X_q C + 2 X_p^2 D + 2 (X^x X_p - X^y X_q) E = 0, \quad (48)$$

$$2 X_p X_q A + 4 X^x X_q B + 2 (X^x X_p - X^y X_q) C + 2 X^x X^y E = 0, \quad (49)$$

$$2 X_p X_q A + 2 X^x X_q B + 2 X^y X_p D + 2 X^x X^y E = 0. \quad (50)$$

Il faut observer que les équations (43) et (44) ne peuvent pas être égales à zéro identiquement parce que elles résultent des termes du degré zéro des différences

$$\varphi_1 - \varphi_2, \quad \varphi_2 - \varphi_3.$$

La détermination des formes des fonctions X, Y, P, Q au moyen de ces équations de condition est assez difficile, cependant on peut résoudre le problème indirectement. Nous avons déterminé dans une Note précédente les transformations de contact entre les lignes droites et les sphères, et LIE a remarqué que toutes les transformations qui changent les lignes asymptotiques en lignes de courbure transforment aussi les lignes droites en sphères, donc pour trouver les transformations entre les lignes asymptotiques et les lignes de courbure il faut employer seulement les opérations de différentiation et de substitution. Le procédé est simple mais très-laborieux, et il faut réserver les résultats de cette computation longue pour une autre communication. On conclut néanmoins facilement au résultat que les fonctions X, Y, P, Q définies par les équations

$$\omega_1 = \sum_j^4 (a_{1j} X + i a_{1j} Y + a_{2j} Z + a_{3j}) x_j,$$

$$\omega_2 = \sum_j^4 (a_{2j} X - i a_{2j} Y - a_{1j} Z + a_{4j}) x_j,$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = 1, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\frac{\omega_1^x}{\omega_3^x} = \frac{\omega_1^y}{\omega_3^y} = \frac{\omega_1^x}{\omega_2^x} = \frac{\omega_1^y}{\omega_2^y},$$

ou par les équations

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \sum_1^4 (a_{1j} X - i a_{1j} Y + a_{2j} Z + a_{3j}) x_j, \\ \omega_4 &= \sum_1^4 (a_{2j} X + i a_{2j} Y - a_{1j} Z + a_{4j}) x_j, \\ x_1 &= x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = 1, \quad i = \sqrt{-1}, \\ \frac{\omega_3^x}{\omega_4^x} &= \frac{\omega_3^y}{\omega_4^y} = \frac{\omega_3^z}{\omega_4^z} = \frac{\omega_3^Y}{\omega_4^Y},\end{aligned}$$

constituent deux familles de ∞^{15} transformations de contact qui changent les lignes asymptotiques en lignes de courbure. Chaque famille contient la transformation de LIE; la première famille la donne pour

$$a_{14} = a_{21} = a_{33} = a_{42} = 1,$$

et toutes les autres constantes égales à zéro; on la trouve dans la deuxième famille en posant

$$a_{11} = -a_{24} = a_{32} = -a_{43} = 1,$$

et toutes les autres constantes égales à zéro.

Dans certains cas on peut réduire les équations de condition et en nombre et en forme. Considérons les déterminants

$$\begin{aligned}G &\equiv \begin{vmatrix} X^{xx} & X^x Y^x & Y^{xx} \\ 2 X^x X^y & X^x Y^y + X^y Y^x & 2 Y^x Y^y \\ X^{yy} & X^x Y^y & Y^{yy} \end{vmatrix}, \\ H &\equiv \begin{vmatrix} X_p^2 & X_p Y_p & Y_p^2 \\ 2 X_p X_q & X_p Y_q + X_q Y_p & 2 Y_p Y_q \\ X_q^2 & X_q Y_q & Y_q^2 \end{vmatrix}, \\ I &\equiv \begin{vmatrix} X^{xx} & X^x Y^x & Y^{xx} \\ 2 X^x X_q & X^x Y_q + X_q Y^x & 2 Y^x Y_q \\ X_q^2 & X_q Y_q & Y_q^2 \end{vmatrix}, \\ J &\equiv \begin{vmatrix} X^{yy} & X^y Y^y & Y^{yy} \\ 2 X^y X_p & X^y Y_p + X_p Y^y & 2 Y^y Y_p \\ X_p^2 & X_p Y_p & Y_p^2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Les cas suivants s'excluent

$$1.^{\circ} \quad G \neq 0, \quad H \neq 0, \quad I \neq 0, \quad J \neq 0;$$

$$2.^{\circ} \quad G \neq 0, \quad H \neq 0, \quad I = 0, \quad J \neq 0;$$

$$3.^{\circ} \quad G \neq 0, \quad H = 0, \quad I \neq 0, \quad J \neq 0;$$

$$4.^{\circ} \quad G = 0, \quad H \neq 0, \quad I \neq 0, \quad J \neq 0;$$

$$5.^{\circ} \quad G \neq 0, \quad H = 0, \quad I = 0, \quad J \neq 0;$$

$$6.^{\circ} \quad G = 0, \quad H \neq 0, \quad I = 0, \quad J \neq 0;$$

$$7.^{\circ} \quad G \neq 0, \quad H \neq 0, \quad I \neq 0, \quad J = 0;$$

$$8.^{\circ} \quad G \neq 0, \quad H = 0, \quad I \neq 0, \quad J = 0;$$

$$9.^{\circ} \quad G = 0, \quad H \neq 0, \quad I \neq 0, \quad J = 0;$$

en effet si on $J \neq 0$, il existaient les trois équations

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0;$$

de plus les équations (33), (35), (37), (38) et (40) donnent

$$X^y{}^z C = 2 X^y X_p C = X_p^2 C = 0;$$

donc on a

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0;$$

de ces équations-ci et des équations (43), (44), (49), (50), (47) et (48) on trouve

$$X^y{}^z D = 2 X^y X_p D = X_p^2 D = 0;$$

donc

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0.$$

Mais les équations

$$B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

et les équations

$$A_1 = A_2 = A_3 = E_1 = E_2 = E_3 = 0$$

ne peuvent pas exister simultanément; car si toutes les formes A_1, A_2, A_3 étaient égales à zéro, les équations (43) et (44) donneraient

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = 0.$$

D'ailleurs si nous avons

$$J \neq 0, \quad E_1 = E_2 = E_3 = B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0,$$

les équations (23), (33) et (45) donnent

$$X^y A = 2 X^y X_p A = X_p^2 A = 0 ;$$

donc

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0 ;$$

ainsi toutes les quantités E_1, E_2, E_3 ne sont égales à zéro et on a

$$G = H = 0 ;$$

donc les cas 1.^o, 2.^o, 3.^o, 4.^o, 5.^o, 6.^o disparaissent.

Maintenant supposons que $I = 0$; ainsi

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0 ;$$

des équations (34), (36), (39), (41) et (42) on trouve

$$X^x C = 2 X^x X_q C = X_q^2 C = 0 ;$$

donc

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0 ;$$

encore des équations (43), (44), (49), (50), (47) et (48) on a

$$X^x B = 2 X^x X_q B = X_q^2 B = 0,$$

qui demandent que

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0.$$

Outre cela on observe que, si on a

$$I \neq 0, \quad E_1 = E_2 = E_3 = 0,$$

on trouvait des équations (21), (34), et (46)

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

ce qui n'est pas possible; ainsi si on a $I \neq 0$, on a aussi les équations

$$G = H = 0,$$

et les cas 7.^o, 8.^o, 9.^o s'excluent. Ils restent les sept cas

$$10.^{\circ} \quad G = 0, \quad H = 0, \quad I = 0, \quad J = 0 ;$$

$$11.^{\circ} \quad G \neq 0, \quad H = 0, \quad I = 0, \quad J = 0 ;$$

$$12.^{\circ} \quad G = 0, \quad H \neq 0, \quad I = 0, \quad J = 0 ;$$

$$13.^{\circ} \quad G = 0, \quad H = 0, \quad I \neq 0, \quad J = 0 ;$$

$$14.^{\circ} \quad G = 0, \quad H = 0, \quad I = 0, \quad J \neq 0 ;$$

$$15.^{\circ} \quad G = 0, \quad H = 0, \quad I \neq 0, \quad J \neq 0 ;$$

$$16.^{\circ} \quad G \neq 0, \quad H \neq 0, \quad I = 0, \quad J = 0.$$

Considérons encore les deux cas particuliers suivants

$$B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0; \quad (i)$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = C_1 = C_2 = C_3 = E_1 = E_2 = E_3 = 0; \quad (ii)$$

pour le premier cas on a aussi les équations

$$\left. \begin{aligned} X^x A &= 2 X^x X^y A = X^{y^2} A = 2 X^x X_q A = 2 X^y X_p A = \\ &= 2 (X^x X_p - X^y X_q) A = 0, \\ X_p^2 E &= 2 X_p X_q E = X_q^2 E = 2 X^x X_q E = 2 X^y X_p E = \\ &= 2 (X^x X_p - X^y X_q) E = 0, \\ X_p^2 A - X^{y^2} E &= 2 X_p X_q A + 2 X^x X^y E = X_q^2 A - X^{x^2} E = 0; \end{aligned} \right\} \quad (iii)$$

pour le deuxième cas on a des équations tout-à-fait semblables.

Le premier cas donne une démonstration analytique de la propriété de la transformation de LIE. En effet, les équations définissantes de la transformation de LIE sont

$$\begin{aligned} X + i Y &= -z - x \frac{px + qy}{q - x}, \quad X - i Y = \frac{p + y}{q - x}, \quad Z = \frac{px + py}{q - x}, \\ P &= \frac{qx - 1}{q + x}, \quad Q = -i \frac{qx + 1}{q + x}; \end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned} X^x &= \frac{1}{2} \frac{(p + y)(1 - q^2)}{(q - x)^2}, \quad X^y = \frac{1}{2} \frac{1 - q^2}{q - x}, \\ X_p &= \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{q - x}, \quad X_q = -\frac{1}{2} \frac{(1 - x^2)(p + y)}{(q - x)^2}, \\ Y^x &= \frac{i}{2} \frac{(p + y)(1 + q^2)}{(q - x)^2}, \quad Y^y = \frac{i}{2} \frac{1 + q^2}{q - x}, \\ Y_p &= \frac{i}{2} \frac{(1 + x^2)}{q - x}, \quad Y_q = -\frac{i}{2} \frac{(1 + x^2)(p + y)}{(q - x)^2}, \\ P^x &= \frac{1 + q^2}{(q + x)^2}, \quad P^y = 0, \quad P_p = 0, \quad P_q = \frac{1 + x^2}{(q + x)^2}, \\ Q^x &= \frac{i(1 - q^2)}{(q + x)^2}, \quad Q^y = 0, \quad Q_p = 0, \quad Q_q = \frac{(1 - x^2)(q^2 - 1)}{(q + x)^2}. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} f A' &= \alpha', \quad f A'' = \alpha'', \quad f A''' = \alpha''', \quad f B' = \beta', \quad f B'' = \beta'', \quad f B''' = \beta''', \\ f C' &= \gamma', \quad f C'' = \gamma'', \quad f C''' = \gamma''', \\ g D' &= \delta', \quad g D'' = \delta'', \quad g D''' = \delta''', \quad f E' = \epsilon', \quad f E'' = \epsilon'', \quad f E''' = \epsilon''', \end{aligned}$$

où

$$f = 2(q-x)(q+x)^2, \quad g = \frac{2(q-x)^2(q+x)^2}{p+y},$$

nous avons

$$\alpha' = i(1+q^2)^2, \quad \alpha'' = q^4 - 1, \quad \alpha''' = -i(q^2 - 1)^2, \\ \beta' = \beta'' = \beta''' = 0,$$

$$\gamma' = i(1+x^2)(1+q^2), \quad \gamma'' = q^2x^2 - 1, \quad \gamma''' = -i(1-x^2)(1-q^2), \\ \delta' = -i(1+x^2)(1+q^2), \quad \delta'' = 1 - q^2x^2, \quad \delta''' = i(1-x^2)(1-q^2), \\ \varepsilon' = -i(1+x^2)^2, \quad \varepsilon'' = 1 - x^4, \quad \varepsilon''' = i(1+x^2)^2;$$

donc

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{(1-q^2)^2}{(q+x)^3}, \quad A_2 = \frac{i(1-q^4)}{(q+x)^3}, \quad A_3 = \frac{1}{2} \frac{(1+q^2)^2}{(q+x)^3}, \\ E_1 = -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^2}{(q+x)^3}, \quad E_2 = \frac{i(1-x^4)}{(q+x)^3}, \quad E_3 = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^2}{(q+x)^3}, \\ B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0,$$

et nous voyons sans difficulté que les autres équations de condition sont satisfaites et ensuite que la transformation de LIE changeant les lignes asymptotiques en lignes de courbure.

On remarque en passant qu'on peut attendre la disparition de plusieurs déterminants des équations du système particulier (iii); trois de ces déterminants se réduisent aux formes simples, savoir

$$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = 4 \begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^x & X_p \\ Y^x & Y_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^y & X_q \\ Y^y & Y_q \end{vmatrix}, \\ (\lambda_2, \mu_2, \nu_2) = 4 \begin{vmatrix} X_p & Y_p \\ X_q & Y_q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^x & X_p \\ Y^x & Y_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^y & X_q \\ Y^y & Y_q \end{vmatrix}, \\ (\lambda_3, \mu_3, \nu_3) = 4 [X, Y] \begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_p & Y_p \\ X_q & Y_q \end{vmatrix},$$

où

$$\lambda_1 = 2 X^x X^y, \quad \mu_1 = X^x Y^y + X^y Y^x, \quad \nu_1 = 2 Y^x Y^y, \\ \lambda_2 = 2 X_p X_q, \quad \mu_2 = X_p Y_q + X_q Y_p, \quad \nu_2 = 2 Y_p Y_q,$$

$$\lambda_3 = 2 (X^x X_p - X^y X_q), \quad \mu_3 = X^x Y_p + X_p Y^x - X^y Y_q - X_q Y^y, \\ \nu_3 = 2 (Y^x Y_p - Y^y Y_q),$$

$$(\lambda_i, \mu_i, \nu_i) = \begin{vmatrix} \lambda_i & \mu_i & \nu_i \\ 2 X^y X_p & X_p Y^y + X^y Y_p & 2 Y^y Y_p \\ 2 X^x X_q & X_q Y^x + X^x Y_q & 2 Y^x Y_q \end{vmatrix};$$

pour la transformation de LIE on a

$$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = (\lambda_2, \mu_2, \nu_2) = (\lambda_3, \mu_3, \nu_3) = 0,$$

parce que on a les équations

$$\begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_p & Y_p \\ X_q & Y_q \end{vmatrix} = 0.$$

Pour une transformation de contact quelconque on a

$$[X Y] = 0;$$

donc la forme du déterminant $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ montre qu'on a

$$\begin{vmatrix} X^y X_p & X^y Y_p + X_p Y^y & Y^y Y_p \\ X^x X_p - X^y X_q & X^x Y_p + X_p Y^x - X^y Y_q - X_q Y^y & Y^x Y_p - Y^y Y_q \\ X^x X_q & X^x Y_q + X_q Y^x & Y^x Y_q \end{vmatrix} = 0$$

pour une transformation de contact quelconque.

Encore on observe que les quantités $A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3$ dans la transformation de LIE satisfaisaient à la relation

$$K_2^3 - 4 K_3 K_1 = 0;$$

pourque cette relation soit vraie pour les équations

$$2 X^y X_p K_3 = 2 X^x X_q K = 0$$

il est nécessaire et suffisant que la relation

$$\begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_p & X_q \\ Y_p & Y_q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^x X_p \\ Y^x Y_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^y X_q \\ Y^y Y_q \end{vmatrix} = 0$$

ait lieu; en vertu de l'équation $[X Y] = 0$, la dernière relation s'écrit dans l'une forme et l'autre

$$\begin{vmatrix} X^x X_p \\ Y^x Y_p \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} X^x X^y \\ Y^x Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_p X_q \\ Y_p Y_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X^y X_q \\ Y^y Y_q \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} X^x X^y \\ Y^x Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_p X_q \\ Y_p Y_q \end{vmatrix} = 0.$$

TRANSFORMATIONS DE CONTACT QUI CHANGENT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES
EN LIGNES ASYMPTOTIQUES.

La forme

$$\Phi \equiv R dX^2 + 2 S dX dY + T dY^2 = 0$$

devient

$$(\psi_1 r + \psi_4) dx^2 + (2\psi_2 + \psi_5) dx dy + (\psi_3 t + \psi_6) dy^2 = 0$$

où

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$$

se dérivent immédiatement des fonctions de la note précédente

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6,$$

respectivement, en posant

$$A', B', C', D', E', \quad A'', B'', C'', D'', E'', \quad A''', B''', C''', D''', E'''$$

au lieu de

$$A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, \quad A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, \quad A_1, B_1, C_1, D_1, E_1,$$

respectivement, et en écrivant

$$X^\infty A \equiv X^\infty A' + 2 X^\infty Y^\infty A'' + Y^\infty A''',$$

$$X_p^2 A \equiv X_p^2 A' + 2 X_p Y_p A'' + Y_p^2 A''',$$

$$X^\infty X^y A \equiv X^\infty X^y A' + (X^\infty Y^y + X^y Y^\infty) A'' + Y^\infty Y^y A''',$$

$$X_p X_q A \equiv X_p X_q A' + (X_p Y_q + X_q Y_p) A'' + Y_p Y_q A''',$$

$$X^y A \equiv X^y A' + 2 X^y Y^y A'' + Y^y A''',$$

$$X_q^2 A \equiv X_q^2 A' + 2 X_q Y_q A'' + Y_q^2 A''',$$

$$X^\infty X_p A \equiv X^\infty X_p A' + (X^\infty Y_p + X_p Y^\infty) A'' + Y^\infty Y_p A''',$$

$$X^y X_p A \equiv X^y X_p A' + (X^y Y_p + X_p Y^y) A'' + Y^y Y_p A''',$$

$$X^\infty X_q A \equiv X^\infty X_q A' + (X^\infty Y_q + X_q Y^\infty) A'' + Y^\infty Y_q A''',$$

$$X^y X_q A \equiv X^y X_q A' + (X^y Y_q + X_q Y^y) A'' + Y^y Y_q A''';$$

Pour que l'équation $\Phi = 0$ soit une conséquence de l'équation

$$r dx^2 + 2 s dx dy + t dy^2 = 0$$

il faut que les relations

$$\varphi(X, Y) = 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0, \quad \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0$$

aient lieu pour toutes les valeurs de r, s, t ; donc on trouve les équations suivantes pour les fonctions X, Y, P, Q :

$$\begin{aligned} X^{\omega^2} A &= X^{\omega} X^y A = X^{y^2} A = 0, \\ X^{y^2} B &= X^y X_p B = X_p^2 B = 0, \\ X^{\omega^2} D &= X^{\omega} X_q D = X_q^2 D = 0, \\ X_p^2 E &= X_p X_q E = X_q^2 E = 0, \\ X^y X_p A + X^{\omega} X^y B &= 0, \\ X_p X_q B + X^y X_p E &= 0, \\ 2 X^{\omega} X_q A + X^{\omega^2} C &= 0, \\ X^{\omega} X_q C + (X^{\omega} X_p - X^y X_q) D &= 0, \\ 2 X^y X_p A + X^{y^2} C &= 0, \\ X_p^2 C - 2 X^y X_p E &= 0, \\ (X^{\omega} X_p - X^y X_q) B - X^y X_p C &= 0, \\ X_q^2 C - 2 X^{\omega} X_q E &= 0, \\ X^{\omega} X_q A + X^{\omega} X^y D &= 0, \\ X_p X_q D + X^{\omega} X_q E &= 0, \\ (X^{\omega} X_p - X^y X_q) A + X^{\omega^2} B - X^{\omega} X^y C &= 0, \\ X_p^2 A + 2 X^y X_p C - X^{y^2} E &= 0, \\ (X^{\omega} X_p - X^y X_q) A + X^{\omega} X^y C - X^{y^2} D &= 0, \\ X_q^2 A + 2 X^{\omega} X_q C - X^{\omega^2} E &= 0, \\ X_q^2 B + X_p X_q C - (X^{\omega} X_p - X^y X_q) E &= 0, \\ X_p X_q A + 2 X^{\omega} X_q B + (X^{\omega} X_p - X^y X_q) C + X^{\omega} X^y E &= 0, \\ X_p X_q C + X_p^2 D + (X^{\omega} X_p - X^y X_q) E &= 0, \\ X_p X_q A + X^{\omega} X_q B + X^y X_p D + X^{\omega} X^y E &= 0. \end{aligned}$$

Soient les transformations des transformations ponctuelles; il faut d'abord que

$$X_p = X_q = Y_p = Y_q = Z_p = Z_q = 0.$$

Les équations de condition se réduisent aux équations suivantes

$$\begin{aligned} X^{x^2} A = X^x X^y A = X^{y^2} A = 0, \quad X^x X^y B = X^{y^2} B = 0, \\ X^{x^2} C = X^{y^2} C = 0, \quad X^{x^2} D = X^x X^y D = 0, \\ X^{x^2} E = X^x X^y E = X^{y^2} E = 0, \quad X^{x^2} B - X^x X^y C = 0, \\ X^x X^y C - X^{y^2} D = 0; \end{aligned}$$

d'ailleurs

$$\begin{aligned} A' &= Y^y P^x - Y^x P^y, & B' &= Y^y P_p, & C' &= Y^y P_q - Y^x P_p, \\ & & D' &= -Y^x P_q, & E' &= 0, \\ A'' &= X^x P_y - X^y P_x, & B'' &= -X^y P_p, & C'' &= X^x P_p - X^y P_q, \\ & & D'' &= X^x P_q, & E'' &= 0, \\ A''' &= X^x Q_y - X^y Q_x, & B''' &= -X^y Q_p, & C''' &= X^x Q_p - X^y Q_q, \\ & & D''' &= X^x Q_q, & E''' &= 0. \end{aligned}$$

Il faut distinguer deux cas suivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X^{x^2} & 2 X^x Y^x & Y^{x^2} \\ X^x X^y & X^x X^y + X^y Y^x & Y^x Y^y \\ X^{y^2} & 2 X^y Y^y & Y^{y^2} \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro ou différent de zéro. Ce déterminant est égal à

$$\Delta^3 \equiv \begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix}^3 \equiv - \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ p & q & -1 \end{vmatrix}^3.$$

Considérons le cas où $\Delta = 0$; en observant que pour une transformation ponctuelle quelconque

$$\pi(X, Y) P = \pi(Z, Y), \quad \pi(X, Y) Q = \pi(X, Z)$$

où

$$\pi(M, N) \equiv \begin{vmatrix} M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \\ p & q & -1 \end{vmatrix},$$

on voit que les fonctions P et Q deviennent ou infinies ou indéterminées;

donc on peut avoir seulement

$$\Delta \neq 0 ;$$

il suit que

$$Y^y P^x - Y^x P^y = X^x P^y - X^y P^x = X^x Q^y - X^y Q^x = 0 ;$$

c'est-à-dire

$$\frac{X^x}{X^y} = \frac{Y^x}{Y^y} = \frac{P^x}{P^y} = \frac{Q^x}{Q^y} ;$$

d'ailleurs des équations

$$[P, Y] = [Q, X] = 0$$

on trouve, dans le cas de transformations ponctuelles

$$\frac{X^x}{X^y} = -\frac{Q_q}{Q_p}, \quad \frac{Y^x}{Y^y} = -\frac{P_q}{P_p} ;$$

mais les relations

$$\frac{X^x}{X^y} = -\frac{P_q}{P_p}, \quad \frac{Y^x}{Y^y} = -\frac{Q_q}{Q_p}$$

contredisent les relations

$$[P, X] = [Q, Y] = \rho \neq 0 ;$$

donc, si $\Delta \neq 0$, on a ou

$$X^x = X^y = Y^x = Y^y = 0,$$

ou

$$P^x = P^y = Q^x = Q^y = 0 ;$$

mais l'évanouissement de X^x , X^y , Y^x et Y^y est incompatible avec le non-évanouissement du déterminant Δ ; donc on conclut au résultat, si

$$X_p = X_q = Y_p = Y_q = Z_p = Z_q = 0,$$

donc

$$P^x = P^y = Q^x = Q^y = 0 ;$$

c'est-à-dire, d'après les résultats d'une note précédente, les transformations changent les plans en plans; donc les seules transformations ponctuelles qui changent les lignes asymptotiques en lignes asymptotiques sont les transformations du groupe projectif.

Réciproquement, d'une étude semblable du déterminant

$$\begin{vmatrix} X_p^2 & 2 X_p X_q & X_q^2 \\ X_p X_q & X_p Y_q + X_q Y_p & Y_p Y_q \\ Y_p^2 & 2 Y_p Y_q & Y_q^2 \end{vmatrix}$$

on trouve que

$$X_p = Y_p = X_q = Y_q = 0$$

est une conséquence de

$$P^x = P^y = Q^x = Q^y = 0,$$

et des équations de condition.

Considérons maintenant les trois déterminants

$$L = |X^x, Y^y|, \quad M = |X_p, Y_q|, \quad N = |P_p, Q_q|;$$

on vérifie facilement que les cas

$$\begin{aligned} L = 0, M = 0, N = 0; & \quad L \neq 0, M \neq 0, N = 0; \\ L \neq 0, M \neq 0, N \neq 0; & \quad L = 0, M \neq 0, N \neq 0; \end{aligned}$$

donnent des contradictions avec les équations définissantes d'une transformation de contact.

Les cas

$$L \neq 0, M = 0, N \neq 0; \quad L \neq 0, M = 0, N = 0;$$

donnent

$$X_p = X_q = Y_p = Y_q = P^x = P^y = Q^x = Q^y = 0,$$

et de ces relations on a

$$Z_p = Z_q = 0.$$

Des cas

$$L = 0, M = 0, N \neq 0; \quad L = 0, M \neq 0, N = 0;$$

on trouve ou

$$X_p = X_q = Y_p = Y_q = 0,$$

ou

$$P_p = P_q = Q_p = Q_q = 0;$$

le premier cas donne des transformations projectives. Pour le deuxième

cas on a

$$\begin{aligned} [Y, P] &= Y_p P^x + Y_q P^y = 0, & [X, Q] &= X_p Q^x + X_q Q^y = 0, \\ [X, P] &= X_p P^x + X_q P^y = \rho \neq 0, & [Y, Q] &= Y_p Q^x + Y_q Q^y = \rho \neq 0; \end{aligned}$$

encore

$$\begin{aligned} A' &= Y^y P^x - Y^x P^y, & B' &= -Y_p P^y, & C' &= Y_p P^x - Y_q P^y, \\ & & & & D' &= Y_q P^x, & E' &= 0, \\ A'' &= X^x P^y - X^y P^x, & B'' &= X_p P^y, & C'' &= X_q P^y - X_p P^x, \\ & & & & D'' &= -X_q P^x, & E'' &= 0, \\ A''' &= X^x Q^y - X^y Q^x, & B''' &= X_p Q^y, & C''' &= X_q Q^y - X_p Q^x, \\ & & & & D''' &= -X_q Q^x, & E''' &= 0; \end{aligned}$$

et les équations de condition deviennent

$$\begin{aligned} X^x A &= X^x X^y A = X^{y^2} A = X^{y^2} B = X^y X_p B = X_p^2 B = X_p X_q B = 0, \\ X_p^2 C &= X_q^2 C = X^{x^2} D = X^x X_q D = X_q^2 D = X_p X_q D = 0, \\ X^y X_p A + X^x X^y B &= 2 X^x X_q A + X^{x^2} C = 2 X^y X_p A + X^{y^2} C = 0, \\ X^x X_q A + X^x X^y D &= (X^x X_p - X^y X_q) B - X^y X_p C = X^x X_q C + \\ &+ (X^x X_p - X^y X_q) D = 0, \\ X_p^2 A + 2 X^y X_p C &= X_q^2 A + 2 X^x X_q C = X_q^2 B + X_p X_q C = \\ &= X_p X_q C + X_p^2 D = 0, \\ X_p X_q A + 2 X^x X_q B + (X^x X_p - X^y X_q) C &= X_p X_q A + X^x X_q B + \\ &+ X^y X_p D = 0, \\ (X^x X_p - X^y X_q) A + X^{x^2} B - X^x X^y C &= (X^x X_p - X^y X_q) A + \\ &+ X^x X^y C - X^{y^2} D = 0. \end{aligned}$$

En écrivant

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} &\equiv X^x Y^y - X^y Y^x, & \Delta_{xp} &\equiv X^x Y_p - X_p Y^x, & \Delta_{yp} &\equiv X^y Y_p - X_p Y^y, \\ \Delta_{pq} &\equiv X_p Y_q - X_q Y_p, & \Delta_{xq} &\equiv X^x Y_q - X_q Y^x, & \Delta_{yq} &\equiv X^y Y_q - X_q Y^y, \\ \Delta_{ij} &= -\Delta_{ji}, \end{aligned}$$

on vérifie sans difficulté que ces équations se réduisent aux équations sui-

vantes :

$$\begin{aligned}
X_p P^x - Y_q Q^y &= 0, \quad X_q P^y - Y_p Q^x = 0, \quad \Delta_{yp}^2 = 0, \quad \Delta_{xq}^2 = 0, \\
Y_p Q^x \Delta_{qy} + Y_q Q^y \Delta_{xp} &= 0, \quad [X Y]^2 + 2 \{ \Delta_{qx} \Delta_{yp} + 2 \Delta_{px} \Delta_{yq} \} = 0, \\
X_q Y_p \Delta_{qy} + X_p Y_q \Delta_{px} &= 0, \quad X^y Y_p \Delta_{qy} + X_p Y^y \Delta_{px} = 0, \\
X^x Y_p \Delta_{px} + X_p Y^x \Delta_{qy} + X^x Y_q \Delta_{yp} + X_q Y^x \Delta_{py} + X^y Y_q \Delta_{xp} + \\
&\quad + X_q Y^y \Delta_{yq} = 0, \\
X^x Y_q \Delta_{yq} + X_q Y^x \Delta_{xp} &= X^y Y_p \Delta_{xp} + X_p Y^y \Delta_{yq} = X^x Y_q \Delta_{xp} + \\
&\quad + X_q Y^x \Delta_{yq} = 0, \\
X_p Y_p \Delta_{xp} + X_q Y_p \Delta_{yp} + X_p Y^y \Delta_{pq} &= X_q Y_q \Delta_{qy} + X_p Y_q \Delta_{qx} + \\
&\quad + X_q Y^x \Delta_{pq} = X^y Y^x \Delta_{qx} + X^x Y^x \Delta_{px} + X^x Y_q \Delta_{xy} = 0;
\end{aligned}$$

ce système est équivalent au système suivant

$$\begin{aligned}
X_p P^x - Y_q Q^y &= \Delta_{xy} = \Delta_{xp} = \Delta_{yp} = 0, \\
X_q P^y - Y_p Q^x &= \Delta_{pq} = \Delta_{xq} = \Delta_{yq} = 0;
\end{aligned}$$

ce qui donne les transformations dualistiques.

En concluant on observe que le problème précédent et sa solution peuvent être généralisés pour un espace à $n + 1$ dimensions.

En effet, soit

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \quad Z = Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

une transformation ponctuelle qui ne change pas l'équation

$$\sum_1^n \sum_j p_{ij} dx_i dx_j = 0, \quad p_{ij} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j};$$

en vertu des identités

$$dz = \sum_1^n p_i dx_i, \quad dp_i = \sum_j p_{ij} dx_j,$$

on a

$$P_i = P_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta},$$

où

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} X_{1x_1} & X_{1x_2} & \dots & X_{1x_n} & X_{1z} \\ X_{2x_1} & X_{2x_2} & \dots & X_{2x_n} & X_{2z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{nx_1} & X_{nx_2} & \dots & X_{nx_n} & X_{nz} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & -1 \end{vmatrix}, \quad X_{jx_i} \equiv \frac{\partial X_j}{\partial x_i},$$

est $\Delta^{(i)}$ se dérive de Δ en remplaçant la $i^{ième}$ ligne par

$$Z_{x_1} Z_{x_2} \dots Z_{x_n} Z_z;$$

et aussi on trouve

$$P_{ij} = P_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n, p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}) = \\ = \frac{D^{(i)}}{\Delta} = \frac{D^{(j)}}{\Delta},$$

où $D^{(i)}$ se forme de Δ quand on remplace la $i^{ième}$ ligne par

$$P_{ix_1} P_{ix_2} \dots P_{ix_n} P_{iz}.$$

D'ailleurs

$$dX_i = X_{iz} dz + \sum_1^n X_{ix_j} dx_j,$$

et en construisant l'équation aux dérivées totales

$$\sum_1^n \sum_j P_{ij} dX_i dX_j = 0$$

on voit qu'elle réduit à l'équation

$$\Omega \equiv \begin{vmatrix} X_{1x_1} & X_{1x_2} & \dots & X_{1x_n} \\ X_{2x_1} & X_{2x_2} & \dots & X_{2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{nx_1} & X_{nx_2} & \dots & X_{nx_n} \end{vmatrix}^2 \\ \cdot \begin{vmatrix} X_{1x_1} & X_{1x_2} & \dots & X_{1x_n} & X_{1z} \\ X_{2x_1} & X_{2x_2} & \dots & X_{2x_n} & X_{2z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{nx_1} & X_{nx_2} & \dots & X_{nx_n} & X_{nz} \\ Z_{x_1} & Z_{x_2} & \dots & Z_{x_n} & Z_z \end{vmatrix} \{ \sum_1^n \sum_j p_{ij} dx_i dx_j \} + \Phi = 0;$$

l'évanouissement identique pour toutes les valeurs de p_i , p_{ij} , de l'expansion de Ω donne le système suivant des équations aux dérivées partielles pour les fonctions inconnues:

$$\begin{aligned} Z_{x_i} X_{jx_i x_i} - X_{jx_i} Z_{x_i x_i} &= 0, \\ Z_{x_i} X_{jx_i x_k} - X_{jx_i} Z_{x_i x_k} + z (Z_{x_k} X_{jx_i x_k} - X_{jx_k} Z_{x_i x_k}) &= 0, \\ Z_{x_i} X_{jx_i x_l} + Z_{x_k} X_{jx_i x_l} + Z_{x_l} X_{jx_i x_k} - X_{jx_i} Z_{x_k x_l} - X_{jx_k} Z_{x_i x_l} - X_{jx_l} Z_{x_i x_k} &= 0, \\ x_{n+1} &= z, \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Il est commode pour l'intégration de ce système à diminuer le nombre des variables par unité et à écrire le système:

$$\begin{aligned} \varphi_{ix_i} \varphi_{jx_i x_i} - \varphi_{jx_i} \varphi_{ix_i x_i} &= 0, & (a) \\ \varphi_{ix_i} \varphi_{jx_i x_k} - \varphi_{jx_i} \varphi_{ix_i x_k} + 2 (\varphi_{ix_k} \varphi_{jx_i x_k} - \varphi_{jx_k} \varphi_{ix_i x_k}) &= 0, & (b) \\ \varphi_{ix_i} \varphi_{jx_i x_l} + \varphi_{ix_k} \varphi_{jx_i x_l} + \varphi_{ix_l} \varphi_{jx_i x_k} - \varphi_{jx_i} \varphi_{ix_k x_l} - \varphi_{jx_k} \varphi_{ix_i x_l} - \varphi_{jx_l} \varphi_{ix_i x_k} &= 0; & (c) \end{aligned}$$

on déduit des équations (a) que

$$\frac{\partial \log \varphi_{ix_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \log \varphi_{jx_j}}{\partial x_j} = \dots = \frac{\partial \log \varphi_{nx_j}}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (d)$$

donc

$$\varphi_{ix_j} = \Phi^{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \varphi_{ix_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (e)$$

En substituant ces valeurs dans les équations (b) on a

$$\left. \begin{aligned} (\Phi^{ii} - \Phi^{jj}) \varphi_{ix_i x_i} \varphi_{ix_j} + 2 \Phi_{x_j}^{ii} (\varphi_{ix_i})^2 &= 0, \\ (\Phi^{ij} - \Phi^{ji}) \varphi_{ix_j x_j} \varphi_{ix_i} + 2 \Phi_{x_i}^{jj} (\varphi_{ix_j})^2 &= 0, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Les équations (d) donnent

$$(\Phi^{ij} - \Phi^{ik}) \varphi_{ix_j x_k} + \Phi_{x_k}^{ij} \varphi_{ix_j} - \Phi_{x_j}^{ik} \varphi_{ix_k} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (g)$$

en vertu d'égalité

$$\varphi_{ix_j x_k} = \varphi_{ix_k x_j}.$$

En différentiant les équations (f) par rapport à x_i et x_j on a

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{x_i}^{ij} \varphi_{ix_i x_i} \varphi_{ix_j} - (\Phi^{ii} - \Phi^{jj}) (\varphi_{ix_i x_i x_i} \varphi_{ix_j} + \varphi_{ix_i x_i} \varphi_{ix_i x_j}) - \\ - 4 \Phi_{x_j}^{ii} \varphi_{ix_i} \varphi_{ix_i x_i} &= 0, \\ \Phi_{x_j}^{ii} \varphi_{ix_j x_j} \varphi_{ix_i} + (\Phi^{ii} - \Phi^{jj}) (\varphi_{ix_j x_j x_j} \varphi_{ix_i} + \varphi_{ix_j x_j} \varphi_{ix_i x_j}) - \\ - 4 \Phi_{x_j}^{jj} \varphi_{ix_j} \varphi_{ix_j x_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

En éliminant les quantités $\varphi_{ix_j r_j}$ et $\varphi_{ix_j x_k}$ des équations (h) au moyen des équations (f) et (g) on trouve après une réduction facile

$$\varphi_{ix_j x_j x_j} = \frac{6 (\varphi_{ix_j})^3 (\Phi_{x_k}^{ij})^2}{(\varphi_{ix_k})^2 (\Phi^{ij} - \Phi^{jk})^2}. \quad (i)$$

L'élimination des quantités

$$(\Phi_{x_k}^{ij})^2 / (\Phi^{ij} - \Phi^{jk})^2$$

au moyen des équations (e) donne

$$\frac{\varphi_{ix_j x_j x_j}}{\varphi_{ix_j x_j}} = \frac{3}{2} \frac{\varphi_{ix_j x_j}}{\varphi_{ix_j}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

en intégrant on trouve

$$\frac{\varphi_{ix_j x_j}}{(\varphi_{ix_j})^{\frac{3}{2}}} = f_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n);$$

$$\varphi_{ix_j} = \frac{1}{\alpha_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) x_j + \beta_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)};$$

et enfin

$$\varphi_i = \frac{\gamma_{ij} x_j + \delta_{ij}}{\alpha_{ij} x_j + \beta_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

où les formes

$$\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij}$$

sont des fonctions de

$$x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n;$$

donc la fonction φ_i est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions linéaires des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Les équations (e) demandent que les dénominateurs soient les mêmes fonctions à une facteur près; on le voit en supposant que

$$\varphi_i = \frac{\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad \varphi_j = \frac{\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions linéaires par rapport aux $x_1, x_2, \dots, x_n$; les équations (e) donnent

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{ix_k}}{\varphi_{jx_k}} &= \frac{\gamma^2 (\delta \beta_{x_k} - \beta \delta_{x_k})}{\delta^2 (\gamma \alpha_{x_k} - \alpha \gamma_{x_k})} = \frac{\Phi^{i1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)}{\Phi^{j1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)} = \\ &= \rho_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n; \end{aligned}$$

mais

$$\frac{\delta \beta_{x_k} - \beta \delta_{x_k}}{\gamma \alpha_{x_k} - \alpha \gamma_{x_k}} = \rho_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n);$$

parce que les fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont linéaires par rapport à chacune variable; donc le rapport $\gamma : \delta$ est une constante.

Enfin les équations (b) et (c) interdisent que les produits $x_n x_i$ apparaissent dans φ_j ; donc on a

$$\varphi_i = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \alpha_{in+1}}{\sum_{j=1}^n \beta_j x_j + \beta_{n+1}}.$$

Pour que déterminer les autres transformations de contact il ne faut considérer que les déterminants

$$\begin{aligned} & |X_1^{x_1}, X_2^{x_2}, \dots, X_n^{x_n}|, \quad |X_{1p_1}, X_{2p_2}, \dots, X_{np_n}|, \\ & |P_{1p_1}, P_{2p_2}, \dots, P_{np_n}|, \end{aligned}$$

où

$$K_i^{x_j} = K_{ix_j} + p_j K_{iz}, \quad K_{ix_j} = \frac{\partial K_i}{\partial x_j}, \quad K_{ip_j} = \frac{\partial K_i}{\partial p_j};$$

les deux cas possibles donnent ou

$$X_{1p_1} = X_{1p_2} = \dots = X_{1p_n} = X_{2p_1} = \dots = X_{np_n} = 0,$$

ou

$$P_{1p_1} = P_{1p_2} = \dots = P_{1p_n} = P_{2p_1} = \dots = P_{np_n} = 0,$$

c'est-à-dire les transformations projectives et les transformations dualistiques.