Beiträge zur Auflösung von linearen Differentialgleichungen
zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten
sowie von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen
gewisse bestimmte Integrale genügen.

Von

J. H. GRAF in Bern.

Herr L. Pochhammer wies in seiner Arbeit „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten“*) darauf hin, dass die allgemeine Gleichung

$$(1) \quad (A_0 x + B_0) \frac{d^2 y}{dx^2} + (A_1 x + B_1) \frac{dy}{dx} + (A_2 x + B_2) y = 0$$

sich stets auf die Formen

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 x + b_1) \frac{dy}{dx} + (a_2 x + b_2) y = 0,$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 x + b_1) \frac{dy}{dx} + (a_2 x + b_2) y = 0,$$

$$(3) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} - (x - \varrho) \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0,$$

$$(4) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + \varrho \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

reduciren lasse. In einem spätern Artikel „Ueber eine specielle Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung mit linearen Coefficienten“**) bestimmt er die particulären Integrale von (4)

$$y_1 = \bar{\Gamma}(1 - \varrho) F(\varrho, x), \quad \text{wo} \quad F(\varrho, x) = 1 + \frac{x}{1 \cdot \varrho} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \varrho(\varrho + 1)} + \dots,$$

$$y_2 = \bar{\Gamma}(\varrho - 1) x^{1-\varrho} F(2 - \varrho, x)$$

*) Math. Annalen Bd. 38, S. 228 ff.

**) Math. Annalen Bd. 41, S. 174 ff.

und sodann weist er auf den Zusammenhang mit den Bessel'schen Functionen hin, da abgesehen von einem constanten Factor

$$J^{\lambda}(x) = x^{\lambda} F\left(\lambda + 1, -\frac{x^2}{4}\right)$$

gesetzt werden kann.

Im Nachfolgenden wollen wir noch auf einige Gleichungen aufmerksam machen, welche mit der Gleichung (4) zusammengebracht werden können.

A.

Wir gehen aus von der Form

$$(5) \quad \begin{cases} x \frac{d^2 y}{dx^2} + (a+1) \frac{dy}{dx} - y = 0 \\ \text{oder} \\ \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} + a y \right) - y = 0. \end{cases}$$

Wenn

$$F(a, x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda}}{\lambda! \Gamma(a + \lambda + 1)} *),$$

so sind die beiden particulären Integrale dieser Gleichung

$$y_1 = F(a, x); \quad y_2 = x^{-a} F(-a, x).$$

$$1) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 - r(r+1)) y = 0^{**}).$$

Es sei

$$x \frac{dy}{dx} = D;$$

da

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = D(D-1),$$

so folgt

$$(D^2 + D - r(r+1)) y + x^2 y = 0,$$

$$(D-r)(D+r+1) y + x^2 y = 0;$$

dividiren wir nun durch 4 und führen

$$D = x \frac{d}{dx}$$

ein, so folgt:

$$\left(\frac{x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{r}{2}\right) \left(\frac{x}{2} \frac{d}{dx} + \frac{r+1}{2}\right) + \frac{x^2}{4} y = 0.$$

*) Vergl. L. Schlöfli: Sopra un teorema di Jacobi recato a forma più generale ed applicato alla funzione cilindrica. Annali di Mat. Ser. II^a, Tom. V^o, p. 203, 1871 und schon vorher in: Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati. Annali di Math. II. Ser. Tom. III, p. 232.

**) J. Dienger, Differential- und Integralrechnung. Stuttgart 1857, S. 347.

Nun sei

$$\frac{x^2}{4} = t,$$

dann ist

$$\frac{1}{2} x \frac{d}{dx} = t \frac{d}{dt};$$

somit lautet die Gleichung

$$\left(t \frac{d}{dt} - \frac{r}{2}\right) \left(t \frac{d}{dt} + \frac{r+1}{2}\right) y + ty = 0.$$

Nun sei $y = t^{\frac{r}{2}} z$, worauf folgt

$$\frac{d}{dt} \left(t \frac{d}{dt} + r + \frac{1}{2}\right) z + z = 0.$$

Die Gleichung hat die Form des Typus (5)

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} + a\right) y - y = 0.$$

Um die particulären Integrale zu erhalten, setzen wir

$$a = r + \frac{1}{2}, \quad x = -t,$$

$$(I) \quad z_1 = F\left(r + \frac{1}{2}, -t\right) = F\left(r + \frac{1}{2}, -\frac{x^2}{4}\right),$$

$$(II) \quad z_2 = \left(\frac{x^2}{4}\right)^{-r-\frac{1}{2}} F\left(-r-\frac{1}{2}, -\frac{x^2}{4}\right).$$

Nun ist

$$y_1 = t^{\frac{r}{2}} z_1 = \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{r}{2}} z_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^r z_1,$$

also

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^r \left(-\frac{x^2}{4}\right)^{\lambda}}{\lambda! \Gamma\left(r + \frac{1}{2} + \lambda + 1\right)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^{r+2\lambda}}{\lambda! \Gamma\left(r + \frac{1}{2} + \lambda + 1\right)} \\ &= x^{-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^{r+\frac{1}{2}+2\lambda}}{\lambda! \Gamma\left(r + \frac{1}{2} + \lambda + 1\right)}, \\ y_1 &= x^{-\frac{1}{2}} J\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Ferner

$$y_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^r z_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-2r-1} F\left(-r-\frac{1}{2}, -\frac{x^2}{4}\right),$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-r-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{\lambda}}{\lambda! \Gamma\left(-r - \frac{1}{2} + \lambda + 1\right)} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^{-r - \frac{1}{2} + 2\lambda}}{\lambda! \Gamma\left(-r - \frac{1}{2} + \lambda + 1\right)}, \\
y_2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} J\left(x\right).
\end{aligned}$$

Die vorliegende Differentialgleichung hat also als allgemeines Integral dasjenige der Differentialgleichung für Bessel'sche Functionen I. Art. Es muss somit die Gleichung auch so gelöst werden können, dass man dieselbe in die Form der Differentialgleichung für Bessel'sche Functionen I. Art verwandelt und dies ist möglich:

Die Gleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 + r(r+1)) y = 0$$

wurde in die Form gebracht

$$(D - r)(D + r + 1)y + x^2 y = 0.$$

Nun nach der Formel

$$pq = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2,$$

ist

$$\begin{aligned}
(D - r)(D + r + 1) &= \left(\frac{2D+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2r+1}{2}\right)^2 \\
&= \left(D + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(r + \frac{1}{2}\right)^2;
\end{aligned}$$

somit nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an

$$\left\{\left(D + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + x^2\right\} y = 0.$$

Nun soll das Symbol D um $\frac{1}{2}$ vermindert werden; zu dem Behufe setzen wir

$$y = x^{-\frac{1}{2}} V,$$

dann ist

$$\left(D + \frac{1}{2}\right)^2 V = x^{\frac{1}{2}} \frac{dV}{dx} + x^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 V}{dx^2},$$

also lautet die Differentialgleichung

$$x^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 V}{dx^2} + x^{\frac{1}{2}} \frac{dV}{dx} - \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 x^{-\frac{1}{2}} V + x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} V = 0$$

multipliziert mit $x^{\frac{1}{2}}$

$$x^2 \frac{d^2 V}{dx^2} + x \frac{dV}{dx} - \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 V + x^2 V = 0,$$

$$D^2 V - \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 V + x^2 V = 0,$$

$$x^2 \frac{d^2 V}{dx^2} + x \frac{dV}{dx} + \left(x^2 - \left(r + \frac{1}{2}\right)^2\right) V = 0,$$

was die Differentialgleichung für Bessel'sche Functionen ist, deren particuläre Integrale

$$V_1 = J(x)^{r+\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad V_2 = J(x)^{-r-\frac{1}{2}}$$

sind; somit hat unsere erste Differentialgleichung, da

$$y = x^{-\frac{1}{2}} V,$$

die particulären Integrale

$$y_1 = x^{-\frac{1}{2}} J(x)^{r+\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad y_2 = x^{-\frac{1}{2}} J(x)^{-r-\frac{1}{2}},$$

wie früher, abgesehen von einem constanten Factor.

$$(1) \quad \text{II) } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (a+1)x \frac{dy}{dx} - b x^r y = 0^*),$$

da

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = D(D-1)y,$$

so folgt

$$(D(D-1) + (a+1)D - b x^r) y = 0,$$

$$(2) \quad (D(D+a) - b x^r) y = 0.$$

Nun sei $p = x^r$, $\log p = r \log x$

$$\frac{dp}{p} = r \frac{dx}{x}, \quad p \frac{d}{dp} = \frac{1}{r} x \frac{d}{dx} = \frac{D}{r} = \delta.$$

Dividiren wir (2) durch r^2 , so folgt

$$\frac{D}{r} \left(\frac{D}{r} + \frac{a}{r} \right) y - \frac{b}{r^2} x^r y = 0,$$

$$\delta \left(\delta + \frac{a}{r} \right) y - \frac{b}{r^2} p y = 0.$$

*) Dienger, S. 173.

Nun setze man

$$t = \frac{b}{r^2} x^r,$$

dann ist

$$\begin{aligned} \frac{D}{r} = \delta = t \frac{d}{dt} \\ t \frac{d}{dt} \left(t \frac{d}{dt} + \frac{a}{r} \right) y - t y = 0, \\ (3) \quad \frac{d}{dt} \left(t \frac{d}{dt} + \frac{a}{r} \right) y - y = 0, \end{aligned}$$

und (3) ist nichts anderes als der Typus (5), wenn $\frac{a}{r}$ durch α ersetzt wird. Somit folgen als particuläre Integrale

$$\begin{aligned} y_1 &= F\left(\frac{a}{r}, t\right) = F\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r^2} x^r\right), \\ y_2 &= t^{-\frac{a}{r}} F\left(-\frac{a}{r}, \frac{b}{r^2} x^r\right) = \frac{b^{-\frac{a}{r}} x^{-a}}{r^{-\frac{2a}{r}}} F\left(-\frac{a}{r}, \frac{b}{r} x^r\right), \\ y_2 &= \frac{1}{x^a} \sqrt[r]{\frac{r^{2a}}{b^a}} F\left(-\frac{a}{r}, \frac{b}{r} x^r\right). \end{aligned}$$

Ein Fall muss besonders behandelt werden, nämlich $r = 0$, dann heisst die Gleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (a+1) x \frac{dy}{dx} - b y = 0,$$

oder

$$(D^2 + aD - b) y = 0.$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung $D^2 + aD - b = 0$ seien m und n , dann folgt

$$(D - m)(D - n) y = 0,$$

wo

$$\begin{aligned} m &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \\ n &= \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}. \end{aligned}$$

Die particulären Integrale sind in diesem Fall

$$\begin{aligned} y_1 &= x^m = x^{\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}}, \\ y_2 &= x^n = x^{\frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}}. \end{aligned}$$

Uebrigens kann man noch direct zeigen, dass für den Fall $r = 0$ die particulären Integrale der Hauptgleichung sich in diejenigen der Nebengleichung verwandeln.

B.

Man kann bei der Integration solcher Differentialgleichungen auch den indirecten Weg einschlagen, d. h. eine Differentialgleichung bilden, der eine bestimmte Integralform zukommt.

Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit linearen Coefficienten laute

$$(1) \quad (a_0 x + b_0) \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + (a_1 x + b_1) \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x} + \dots + (a_{n-1} x + b_{n-1}) \frac{\partial y}{\partial x} + (a_n x + b_n) y = 0$$

und

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \\ g(x) &= b_1 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n, \end{aligned}$$

so folgt für (1)

$$(2) \quad x f\left(\frac{d}{dx}\right) y + g\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0.$$

Dieser Gleichung versuche man durch ein bestimmtes Integral zu genügen von der Form

$$y = \int e^{xt} \frac{h(t)}{f(t)} dt,$$

wo die Grenzen constant und noch aus den Bedingungen zu finden sind, $h(t)$ eine noch zu bestimmende Function von t allein ist. Da nun

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) e^{xt} = e^{xt} f(t),$$

ebenso

$$g\left(\frac{d}{dx}\right) e^{xt} = e^{xt} g(t)$$

so giebt die Anwendung von (2) auf das Integral die Bedingung

$$(3) \quad \int e^{xt} h(t) x dt + \int e^{xt} h(t) \frac{g(t)}{f(t)} dt = 0.$$

Den ersten Term integrieren wir partiell und finden ihn

$$\int e^{xt} h(t) x dt = \{e^{xt} h(t)\} - \int e^{xt} h'(t) dt,$$

eingesetzt erhalten wir als Bedingung

$$\underbrace{\{e^{xt} h(t)\}}_{\text{I}} + \int e^{xt} h(t) \underbrace{\left\{\frac{g(t)}{f(t)} - \frac{h'(t)}{h(t)}\right\}}_{\text{II}} dt = 0.$$

Diese Bedingung erfüllt man am bequemsten dadurch, dass die Grenzen so ausgewählt werden, dass der Ausdruck in {I} verschwindet und dass längs des ganzen Weges der Ausdruck II das gleiche thut.

Wir haben somit

$$\frac{g(t)}{f(t)} - \frac{h'(t)}{h(t)} = 0,$$

daraus schliesslich

$$\text{Log } h(t) = \int \frac{g(t)}{f(t)} dt.$$

Der leichteste Fall ist offenbar der, wo alle Wurzeln der Gleichung $f(t) = 0$ verschieden und wirklich in der Zahl n vorhanden sind. Da somit a_0 nicht verschwindet, so kann man die Variable x so um eine additive Constante verändern, dass b_0 verschwindet, so dass also die Function $g(t)$ den $(n-1)$ ten Grad nicht übersteigt. Schliesslich steht es noch frei $a_0 = 1$ zu setzen, dann ist

$$f(t) = \prod (t - \alpha), \quad \frac{g(t)}{f(t)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{A_{\lambda}}{t - \alpha_{\lambda}}.$$

Nun ist

$$A = \frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)}, \quad h(t) = \prod (t - \alpha)^A.$$

Die Grenzen sind so zu wählen, dass

$$e^{xt} \prod (t - \alpha)^A$$

verschwindet.

Angenommen nun, auch alle Exponenten A wären negativ, so giebt es doch immer eine Gegend des Horizonts, wo e^{xt} in einer alle algebraischen Ordnungen übertreffenden Kleinheit verschwindet. Von dieser Gegend aus könnte man um jeden der n Pole α besonders eine Schlinge werfen. Einer jeden solchen Schlinge entspricht eines der n particulären Integrale von der Form

$$y = \int e^{xt} \prod (t - \alpha)^{A-1} dt.$$

C.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir zur Betrachtung der Gleichung

$$(1) \quad (A_0 x + B_0) \frac{d^2 y}{dx^2} + (A_1 x + B_1) \frac{dy}{dx} + (A_2 x + B_2) y = 0^*)$$

über. Ohne der Allgemeinheit der Untersuchung zu schaden, darf man $B_0 = 0$ setzen und dann die ganze Gleichung durch A_0 dividiren, also

$$(2) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + (ax + c) \frac{dy}{dx} + (bx + g) y = 0^*.$$

Die Gleichung

$$f(t) = t^2 + at + b$$

kann zwei ungleiche oder zwei gleiche Wurzeln haben.

*) Vergl. L. Pochhammer, diese Annalen Bd. 38, S. 224 ff. und A. Weiler, Crelle's Journal Bd. 51, S. 107 ff.

I. Unter-Fall: Die Wurzeln der Gleichung $t^2 + at + b = 0$ seien ungleich z. B. gleich α und β , dann ist $a = -(\alpha + \beta)$, $b = \alpha\beta$, somit lautet die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (-\alpha x - \beta x + c) \frac{dy}{dx} + (\alpha\beta + g)y = 0$$

oder

$$x \left(\frac{d}{dx} - \alpha \right) \left(\frac{d}{dx} - \beta \right) y + \left(c \frac{d}{dx} + g \right) y = 0.$$

Nun setzen wir $y = e^{\beta x} z$, dann wird die Differentialgleichung zu

$$x \left[\frac{d}{dx} - (\alpha - \beta) \right] \frac{dz}{dx} + \left(c \frac{d}{dx} + c\alpha + g \right) z = 0$$

oder

$$(3) \quad x \frac{d^2 z}{dx^2} - \left[(\alpha - \beta)x - c \right] \frac{dz}{dx} + (c\alpha + g)z = 0.$$

Wir setzen nun

$$x = \frac{w}{\alpha - \beta}$$

und

$$c\alpha + g = -(\alpha - \beta)h;$$

so folgt

$$\frac{w}{\alpha - \beta} (\alpha - \beta)^2 \frac{d^2 z}{dw^2} - \left[\frac{w}{\alpha - \beta} (\alpha - \beta) - c \right] (\alpha - \beta) \frac{dz}{dw} - (\alpha - \beta)hz = 0,$$

$$w \frac{d^2 z}{dw^2} - (w - c) \frac{dz}{dw} - hz = 0$$

mit andern Worten, die Untersuchung kommt auf die Auflösung von

$$(4) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} - (x - c) \frac{dy}{dx} - ay = 0$$

zurück, was den Typus (3) von Herrn Pochhammer darstellt.

Der Vortheil dieser Reduction liegt auf der Hand. Die 6 constanten Elemente wurden zunächst auf 4, sodann nach Gleichung (4) auf 2 reducirt.

Wenn wir nun die allgemeine Vorschrift der Auflösung befolgen, so ist

$$f(t) = t(t-1), \quad g(t) = ct - a,$$

also

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{ct - a}{t(t-1)} = \frac{c-a}{t-1} + \frac{a}{t}, \quad h(t) = t^a(t-1)^{c-a}, \quad y = \int e^{xt} t^{a-1} (t-1)^{c-a-1} dt,$$

wenn

$$\{e^{xt} t^a (t-1)^{c-a}\}$$

an den Grenzen verschwindet.

Sind die *recp.**) a , wie von $c - a$ positiv, so kann man 0 und 1 als Grenzen wählen und e^{xt} entwickeln. Es folgt

*) reellen Componenten.

$$\begin{aligned}
 (5) \quad y &= \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{x^\lambda t^\lambda}{\lambda!} dt = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 t^{\lambda+a-1} (1-t)^{c-a-1} \cdot \frac{x^\lambda}{\lambda!} dt \\
 &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda!} \int_0^1 t^{\lambda+a-1} (1-t)^{c-a-1} dt = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+a) \Gamma(c-a)}{\Gamma(\lambda+c)} \cdot \frac{x^\lambda}{\lambda!}.
 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir analog wie jene Function mit einem Parameter

$$F(a, x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda! \Gamma(a + \lambda + 1)}$$

nun als Function mit zwei Parametern

$$(6) \quad F(a, c, x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(a) \Gamma(\lambda+c)} \frac{x^\lambda}{\lambda!},$$

so folgt als *erstes particuläres Integral* der Differentialgleichung (4), wenn wir (5) und (6) mit einander vergleichen

$$(7) \quad y_1 = F(a, c, x) = \frac{1}{\Gamma(a) \Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} dt.$$

Setzen wir in

$$y = \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt$$

statt t den Werth $1-u$, so folgen als Grenzen des Integrals

$$t = 0, \quad u = 1,$$

$$t = 1, \quad u = 0,$$

also

$$\begin{aligned}
 y &= \int_1^0 e^{x(1-u)} (1-u)^{a-1} u^{c-a-1} \cdot (-du) = e^x \int_0^1 e^{-xu} u^{c-a-1} (1-u)^{a-1} du \\
 &= e^x \int_0^1 u^{c-a-1} (1-u)^{a-1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^\lambda u^\lambda}{\lambda!} du \\
 &= e^x \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^\lambda}{\lambda!} \int_0^1 u^{c+\lambda-a-1} (1-u)^{a-1} du = e^x \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+\lambda-a) \Gamma(a)}{\Gamma(c+\lambda)} \cdot \frac{(-x)^\lambda}{\lambda!} \\
 &= \Gamma(a) \Gamma(c-a) \cdot e^x \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c-a+\lambda)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c+\lambda)} \cdot \frac{(-x)^\lambda}{\lambda!} \\
 &= \Gamma(a) \Gamma(c-a) \cdot e^x F(c-a, c, -x).
 \end{aligned}$$

Wir haben somit als 2^{te} Form des I. particulären Integrals von (4)

$$(8) \quad y_1 = \Gamma(a) \Gamma(c-a) e^x F(c-a, c, -x),$$

und so direct die Relation beider F -Functionen

$$(9) \quad F(a, c, x) = e^x F(c-a, c, -x).$$

Um das zweite particuläre Integral von (4) zu erhalten, wählen wir, ausgehend von

$$y = \int e^{xt} t^{a-1} (t-1)^{c-a-1} dt,$$

die Gegend des Horizonts, wo xt negativ ist und werfen von da aus eine Schlinge rechtläufig um beide Pole $+1$ und 0 herum, also

$$y = \frac{1}{2i\pi} \int_{-N \begin{smallmatrix} \curvearrowleft \\ 0 \ 1 \end{smallmatrix}} e^{xt} t^{a-1} (t-1)^{c-a-1} dt,$$

wo N eine sehr grosse zum unendlich werden bestimmte Zahl ist.

Nun sei $t = \frac{u}{x}$, also Pole $= 0, x$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-N \begin{smallmatrix} \curvearrowleft \\ 0 \ x \end{smallmatrix}} e^u \left(\frac{u}{x}\right)^{a-1} \left(\frac{u}{x} - 1\right)^{c-a-1} \cdot \frac{du}{x} \\ &= \frac{1}{2i\pi} x^{1-c} \int_{-N \begin{smallmatrix} \curvearrowleft \\ 0 \ x \end{smallmatrix}} e^u u^{c-2} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{c-a-1} du. \end{aligned}$$

Man kann es nun stets so einrichten, dass u abs. $> x$ längs des ganzen Weges, folglich darf man das Binom $\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{c-a-1}$ entwickeln

$$\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{c-a-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \binom{c-a-1}{\lambda} \left(\frac{x}{u}\right)^\lambda.$$

Nun ist

$$(-1)^\lambda \binom{c-a-1}{\lambda} = \frac{(a-c+\lambda)!}{(a-c)!\lambda!} = \frac{\Gamma(a-c+\lambda+1)}{\Gamma(a-c+1) \cdot \lambda!},$$

somit
$$\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{c-a-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(a-c+\lambda+1)}{\Gamma(a-c+1) \cdot \lambda!} x^\lambda u^{-\lambda},$$

$$y = \frac{1}{2i\pi} x^{1-c} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(a-c+\lambda+1)}{\Gamma(a-c+1)} \cdot \frac{x^\lambda}{\lambda!} \int_{-N \begin{smallmatrix} \curvearrowleft \\ 0 \ x \end{smallmatrix}} e^u u^{c-2-\lambda} du.$$

Nun ist aber
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-N \underset{0x}{\curvearrowleft}} e^u u^{c-2-\lambda} du = \frac{1}{\Gamma(\lambda+2-c)}$$

$$y = x^{1-c} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\alpha-c+\lambda+1)}{\Gamma(\alpha-c+1) \Gamma(\lambda+2-c)} \cdot \frac{x^\lambda}{\lambda!},$$

$$(10) \quad y = x^{1-c} F(\alpha - c + 1, 2 - c, x).$$

Dies ist das 2^{te} *particuläre Integral* von Gleichung (4), für welches nach der Relation (9)

$$F(\alpha - c + 1, 2 - c, x) = e^x F(1 - \alpha, 2 - c, -x)$$

gesetzt werden darf

$$(10a) \quad y = e^x x^{1-c} F(1 - \alpha, 2 - c, -x).$$

Es sei uns gestattet gerade hier noch einige Darstellungen der Function

$$F(\alpha, c, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(c-\alpha)} \int_0^1 e^{xt} t^{\alpha-1} (1-t)^{c-\alpha-1} dt$$

einzuschalten.

Die 2^{te} Form ist

$$(11) \quad F(\alpha, c, x) = \frac{e^x}{\Gamma(\alpha) \Gamma(c-\alpha)} \int_0^1 e^{-xt} t^{c-\alpha-1} (1-t)^{\alpha-1} dt.$$

Die 3^{te} Form

$$(12) \quad F(\alpha, c, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-N \underset{0x}{\curvearrowleft}} e^t t^{\alpha-1} (t-x)^{-\alpha} dt$$

und die 4^{te} Form

$$(13) \quad F(\alpha, c, x) = \frac{e^x}{2i\pi} \int_{-N \underset{-x0}{\curvearrowleft}} e^t t^{-\alpha} (t+x)^{\alpha-c} dt.$$

Die Formeln (12) und (13) gelten immer wie auch die Parameter α und c beschaffen sein mögen.

Wir stellen nun noch folgende Frage:

Wann unterscheiden sich die zwei particulären Integrale von Differentialgleichung (4) nur durch eine multiplicative Constante und reichen daher zur Darstellung des allgemeinen Integrals nicht aus?

Damit dies eintreten kann, müssen die zwei Summenreihen übereinstimmen, daher muss unbedingt der Exponent $1 - c$ des Factors x^{1-c} der 2^{ten} Function eine ganze Zahl sein. Wir können $1 - c$ entweder als Null oder negativ ganz annehmen, dann ist c positiv ganz z. B. $= n + 1$, wo $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ist. Dann geht

über in

$$x^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c, x)$$

$$x^{-n} F(a - n, -n + 1, x) = \sum_{\lambda=n}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda + a - n)}{\Gamma(a - n) \cdot \lambda! (\lambda - n)!} x^{\lambda-n}.$$

Ich stelle diese Summe deshalb so dar, weil im Nenner $\Gamma(\lambda - n + 1)$ unendlich gross wird, so lange $\lambda < n$ ist. Es ist deshalb angezeigt, $\lambda = n + \mu$ zu setzen; dann wird

$$x^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c, x)$$

zu

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\Gamma(\mu + a)}{\Gamma(a - n) \cdot (\mu + n)! \mu!} x^{\mu} &= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a - n)} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\Gamma(a + \mu)}{\Gamma(a) \Gamma(\mu + n + 1) \mu!} x^{\mu} \\ &= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a - n)} F(a, n + 1, x). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Unter der Voraussetzung, dass c positiv ganz, ist

$$(14) \quad x^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c, x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a - n)} F(a, c, x)$$

und der Factor, um welchen sich die beiden particulären Lösungen in diesem Fall unterscheiden, ist $\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a - n)}$, wo n pos. ganz. Giebt es noch eine 3^{te} particuläre Lösung der Differentialgleichung (4), die auch dann nicht mit $F(a, c, x)$ zusammenfällt, wenn c eine ganze Zahl ist? Eine solche lässt sich am leichtesten aus den zwei bestimmten Integralen herleiten. Nehmen wir der Einfachheit halber, damit der Pol 0 zugänglich werde, a als pos. an und gehen aus von

$$\begin{aligned} y = x^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c, x) &= \frac{x^{1-c}}{2i\pi} \int_{-N \underset{0}{\curvearrowright} x} e^u u^{c-2} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{c-a-1} du \\ &= \frac{x^{1-c}}{2i\pi} \int_{-N \underset{0}{\curvearrowright} x} e^u u^{a-1} (u - x)^{c-a-1} du. \end{aligned}$$

Nun können wir die Schlinge um den Pol $u = 0$ zusammenschnüren und von ihr die aus 0 um x geworfene Schlinge abtrennen, z. B. so

$$-N \underset{0}{\curvearrowright} x \quad -N \underset{0}{\curvearrowright} x \quad -N \underset{0}{\curvearrowright} x \quad \overset{I}{\underset{0}{\curvearrowright} x}$$

Nun mitteln wir zuerst, wenn $y = S_1 + S_2$ gesetzt wird,

$$S_1 = \frac{x^{1-c}}{2i\pi} \int_{0 \underset{x}{\curvearrowright}} e^u u^{a-1} (u - x)^{c-a-1} du$$

aus. Da der Nullpunkt zugänglich ist, so ziehen wir den Weg auf die Strecke 0 bis x zusammen

und setzen resp. *) $c - a$ pos. voraus

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2i\pi} (e^{-i\pi(c-a-1)} - e^{i\pi(c-a-1)}) \cdot x^{1-c} \int_0^x e^u u^{a-1} (x-u)^{c-a-1} du \\ &= \frac{e^{i\pi(c-a)} - e^{-i\pi(c-a)}}{2i\pi} \cdot x^{1-c} \int_0^x \\ &= \frac{2i \sin \pi(c-a)}{2i\pi} \cdot x^{1-c} \int_0^x \\ &= \frac{\sin \pi(c-a)}{\pi} \cdot x^{1-c} \int_0^x = \frac{x^{1-c}}{\Gamma(c-a) \Gamma(a-c+1)} \int_0^x e^u u^{a-1} (x-u)^{c-a-1} du. \end{aligned}$$

Nun setzen wir $u = xt$, $u = 0$, $t = 0$,
 $u = x$, $t = 1$,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{x^{1-c}}{\Gamma(c-a) \Gamma(a-c+1)} \int_0^1 e^{xt} (xt)^{a-1} (x-xt)^{c-a-1} x dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(c-a) \Gamma(a-c+1)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt = \Gamma(a) \Gamma(c-a) F(a, c, x)$$

somit

$$S_1 = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-c+1)} F(a, c, x).$$

Nun folgt

$$S_2 = \frac{x^{1-c}}{2i\pi} \int_{-N}^0 e^u u^{a-1} (u-x)^{c-a-1} du.$$

Wir ziehen den Weg ebenfalls auf die Strecke $-N$ bis 0 zusammen

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2i\pi} (e^{-i\pi(a-1+c-a-1)} - e^{+i\pi(a-1+c-a-1)}) \cdot x^{1-c} \int_{-\infty}^0 e^u u^{a-1} (u-x)^{c-a-1} du \\ &= \frac{1}{2i\pi} (e^{-i\pi c} - e^{i\pi c}) \cdot x^{1-c} \int_{-\infty}^0 e^u u^{a-1} (u-x)^{c-a-1} du. \\ S_2 &= -\frac{1}{2i\pi} \cdot 2i \sin \pi c \cdot x^{1-c} \int_{-\infty}^0 e^u u^{a-1} (u-x)^{c-a-1} du. \end{aligned}$$

*) resp. = reelle Componente; der Kreis sollte ganz an x herangerückt sein

Nun sei $u = -xt$

$$u = 0, \quad t = 0,$$

$$u = -\infty, \quad t = \infty$$

$$= -\frac{\sin \pi c}{\pi} \cdot x^{1-c} \int_{\infty}^0 e^{-xt} x^{a-1} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} x^{c-a-1} \cdot -x dt$$

$$= -\frac{\sin \pi c}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt,$$

somit folgt im Ganzen

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} x^{1-c} F(a-c+1, 2-c, x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-c+1)} F(a, c, x) \\ \quad - \frac{\sin \pi c}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \\ \text{oder} \\ x^{1-c} F(a-c+1, 2-c, x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-c+1)} F(a, c, x) \\ \quad = -\frac{\sin \pi c}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt. \end{array} \right.$$

Das Integral rechts hat nur dann einen Sinn, wenn die reelle Componente von x positiv ist. Wenn ferner c eine ganze Zahl ist, so verschwindet $\sin \pi c$; damit folgt, dass auch der Unterschied der beiden Functionen auf der linken Seite wegfällt und diese zwei Functionen einander gleich werden, ein Resultat, das sich mit dem früher erhaltenen Ergebniss deckt. Nun aber ist

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (t+1)^{c-a-1} dt,$$

unter der Voraussetzung von a pos., gleich

$$\frac{x^{1-c}}{2i \sin \pi a} \int_{-N}^{\infty} e^u u^{a-1} \cdot x(u-x)^{c-a-1} du$$

ein particuläres Integral von Differentialgleichung (4), welches nie mit $F(a, c, x)$ zusammenfällt. Wir wollen versuchen, dasselbe durch eine Summenreihe darzustellen, wenn c gleich einer ganzen positiven Zahl $(n+1)$ ist.

Wir gehen aus von

$$S = \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (t+1)^{c-a-1} dt$$

$$= -\frac{\pi}{\sin \pi c} \left\{ x^{1-c} F(a-c+1, 2-c, x) - \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-c+1)} F(a, c, x) \right\}.$$

Denken wir uns einen Grenzübergang, indem wir $n + 1 + \varepsilon$ statt c einsetzen, wo ε zum Verschwinden bestimmt ist, so folgt

$$S = \lim_{\varepsilon=0} - \frac{\pi}{\sin(\pi(n+1+\varepsilon))} \left\{ x^{-n-\varepsilon} F(a-n-\varepsilon, 1-n-\varepsilon, x) - \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)} F(a, n+1+\varepsilon, x) \right\}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} - \frac{\pi}{\sin(\pi(n+1+\varepsilon))} &= (-1)^{\lambda} \frac{\pi}{\sin(\pi(\lambda+1-n-\varepsilon))} \\ &= (-1)^{\lambda} \Gamma(\lambda+1-n-\varepsilon) \Gamma(n-\lambda+\varepsilon). \end{aligned}$$

Darauf gestützt handelt es sich nun darum, den allgemeinen Term des Ausdrucks rechts anzugeben. Derselbe wird zu

$$(-1)^{\lambda} \cdot \Gamma(\lambda+1-n-\varepsilon) \Gamma(n-\lambda+\varepsilon) \times \left\{ \frac{\Gamma(\lambda+a-n-\varepsilon)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)\Gamma(\lambda+1-n-\varepsilon)} \cdot \frac{x^{\lambda-n-\varepsilon}}{\lambda!} - \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)\Gamma(\lambda+n+1+\varepsilon)} \cdot \frac{x^{\lambda}}{\lambda!} \right\}.$$

Der 1^{te} Theil des I. Terms wird für $\lambda = 1, 2, 3 \dots n-1$ zu

$$(-1)^{\lambda} \frac{\Gamma(\lambda+a-n-\varepsilon) \Gamma(n-\lambda+\varepsilon)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)} \cdot \frac{x^{\lambda-n-\varepsilon}}{\lambda!}$$

und dies geht für $\varepsilon = 0$ über in

$$\binom{n-a}{\lambda} \frac{(n-\lambda-1)!}{x^{n-\lambda}}.$$

Nun bleibt noch die Ausmittlung des 2^{ten} Theiles vom I. Term nämlich für $\lambda \leq n$ und des II. Terms für $\lambda = 0, 1, 2, 3 \dots$. Wir gehen so vor:

Wenn $\lambda \leq n$, so setze man in der Entwicklung des ersten Terms

$$\lambda = n + \mu, \text{ wo } \mu = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Der allgemeine Term wird dann zu

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+\mu} \cdot \frac{\Gamma(\mu+a-\varepsilon) \Gamma(-\mu+\varepsilon)}{\Gamma(a-n-\varepsilon) \Gamma(\mu+n)!} x^{\mu-\varepsilon} \\ &\quad - (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(\mu+1-n-\varepsilon) \Gamma(n-\mu+\varepsilon) \Gamma(\mu+a)}{\Gamma(a-n-\varepsilon) \Gamma(\mu+n+1+\varepsilon)} \frac{x^{\mu}}{\mu!} \\ &= \lim_{\varepsilon=0} \frac{(-1)^n}{\varepsilon} \left\{ \frac{\Gamma(\mu+a-\varepsilon) \cdot x^{\mu-\varepsilon}}{\Gamma(a-n-\varepsilon) \cdot (\mu+n)! \Gamma(\mu+1-\varepsilon)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma(\mu+a)}{\Gamma(a-n-\varepsilon) \Gamma(\mu+n+1+\varepsilon)} \cdot \frac{x^{\mu}}{\mu!} \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\Lambda(x) = \frac{\partial \text{Log} \Gamma(x)}{\partial x}, \text{ so wird dieser Ausdruck}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(a-n)} \cdot \frac{\Gamma(\mu+a)}{\mu! (\mu+n)!} x^{\mu} \left\{ -\text{Log } x - \Lambda(\mu+a) + \Lambda(\mu+1) \right. \\ &\quad \left. + \Lambda(\mu+n+1) \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\Gamma(a-n)} &= (-1)^n \frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n-a+1)\Gamma(a-n)} \\ &= (-1)^n \frac{\sin \pi(a-n)}{\pi} \Gamma(n-a+1) \\ &= \frac{\sin \pi a}{\pi} \Gamma(n-a+1) \\ &= \frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}.\end{aligned}$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned}(16) \quad S &= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \binom{n-a}{\lambda} \frac{(n-\lambda-1)!}{x^{n-\lambda}} \\ &\quad - \frac{\Gamma(n+1-a)}{\Gamma(1-a)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(a)(\lambda+n)!} \frac{x^\lambda}{\lambda!} (\text{Log } x + \Lambda(\lambda+a) \\ &\quad \quad \quad - \Lambda(\lambda+1) - \Lambda(\lambda+n+1)).\end{aligned}$$

Wenn der Coefficient von $\frac{d^2 y}{dx^2}$ constant ist, so geht die Differentialgleichung (2) in den Typus (2) von Pochhammer über und dieser kann auf die Form des Typus (3) gebracht werden. Die Gleichung sei

$$\begin{aligned}(17) \quad A \frac{d^2 y}{dx^2} + (Bx + C) \frac{dy}{dx} + (Dx + E) y &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} + (Ax + B) \frac{dy}{dx} + (Cx + D) y &= 0.\end{aligned}$$

Anders geordnet

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + Ax \left(\frac{d}{dx} + \frac{C}{A} \right) y + \left(B \frac{d}{dx} + D \right) y = 0.$$

Nun sei

$$y = -e^{-\frac{C}{A}x} z.$$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-\frac{C}{A}x} \frac{dz}{dx} + \frac{C}{A} e^{-\frac{C}{A}x} z$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -e^{-\frac{C}{A}x} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} - 2 \frac{C}{A} \frac{dz}{dx} + \frac{C^2}{A^2} z \right)$$

$$Ax \left(\frac{d}{dx} + \frac{C}{A} \right) y = -e^{-\frac{C}{A}x} \left(Ax \frac{dz}{dx} - Cxz + Cxz \right)$$

$$\left(B \frac{d}{dx} + D \right) y = -e^{-\frac{C}{A}x} \left(B \frac{dz}{dx} - \frac{BC}{A} z + Dz \right)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(Ax + B - \frac{2C}{A} \right) \frac{dz}{dx} + \left(D - \frac{BC}{A} + \frac{C^2}{A^2} \right) z = 0.$$

Nun sei $a^2 = -A$, $b = -\frac{AB - 2C}{A\sqrt{-A}}$, $c = BC - \frac{D}{A} - \frac{C^2}{A}$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - (a^2 x + ab) \frac{dz}{dx} + a^2 cz = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - a^2 \left(x + \frac{b}{a}\right) \frac{dz}{dx} + a^2 cz = 0.$$

Ich führe nun $x + \frac{b}{a}$ als unabhängige Variable ein, da

$$d\left(x + \frac{b}{a}\right) = dx.$$

Wir verbinden damit noch einen constanten Factor um die Constante a^2 wegzubringen und setzen

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{2s}{a^2}, \quad x = \frac{\sqrt{2s} - b}{a}.$$

Dann lautet die Differentialgleichung

$$(18) \quad s \frac{d^2 z}{ds^2} - \left(s - \frac{1}{2}\right) \frac{dz}{ds} + \frac{1}{2} cz = 0.$$

Geht nach Typus (3). Die beiden particulären Integrale sind

$$z_1 = F\left(-\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}, s\right),$$

$$z_2 = s^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1-c}{2}, \frac{3}{2}, s\right),$$

und wenn man die ursprünglichen Werthe berücksichtigt

$$y_1 = e^{-\frac{c}{A}x} F\left(\frac{A^2 D - ABC + C^2}{2A^3}, \frac{1}{2}, -\frac{(Ax + B - 2\frac{C}{A})^2}{2A}\right),$$

$$y_2 = e^{-\frac{c}{A}x} (Ax + B - 2\frac{C}{A}) \times \\ F\left(\frac{2A^3 + A^2 D - ABC + C^2}{2A^3}, \frac{3}{2}, -\frac{(As + B - 2\frac{C}{A})^2}{2A}\right).$$

II. Unter-Fall: Bei der Differentialgleichung (2) seien die Wurzeln der Functionalgleichung

$$t^2 + at + b = 0$$

einander gleich, z. B.

$$a = -2\alpha, \quad b = \alpha^2.$$

Wir setzen in (2)

$$y = e^{\alpha x} z$$

ein, dann ist

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = x e^{\alpha x} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\alpha \frac{dz}{dx} + \alpha^2 z \right),$$

$$(ax + c) \frac{dy}{dx} = e^{\alpha x} \left(-2\alpha x \frac{dz}{dx} - 2\alpha^2 x z + c \frac{dz}{dx} + c \alpha z \right),$$

$$(bx + g) y = e^{\alpha x} \left(\alpha^2 x z + g z \right)$$

somit lautet die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + c \frac{dz}{dx} + (c\alpha + g)z = 0.$$

Um den Coefficienten von z wegzuschaffen, sei $x = -\frac{w}{c\alpha + g}$.

$$-w(c\alpha + g) \frac{d^2 z}{dw^2} - c(c\alpha + g) \frac{dz}{dw} + (c\alpha + g)z = 0$$

oder

$$w \frac{d^2 z}{dw^2} + c \frac{dz}{dw} - z = 0.$$

Nun haben wir wieder die Form des Typus (5), nur ist in den particulären Lösungen

$$\alpha + 1 = c, \quad \alpha = c - 1$$

zu setzen. Es folgt somit

$$z_1 = F(c - 1, w),$$

$$z_2 = x^{1-c} F(1 - c, w).$$

$y = e^{\alpha x} z$, schliesslich, wenn $w = -(c\alpha + g)x$

$$y_1 = e^{\alpha x} F(c - 1, -(c\alpha + g)x),$$

$$y_2 = e^{\alpha x} x^{1-c} F(1 - c, -(c\alpha + g)x).$$

Zum Schlusse dieses Abschnittes bemerken wir, dass sich leicht eine Uebereinstimmung unserer Resultate mit denjenigen des Hrn. L. Pochhammer nachweisen lässt; diese gedrängtere, ohne weitere Hilfsmittel vorgenommene Auflösung wird sicher neben der Methode des Hrn. Pochhammer von Interesse sein, abgesehen davon, dass einige besondere Arten der Darstellungen und einige Eigenschaften klar gelegt worden sind.

Wir fügen gleich noch einen Abschnitt bei, der die directe Methode Euler's illustriert. Dienger hat schon in seinem Lehrbuch „die Differential- und Integralrechnung, Stuttgart 1857“, darauf aufmerksam gemacht und wir folgen bis zu einem gewissen Punkt seiner Anleitung, um dann die particulären Integrale theils mit Hilfe der vorher behandelten Typen, theils durch hypergeometrische Reihen darzustellen.

D.

Bei der Auflösung von Differentialgleichungen kann man auch den directen Weg einschlagen d. h. eine Differentialgleichung bilden, der eine bestimmte Integralform zukommt, ein Verfahren, das schon Euler angegeben hat.

Es sei

$$(1) \quad y = \int T(t - x)^n dt$$

und dieses Integral genüge der Differentialgleichung

$$\square y = L \frac{d^2 y}{dx^2} + M \frac{dy}{dx} + Ny = 0,$$

wo L, M, N gegebene Functionen von x allein, T ein Polynom von t allein und n constant ist.

Ueben wir $\square$ auf obiges Integral aus, so kommt bloss in Betracht

$$T \cdot \square (t - x)^n = T(t - x)^{n-2} \cdot V$$

und die Bedingung ist, dass

$$\int T \cdot V(t - x)^{n-2} dt = 0$$

ist, zwischen den Grenzen genommen.

Nun ist

$$V = n(n - 1) L - nM(t - x) + N(t - x)^2,$$

$$V = Nt^2 - (2Nx + nM)t + Nx^2 - nMx + n(n - 1)L.$$

Nun sei längs des Integrationsweges

$$T \cdot V(t - x)^{n-2} dt = d(P(t - x)^{n-1}),$$

wo P eine Function von t allein ist

$$\begin{aligned} T \cdot V(t - x)^{n-2} &= \frac{d}{dt} (P(t - x)^{n-1}) \\ &= (t - x)^{n-1} \frac{dP}{dt} + (n - 1) P(t - x)^{n-2}, \end{aligned}$$

$$TV(t - x)^{n-2} = (t - x)^{n-2} \left[(t - x) \frac{dP}{dt} + (n - 1) P \right]$$

und hieraus

$$(2) \quad TV = (t - x) \frac{dP}{dt} + (n - 1) P.$$

Aus (2) ersehen wir, dass V in Bezug auf x eine Function 1^{ten} Grades und in Bezug auf t vom 2^{ten} Grade ist. Somit dürfen wir setzen

$$(3) \quad V = (Ax + a)t^2 + (Bx + b)t + Cx + c.$$

Diesen Werth für V in (2) substituirt folgt, dass der Coefficient von x in (2) auf der linken Seite

$$= (At^2 + Bt + C) T$$

und auf der rechten Seite

$$= - \frac{dP}{dt}$$

ist, also

$$(4) \quad - \frac{dP}{dt} = (At^2 + Bt + C) T.$$

Analog folgt

$$t \frac{dP}{dt} + (n-1)P = (at^2 + bt + c)T,$$

somit

$$(n-1)P = (at^2 + bt + c)T + (At^3 + Bt^2 + Ct)T,$$

$$(5) \quad (n-1)P = [At^3 + (B+a)t^2 + (C+b)t + c]T.$$

Nun dividire man (4) durch (5)

$$(6) \quad -\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{1}{P} = \frac{At^2 + Bt + C}{At^3 + (B+a)t^2 + (C+b)t + c},$$

$$\frac{d \log P}{dt} = -(n-1) \frac{At^2 + Bt + C}{At^3 + (B+a)t^2 + (C+b)t + c}.$$

$$d \log P = -(n-1) F(t) dt,$$

wo

$$F(t) = \frac{At^2 + Bt + C}{At^3 + (B+a)t^2 + (C+b)t + c},$$

$$P = e^{-\int (n-1) F(t) dt} + \text{Const.}$$

Aus (5) finden wir dann

$$T = \frac{(n-1)P}{At^3 + (B+a)t^2 + (C+b)t + c},$$

und somit lässt sich auch, wenn in (1) substituirt wird, y angeben:

$$y = \int \frac{(n-1)P(t-x)^n}{At^3 + (B+a)t^2 + (C+b)t + c} dt$$

und die Integration der Differentialgleichung ist somit möglich. *)

Wir wollen nun L , M und N bestimmen. Es ist einerseits

$$(7) \quad \begin{cases} V = n(n-1)L - nM(t-x) + N(t-x)^2, & \text{andererseits nach (3)} \\ V = (Ax+a)t^2 + (Bx+b)t + Cx + c, \end{cases}$$

also hieraus

$$N = Ax + a, \quad -Mn - 2Nx = Bx + b, \quad M = -\frac{2A}{n}x^2 - \frac{B+2a}{n}x - \frac{b}{n}.$$

Setzt man im System (7) $t = x$, so folgt

$$n(n-1)L = Ax^3 + (B+a)x^2 + (C+b)x + c,$$

$$L = \frac{Ax^3 + (B+a)x^2 + (C+b)x + c}{n(n-1)}.$$

Nachdem wir die Differentialgleichung noch mit $n(n-1)$ multiplicirt haben, setzen wir die gefundenen Ausdrücke darin ein:

*) Vergleiche Dienger, S. 349.

$$(8) \quad [Ax^3 + (B+a)x^2 + (C+b)x + c] \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \\ - (n-1)[2Ax^2 + (B+2a)x + b] \frac{\partial y}{\partial x} + n(n-1)(Ax+a)y = 0.$$

Dieser Gleichung genügt das Integral

$$y = \int \frac{(n-1)P(t-x)^n dt}{At^3 + (B+a)t^2 + (C+b)t + c},$$

wo P nach früherer Formel bestimmt wird und die einzige Bedingung die ist, dass

$$\{P(t-x)^{n-1}\} = 0$$

zwischen den gegebenen Grenzen genommen.

Vorausgesetzt, A sei nicht Null, so folgt nach Division durch A aus (8)

$$(9) \quad (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2(n-1)(x^2 + \delta x + \varepsilon) \frac{dy}{dx} \\ + n(n-1)(x + 2\delta - \alpha)y = 0;$$

denn wenn

$$\alpha = \frac{B+a}{A}, \quad \delta = \left(\frac{B}{2} + a\right) \frac{1}{A},$$

so ist

$$\frac{a}{B} = 2\delta - \alpha,$$

und wenn

$$\beta = \frac{C+b}{A}, \quad \gamma = \frac{c}{A}, \quad 2\varepsilon = \frac{b}{A},$$

so ist

$$\frac{C}{A} = \beta - 2\varepsilon, \quad \frac{B}{A} = 2(\alpha - \delta).$$

Die Function P wird dann durch folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$\frac{d \log P}{dt} = - (n-1) \frac{t^2 + 2(\alpha - \delta)t + \beta - 2\varepsilon}{t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma}$$

und das Integral ist

$$y = \int \frac{(n-1)P(t-x)^n}{t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma} dt,$$

mit der Bedingung, dass

$$\{P(t-x)^{n-1}\} = 0$$

zwischen den gegebenen Grenzen.

Specialfall. $A = 0$. Die Gleichung lautet, wenn $B + a$ nicht Null

$$[(B+a)x^2 + (C+b)x + c] \frac{d^2 y}{dx^2} - (n-1)[(B+2a)x + b] \frac{dy}{dx} \\ + n(n-1)y = 0, \quad \text{oder}$$

$$(10) \quad (x^2 + fx + g) \frac{d^2 y}{dx^2} + (hx + j) \frac{dy}{dx} + ky = 0.$$

Nun ist, ausgehend von dem Resultat, dass

$$n(n-1)(B+a) + n(-n+1)(B+2a) + n(n-1)a = 0,$$

$$n(n-1) + n(-n(n-1)) \frac{B-2a}{B+a} + n(n-1) \frac{a}{B+a} = 0$$

und

$$h = - (n-1) \frac{B+2a}{B+a}, \quad k = \frac{a}{B+a} \cdot n(n-1),$$

folgende Beziehung möglich:

$$n(n-1) + nh + k = 0,$$

$$n^2 - (1-h)n + k = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Wurzeln m und n

$$k = mn,$$

$$h = 1 - m - n.$$

Nun hat man in Bezug auf die Verhältnisse der Coefficienten völlige Freiheit zu setzen, was man will; daher nehmen wir $a = m$ an, somit folgt aus k die Beziehung

$$B + a = (n-1), \quad B = n - m - 1,$$

$$-(n-1)b = (n-1)j, \quad b = -j,$$

$$C + b = (n-1)f, \quad C = (n-1)f + j,$$

wir erhalten demnach für P die Differentialgleichung

$$\frac{d \log P}{dt} = - \frac{(n-m-1)t + (n-1)f + j}{t^2 + ft + g},$$

$$\frac{d \log P}{dt} = \frac{(-n+m-1)t - (n-1)f - j}{t^2 + ft + g},$$

und das Integral

$$y = \int \frac{P(t-x)^n}{t^2 + ft + g} dt$$

mit der Bedingung, dass

$$\{P(t-x)^{n-1}\} = 0$$

zwischen den Grenzen.

Nun sind hier zwei Unterfälle zu unterscheiden:

- 1) die Wurzeln der Gleichung $t^2 + ft + g = 0$ seien verschieden,
- 2) „ „ „ „ „ $t^2 + ft + g = 0$ seien einander gleich.

1) Die Wurzeln seien verschieden, dann ist

$$t^2 + ft + g = (t - \alpha)(t - \beta),$$

also auch

$$x^2 + fx + g = (x - \alpha)(x - \beta)$$

und die Differentialgleichung lautet

$$(11) \quad (x - \alpha)(x - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} + (hx + j) \frac{dy}{dx} + ky = 0;$$

dieselbe kann anders dargestellt werden.

Es ist

$$f = -(\alpha + \beta), \quad g = \alpha\beta,$$

$$\frac{d \log P}{dt} = \frac{(-n + m - 1)t + (n - 1)(\alpha + \beta) - j}{(t - \alpha)(t - \beta)} = \frac{A}{t - \alpha} + \frac{B}{t - \beta},$$

$$A = \frac{m\alpha + (n - 1)\beta - j}{\alpha - \beta},$$

$$B = \frac{-(n - 1)\alpha - m\beta + j}{\alpha - \beta},$$

$$A + B = m - n + 1,$$

$$j = (m - A)\alpha + (A + n - 1)\beta.$$

Vertauscht man die zwei Wurzeln m und n , so geht A in $1 - B$ und B in $1 - A$ über.

Wir setzen in die Differentialgleichung (11) ein

$$(12) \quad (x - \alpha)(x - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} + [(1 - m - n)x + (m - A)\alpha + (A + n - 1)\beta] \frac{dy}{dx} + mny = 0.$$

Aus

$$d \log P = \frac{A}{t - \alpha} dt + \frac{B}{t - \beta} dt$$

folgt, wenn $B = -A + m - n + 1$

$$P = (t - \alpha)^A (t - \beta)^{-A + m - n + 1},$$

also auch

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{(t - \alpha)^A (t - \beta)^{-A + m - n + 1} (t - x)^n dt}{(t - \alpha)(t - \beta)} \\ &= \int (t - \alpha)^{A-1} (t - x)^n (t - \beta)^{-A + m - n} dt \end{aligned}$$

und die Bedingung ist, dass

$$\{(t - \alpha)^A (t - \beta)^{m - n - A + 1} (t - x)^n\} = 0$$

zwischen den Grenzen.

Die Pole des Integrals sind α, β, x und ∞ . Wir dürfen annehmen, dass von diesen 4 Polen mindestens ein Pol zugänglich sei; von diesem Pol aus bilden wir 3 Schlingen-Integrale, deren Summe $= 0$ ist; somit reduciren sich dieselben auf zwei Integrale, für welche wir bequeme Annahmen machen wollen*). Es sei $\beta < x < \alpha < \infty$. Wir bilden zuerst

$$y = \int_{\alpha}^{\infty} (t - \alpha)^{A-1} (t - \beta)^{m - n - A} (t - x)^n dt.$$

*) Herr H. Weber hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass die von H. Pochhammer herrührenden Doppelumgänge um 2 Pole jede specielle Voraussetzung über die Exponenten unnötig machen, was auch in den Anmerkungen zu Riemann's Arbeit über die Gauss'schen F -Functionen in der zweiten Auflage erwähnt ist. Ich muss es auf später verschieben, gerade hier davon Gebrauch zu machen.

Bevor wir aber das Integral weiter entwickeln, wollen wir in (12) eine neue Variable einführen.

Es war nach (12)

$$(x - \alpha)(x - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} + [(1 - m - n)x + (m - A)\alpha + (A + n - 1)\beta] \frac{dy}{dx} + mny = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (x - \alpha)(x - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} &= [(x - \beta) - (\alpha - \beta)](x - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} \\ &= (\alpha - \beta)^2 \left(\frac{x - \beta}{\alpha - \beta} - 1 \right) \frac{x - \beta}{\alpha - \beta} \cdot \frac{d^2 y}{d^2 \frac{x - \beta}{\alpha - \beta}}, \quad \frac{x - \beta}{\alpha - \beta} = w, \\ (x - \alpha)(x - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} &= (\alpha - \beta)^2 (w - 1)w \frac{d^2 y}{dw^2} \end{aligned}$$

und so geht die Gleichung (12) über in

$$(13) \quad w(w - 1) \frac{d^2 y}{dw^2} + [(1 - m - n)w + m - A] \frac{dy}{dw} + mny = 0.$$

Das Integral soll auch entsprechend verwandelt werden; statt der Grenzen α und ∞ wollen wir 1 und 0 setzen.

Wir setzen

$$\begin{aligned} t - \beta &= \frac{\alpha - \beta}{s}, \quad \text{dann ist} \quad t - \alpha = (\alpha - \beta) \frac{1 - s}{s}, \\ t - x &= (\alpha - \beta) \frac{1 - ws}{s}, \quad dt = -(\alpha - \beta) \frac{ds}{s^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten für das Integral

$$y = (\alpha - \beta)^m \int_0^1 s^{-m-1} (1-s)^{A-1} (1-ws)^n ds.$$

Nun war

$$\beta < x < \alpha,$$

also ist

$$0 < x - \beta < \alpha - \beta,$$

$$0 < \frac{x - \beta}{\alpha - \beta} < 1,$$

$$0 < w < 1.$$

Ferner setzen wir voraus die recp. $-m$ und recp. A seien positiv und nehmen an $ws \text{ abs.} < 1$, dann ist

$$\begin{aligned} (1 - ws)^n &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} w^\lambda s^\lambda \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n+1)\dots(-n+\lambda-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda} \cdot \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-n)} = \frac{\Gamma(\lambda-n)}{\lambda! \Gamma(-n)}, \\ (1 - ws)^n &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda-n)}{\lambda! \Gamma(-n)} w^\lambda s^\lambda, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda-n)}{\lambda! \Gamma(-n)} \cdot w^\lambda \int_0^1 s^{\lambda-m-1} (1-s)^{A-1} ds \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda-n)}{\lambda! \Gamma(-n)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda-m) \Gamma(A)}{\Gamma(\lambda-m+A)} w^\lambda \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{\Gamma(-n)(-n)(-n+1)\dots(-n+\lambda-1) \cdot \Gamma(-m)(-m)(-m+1)\dots(-m+\lambda-1)}{\lambda! \Gamma(A-m) \cdot (A-m)(A-m+1)\dots(A-m+\lambda-1)} w^\lambda, \\
y &= \frac{\Gamma(A) \Gamma(-m)}{\Gamma(A-m)} F(-n, -m, A-m, w), \\
y_1 &= \frac{\Gamma(A) \Gamma(-m)}{\Gamma(A-m)} F(-n, -m, A-m, \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta})
\end{aligned}$$

erstes particuläres Integral.

Nun integrieren wir von β bis x und setzen

$$y = \int_{\beta}^x (\alpha-t)^{A-1} (t-\beta)^{m-n-A} (x-t)^n dt.$$

Um die Grenzen 0 und 1 einzuführen, setzen wir

$$\begin{aligned}
t - \beta &= (x - \beta)s, \\
t &= \beta, \quad s = 0, \\
t &= x, \quad s = 1, \quad \alpha - t = (\alpha - \beta)(1 - ws), \quad t - \beta = (\alpha - \beta)ws, \\
(x - t) &= (\alpha - \beta)(1 - s)w.
\end{aligned}$$

$$y = (\alpha - \beta)^m \cdot w^{m-A+1} \int_0^1 s^{m-n-A} (1-s)^n (1-ws)^{A-1} ds,$$

$$\begin{aligned}
(1-ws)^{A-1} &= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \binom{A-1}{\lambda} w^\lambda s^\lambda \\
(-1)^\lambda \binom{A-1}{\lambda} &= \frac{(-A+1)(-A+2)\dots(-A+\lambda)}{\lambda!} \\
&= \frac{\Gamma(-A+\lambda+1)}{\lambda! \Gamma(1-A)},
\end{aligned}$$

$$(1-ws)^{A-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(-A+\lambda+1)}{\lambda! \Gamma(1-A)} \cdot w^\lambda s^\lambda,$$

$$\begin{aligned}
y &= (\alpha - \beta)^m \cdot w^{m-A+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(-A+\lambda+1)}{\lambda! \Gamma(1-A)} \cdot w^\lambda \int_0^1 s^{m-n-A+\lambda} (1-s)^n ds \\
&= (\alpha - \beta)^m \cdot w^{m-A+1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(-A+\lambda+1) \Gamma(m-n-A+\lambda+1) \Gamma(n+1)}{\lambda! \Gamma(1-A) \Gamma(m-A+\lambda+2)} \cdot w^\lambda,
\end{aligned}$$

$$y = (\alpha - \beta)^m \cdot w^{m-A+1} \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(m-n+A+1)}{\Gamma(m-A+2)} \times \\ F(1-A, m-n+A+1, m-A+2, w),$$

$$y_2 = (\alpha - \beta)^m \left(\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right)^{m-A+1} \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(m-n+A+1)}{\Gamma(m-A+2)} \times \\ F(1-A, m-n+A+1, m-A+2, \frac{x-\alpha}{\alpha-\beta})$$

zweites particuläres Integral.

Wir bemerken bei beiden particulären Lösungen, dass dieselben aus hypergeometrischen Reihen bestehen, welche als Factor selbst wieder ein vollständiges Euler'sches Integral I. Art haben.

2) *Die Wurzeln seien gleich.* Dann ist

$$t^2 + ft + g$$

wie auch

$$x^2 + fx + g$$

ein Quadrat

$$= (t-\alpha)^2 \quad \text{oder} \quad (x-\alpha)^2, \quad f = -2\alpha, \quad g = \alpha^2.$$

Die Differentialgleichung lautet nach Gleichung (12)

$$(14) \quad (x-\alpha)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [(1-m-n)(x-\alpha) + (1-m-n)\alpha + j] \frac{dy}{dx} + mny = 0.$$

Nun wollen wir

$$x \text{ statt } x - \alpha,$$

$$t \quad , \quad t - \alpha$$

substituieren. Da

$$(1-m-n)\alpha + j = h$$

ist, so hat man

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-m-n)x \frac{dy}{dx} + mny + h \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$x \frac{d}{dx} = D,$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} = D(D-1),$$

$$[D(D-1) + (1-m-n)D + mn]y + h \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(15) \quad (D-m)(D-n)y + h \frac{dy}{dx} = 0.$$

Nun sei

$$\frac{h}{x} = w, \quad \log h - \log x = \log w, \quad x \frac{d}{dx} = -w \frac{d}{dw} = D,$$

daher folgt

$$(w \frac{d}{dw} + m)(w \frac{d}{dw} + n)y + w^2 \frac{dy}{dw} = 0.$$

Nun könnte man auf gleiche Weise verfahren wie im vorigen Fall,

jedoch lässt sich diese Gleichung auf eine der schon behandelten Formen reduciren. Wenn wir die Substitution $y = w^{-n} z$ machen, dann nimmt sie die Form an

$$w \frac{d^2 z}{dw^2} + (m - n + 1 - w) \frac{dz}{dw} + nz = 0,$$

oder

$$w \frac{d^2 z}{dw^2} - (w - m + n - 1) \frac{dz}{dw} + nz = 0,$$

was der Typus (3) ist, wenn $\varrho = (m - n + 1)$, $\alpha = n$ gesetzt wird. Die particulären Integrale sind demnach

$$z_1 = F(-n, m - n + 1, w),$$

$$z_2 = w^{n-m} F(-m, n - m + 1, w),$$

$$y_1 = w^{-n} F(-n, m - n + 1, w),$$

$$y_2 = w^{-m} F(-m, n - m + 1, w),$$

$$y_1 = \left(\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right)^{-n} F\left(-n, m - n + 1, \frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right),$$

$$y_2 = \left(\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right)^{-m} F\left(-m, m - n + 1, \frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right).$$

Die Anregung zur Ausarbeitung des Vorliegenden verdanke ich meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. L. Schläfli.

Bern, im März 1894.