Untersuchungen über einige Punkte aus der allgemeinen Theorie der Flächen.

Von A. Enneper in Göttingen.

Die analytische Behandlung geometrischer Probleme, welche sich auf Flächen und Curven derselben beziehen, basirt, nach dem Vorgange von Gauss, auf zwei Liniensystemen, welche auf einer Fläche angenommen werden und für die Bestimmung der Lage eines Punktes eine ähnliche Bedeutung haben, wie die gerad- oder krummlinigen Coordinatensysteme der Ebene. Zwischen den Elementen, durch welche die Krümmung einer Fläche und die Länge eines Bogenelements definirt werden, finden eine Anzahl fundamentaler Gleichungen statt, welche, je nach der Wahl der beiden Curvensysteme, mehr oder minder einfache Formen annehmen. Wenn auch im Folgenden ein System von Flächencoordinaten besonders zur Anwendung kommt, so scheint es für das leichtere Verständniss der zu entwickelnden Gleichungen gut zu sein, zuerst einige allgemeine Relationen in möglichster Kürze darzustellen. Es ist dabei versucht durch eine geringe Anzahl von Beziehungen die Uebersicht der Formeln zu erleichtern.

I.

Die orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punktes einer Fläche seien Functionen zweier Variabeln u und v. Setzt man:

$$(1)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=E,\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=G,\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=F,$$

so ist das Bogenelement ∂s einer Curve der Fläche durch die Gleichung gegeben:

$$(\partial s)^2 = E\,(\partial u)^2 + 2\,F\,\partial u\,\partial v + G\,(\partial v)^2.$$

Aus den Gleichungen (1) erhält man unmittelbar:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial u}, & \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\dfrac{\partial F}{\partial u}-\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\dfrac{\partial F}{\partial v}-\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u}, & \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v}, & \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u} \end{cases}$$

Die Gleichungen der Hauptkrümmungshalbmesser — welche im Folgenden durch r' und r'' bezeichnet werden sollen — enthalten ausser E, F, G noch drei Determinanten A, B, C, für welche die Gleichungen stattfinden:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = B, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = C.$$

Für r' und r'' bestehen die beiden Relationen:

$$(4)\qquad \frac{AG + BE - 2\,CF}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}, \quad \frac{AB - C^2}{(EG - F^2)^2} = \frac{1}{r'\,r''}.$$

Nimmt man:

$$(5)\quad \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = A_0, \quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = B_0, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = C_0,$$

so lassen sich die Gleichungen (3) auch auf folgende Weise schreiben:

$$(6)\qquad \begin{cases} A_0\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C_0\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = A, \\ A_0\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C_0\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = B, \\ A_0\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + B_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + C_0\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = C. \end{cases}$$

Die Gleichungen 1) und 5) geben:

$$A_0\,\frac{\partial x}{\partial u} + B_0\,\frac{\partial y}{\partial u} + C_0\,\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad A_0\,\frac{\partial x}{\partial v} + B_0\,\frac{\partial y}{\partial v} + C_0\,\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$
$$A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 = EG - F^2.$$

Differentiirt man die vorstehenden Gleichungen nach u und v, so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichungen 6):

$$(7)\begin{cases} A_0\frac{\partial A_0}{\partial u} + B_0\frac{\partial B_0}{\partial u} + C_0\frac{\partial C_0}{\partial u} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial(EG - F^2)}{\partial u}, \quad A_0\frac{\partial A_0}{\partial v} + B_0\frac{\partial B_0}{\partial v} + C_0\frac{\partial C_0}{\partial v} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial(EG - F^2)}{\partial v}, \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial A_0}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial B_0}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial C_0}{\partial u} = -A, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial A_0}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial B_0}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial C_0}{\partial v} = -C, \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial A_0}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial B_0}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial C_0}{\partial u} = -C, \quad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial A_0}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial B_0}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial C_0}{\partial v} = -B. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 1) und 5) folgt:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} A_0, & B_0, & C_0, \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v}, \end{vmatrix} = EG - F^2$$

Mit Hülfe der Gleichungen (2) und (6) lassen sich die zweiten Differentialquotienten von x, y, z nach u und v durch ihre ersten Differentialquotienten, die ersten Differentialquotienten von E, F, G und durch die Quantitäten A_0, B_0, C_0 darstellen. Da diese Differentialquotienten in Beziehung auf x, y, z und A_0, B_0, C_0 symmetrisch sind, so wird es hinreichen dieselben nur für eine der Coordinaten aufzustellen. Ebenso sollen aus (7) nur die Differentialquotienten von A_0 nach u und v bemerkt werden. Aus den angegebenen Gleichungen findet man:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{A_0}{\sqrt{(EG-F^2)}} = -\dfrac{AG-CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{CE-AF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{A_0}{\sqrt{(EG-F^2)}} = -\dfrac{CG-BF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{BE-CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} (EG-F^2)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u}\right) = \dfrac{AA_0}{\sqrt{E}} + \dfrac{\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial u}}{\sqrt{E}}\left(\dfrac{F}{E}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\right), \\[3ex] (EG-F^2)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u}\right) = \dfrac{CA_0}{\sqrt{E}} - \dfrac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2\sqrt{E}}\left(\dfrac{F}{E}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\right), \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} (EG-F^2)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) = \dfrac{CA_0}{\sqrt{G}} - \dfrac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2\sqrt{G}}\left(\dfrac{F}{G}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\right), \\[3ex] (EG-F^2)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) = \dfrac{BA_0}{\sqrt{G}} + \dfrac{\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - G\frac{\partial F}{\partial v}}{2\sqrt{G}}\left(\dfrac{F}{G}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\right). \end{cases}$$

Durch Bildung der doppelten Werthe von $\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$ etc. lassen sich aus den vorstehenden Gleichungen drei Gleichungen ableiten, deren eine in Beziehung auf A, B, C algebraisch ist, während die beiden andern die Differentialquotienten von A, B, C enthalten. Diese beiden letzteren Gleichungen lassen sich einfacher auf folgende Art herstellen. Aus den Gleichungen (3) findet man:

$$\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u} = 2\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}.$$

Nach 2) und 6) ist nun:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_0, & B_0, & C_0, \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A, & C, & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, & G \end{vmatrix}.$$

Auf ganz dieselbe Art lässt sich leicht die zweite Determinante in $\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}$ durch B, C und E, F, G nebst deren Differentialquotienten ausdrücken. Man verificirt so ohne Mühe die beiden folgenden Gleichungen:

$$
(12)\quad\begin{cases}
(EG-F^2)\left(\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial C}{\partial u}\right)=A\left(G\frac{\partial E}{\partial v}+\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}-F\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\\
\quad+B\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v}+\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}-E\frac{\partial F}{\partial u}\right)+C\left(2F\frac{\partial F}{\partial u}-G\frac{\partial E}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}\right),\\
(EG-F^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u}-\frac{\partial C}{\partial v}\right)=B\left(E\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}-F\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right)\\
\quad+A\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}-G\frac{\partial F}{\partial v}\right)+C\left(2F\frac{\partial F}{\partial v}-E\frac{\partial G}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}\right).
\end{cases}
$$

Die Gleichungen (9), (10) und (11) lassen sich etwas übersichtlicher durch Einführung der folgenden Grössen darstellen. Seien a, b, c die Winkel, welche die Normale im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, die Tangente zur Curve, für welche u allein variirt, bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel a_1, b_1, c_1; analoge Bedeutungen mögen a_2, b_2, c_2 für die Curve haben, für welche v allein variabel ist. Mit Rücksicht auf die Werthe von A_0, B_0, C_0 aus 5) finden die Gleichungen statt:

$$
(13)\quad\begin{cases}
\frac{\cos a}{A_0}=\frac{\cos b}{B_0}=\frac{\cos c}{C_0}=\frac{1}{\sqrt{(EG-F^2)}},\\
\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}=\cos a_1,\ \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}=\cos b_1,\ \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}=\cos c_1,\\
\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}=\cos a_2,\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}=\cos b_2,\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}=\cos c_2,
\end{cases}
$$

Zur Abkürzung werde ferner gesetzt:

$$
(14)\quad\begin{cases}
\cos a_1\cos a_2+\cos b_1\cos b_2+\cos c_1\cos c_2=\cos\psi=\frac{F}{\sqrt{(EG)}},\ \sin\psi=\frac{\sqrt{(EG-F^2)}}{\sqrt{(EG)}},\\
\frac{1}{2}\,\frac{G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}}{G\sqrt{(EG-F^2)}}=M,\ \frac{1}{2}\,\frac{E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}}{E\sqrt{(EG-F^2)}}=N.
\end{cases}
$$

Mittelst der Gleichungen (13) und (14) lassen sich die Gleichungen (8), (9), (10) und (11) auf folgende Formen bringen:

$$
(15)\quad\begin{vmatrix}\cos a, & \cos b, & \cos c,\\ \cos a_1, & \cos b_1, & \cos c_1,\\ \cos a_2, & \cos b_2, & \cos c_2,\end{vmatrix}=\sin\psi.
$$

$$
\begin{cases}
\frac{\partial\cos a}{\partial u}=-\frac{AG-CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{E}\cos a_1-\frac{CE-AF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{G}\cos a_2,\\
\frac{\partial\cos a}{\partial v}=-\frac{CG-BF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{E}\cos a_1-\frac{BE-CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{G}\cos a_2,\\
\frac{\partial\cos a_1}{\partial u}=\frac{A}{\sqrt{E}\cdot\sqrt{(EG-F^2)}}\cos a+\frac{M+\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sin\psi}(\cos a_1\cos\psi-\cos a_2),
\end{cases}
$$

$$(16)\begin{cases}\dfrac{\partial\cos a_1}{\partial v}=\dfrac{C}{\sqrt{E}.\sqrt{(EG-F^2)}}\cos a-\dfrac{N}{\sin\psi}(\cos a_1\cos\psi-\cos a_2),\\ \dfrac{\partial\cos a_2}{\partial u}=\dfrac{C}{\sqrt{G}.\sqrt{(EG-F^2)}}\cos a-\dfrac{M}{\sin\psi}(\cos a_2\cos\psi-\cos a_1),\\ \dfrac{\partial\cos a_2}{\partial v}=\dfrac{B}{\sqrt{G}.\sqrt{(EG-F^2)}}\cos a+\dfrac{N+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{\sin\psi}(\cos a_2\cos\psi-\cos a_1).\end{cases}$$

Die Gleichungen 13) und 14) geben:

$$(17)\begin{cases}\cos^2a+\cos^2b+\cos^2c=1, & \cos a_1\cos a_2+\cos b_1\cos b_2+\cos c_1\cos c_2=\cos\psi\\ \cos^2a_1+\cos^2b_1+\cos^2c_1=1, & \cos a\cos a_2+\cos b\cos b_2+\cos c\cos c_2=0,\\ \cos^2a_2+\cos^2b_2+\cos^2c_2=1, & \cos a\cos a_1+\cos b\cos b_1+\cos c\cos c_1=0,\end{cases}$$

Sind die Gleichungen gegeben:

$$(18)\begin{cases}H\cos a+H_1\cos a_1+H_2\cos a_2=0, & H\cos b+H_1\cos b_1+H_2\cos b_2=0\\ & H\cos c+H_1\cos c_1+H_2\cos c_2=0\end{cases}$$

so folgt nach 15), dass diese Gleichungen nur bestehen können für $H=0$, $H_1=0$, $H_2=0$, da $\sin\psi$ nicht verschwinden kann. Bildet man nun aus 16). die doppelten Werthe von:

$$\frac{\partial^2\cos a}{\partial u\,\partial v},\quad \frac{\partial^2\cos a_1}{\partial u\,\partial v},\quad \frac{\partial^2\cos a_2}{\partial u\,\partial v},$$

so ergeben sich drei Gleichungen, von denen jede einzelne wieder ein System von Gleichungen von der Art der Gleichungen (18) repräsentirt. Hierdurch ergeben sich neun Bedingungsgleichungen, die sich factisch auf drei reduciren. Sechs dieser Gleichungen sind in den beiden Gleichungen (12) enthalten, die drei übrigen reduciren sich auf die folgende:

$$(19)\qquad \frac{\partial M}{\partial u}+\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}+\frac{AB-C^2}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

oder nach 4):

$$(20)\qquad \frac{\partial M}{\partial u}+\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\sqrt{(EG-F^2)}}{r'r''}=0.$$

Setzt man hierin für M, N, ψ ihre Werthe aus (14) und (15), so ergiebt sich der bekannte Satz von Gauss, dass das Krümmungsmaass nur von den Quantitäten E, F, G und deren Differentialquotienten abhängt.

Mittelst der Gleichungen (16) lässt sich unmittelbar zeigen, dass für gegebene E, F, G jede der Coordinaten x, y, z derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Aus (15) und (17) findet man:

$$\cos a\sin\psi=\begin{vmatrix}1, & 0, & 0,\\ \cos a_1, & \cos b_1, & \cos c_1\\ \cos a_2, & \cos b_2, & \cos c_2\end{vmatrix},\quad \cos^2a\sin^2\psi=\begin{vmatrix}1, & \cos a_1, & \cos a_2\\ \cos a_1, & 1, & \cos\psi\\ \cos a_2, & \cos\psi, & 1\end{vmatrix}.$$

Die vorstehende Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (16) und (20) giebt:

$$\left\{\frac{\partial \cos a_1}{\partial u} - \frac{M + \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\sin \psi}(\cos a_1 \cos \psi - \cos a_2)\right\}\left\{\frac{\partial \cos a_2}{\partial v} - \frac{N + \frac{\partial \psi}{\partial v}}{\sin \psi}(\cos a_2 \cos \psi - \cos a_1)\right\}$$
$$- \left\{\frac{\partial \cos a_1}{\partial v} + \frac{N}{\sin \psi}(\cos a_1 \cos \psi - \cos a_2)\right\}\left\{\frac{\partial \cos a_2}{\partial u} + \frac{M}{\sin \psi}(\cos a_2 \cos \psi - \cos a_1)\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{EG}}{r' r''}(\sin^2 \psi - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2 + 2 \cos a_1 \cos a_2 \cos \psi) = 0.$$

Sind E, F, G in einem bestimmten System von Flächencoordinaten gegeben, so lässt sich die vorstehende nicht lineare, partielle Differentialgleichung wegen der Gleichungen (12) und (19) auf zwei lineare, partielle Differentialgleichungen reduciren.

II.

Die Ebene:

$$(X - x) \cos l + (Y - y) \cos m + (Z - z) \cos n = 0,$$

gehe durch die Normale des Punktes (x, y, z), sei $\partial \sigma$ das Bogenelement der planen Schnittcurve, ferner ϱ_τ ihr Krümmungshalbmesser im Punkte (x, y, z). Man hat dann folgende Gleichungen:

$$(1) \quad \cos a \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \cos b \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \cos c \frac{\partial z}{\partial \sigma} = 0, \quad \cos l \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \cos m \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \cos n \frac{\partial z}{\partial \sigma} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2 = 1,$$
$$\cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n = 0, \quad \frac{1}{\varrho_\tau} = \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2}\right)^2\right\}}.$$

Aus diesen Gleichungen findet man unmittelbar:

$$\begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \cos l, & \cos m, & \cos n \\ \frac{\partial x}{\partial \sigma}, & \frac{\partial y}{\partial \sigma}, & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \end{vmatrix}^2 = 1.$$

Die Gleichungen (1) nach σ differentiirt geben:

$$\cos a \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma^2} + \cos b \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma^2} + \cos c \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} = -\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{\partial \cos a}{\partial \sigma} + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \frac{\partial \cos b}{\partial \sigma} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{\partial \cos c}{\partial \sigma}\right),$$
$$\cos l \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma^2} + \cos m \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma^2} + \cos n \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} = 0.$$

Setzt man hieraus die Werthe von $\frac{\partial^2 x}{\partial \sigma^2}$ etc. in die Gleichung für ϱ_τ, nimmt die Quadratwurzel negativ, so folgt:

$$(2) \qquad \frac{1}{\varrho_\tau} = -\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{\partial \cos a}{\partial \sigma} + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \frac{\partial \cos b}{\partial \sigma} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{\partial \cos c}{\partial \sigma}\right).$$

Längs der Schnittcurve kann man u und v als Functionen von σ ansehn, es ist dann:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \cos a}{\partial \sigma} = \frac{\partial \cos a}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial \cos a}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \sigma} \text{ etc.}$$

Mittelst der Gleichungen (13), (14) und (16) von I. nimmt die Gleichung (2) folgende Form an:

$$\frac{\sqrt{(EG-F^2)}}{\varrho_\tau} = A\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\,C\frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial v}{\partial \sigma} + B\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)^2. \tag{3}$$

Im Punkte (x, y, z) der Curve, für welche u allein variirt, sei $\varrho_\tau = \varrho_u^*$, für die andere Curve sei $\varrho_\tau = \varrho_v^*$. Im ersten Falle hat man in 3) zu setzen $\sqrt{E}\cdot\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial \sigma} = 0$, im zweiten Falle ist: $\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0, \sqrt{G}\frac{\partial v}{\partial \sigma} = 1$, da allgemein die Gleichung besteht:

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\,F\frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial v}{\partial \sigma} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)^2 = 1.$$

Man erhält so:

$$\frac{1}{\varrho_u^*} = \frac{A}{E\sqrt{(EG-F^2)}}, \quad \frac{1}{\varrho_v^*} = \frac{B}{G\sqrt{(EG-F^2)}}. \tag{4}$$

In vielen Fällen ist die Anwendung eines Systems schiefwinkliger Flächencoordinaten zu complicirt, im Folgenden soll zur Vereinfachung $F = 0$, also $\cos\psi = 0$ und $\sin\psi = 1$ angenommen werden. Die Gleichungen 14) von I. geben dann:

$$M = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

An die Stelle der Gleichungen (15), (16), (12) und (20) von I. treten die folgenden:

$$(5)\begin{cases} \frac{\partial\cos a}{\partial u} = -\frac{A}{E\sqrt{G}}\cos a_1 - \frac{C}{G\sqrt{E}}\cos a_2, & \frac{\partial\cos a}{\partial v} = -\frac{C}{E\sqrt{G}}\cos a_1 - \frac{B}{G\sqrt{E}}\cos a_2, \\ \frac{\partial\cos a_1}{\partial u} = \frac{A}{E\sqrt{G}}\cos a - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos a_2, & \frac{\partial\cos a_1}{\partial v} = \frac{C}{E\sqrt{G}}\cos a + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos a_2, \\ \frac{\partial\cos a_2}{\partial u} = \frac{C}{G\sqrt{E}}\cos a + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos a_1, & \frac{\partial\cos a_2}{\partial v} = \frac{B}{G\sqrt{E}}\cos a - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos a_2, \end{cases}$$

$$(6)\quad\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v}\frac{A}{E\sqrt{G}} = \frac{B}{G\sqrt{E}}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{C}{E}, \\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{B}{G\sqrt{E}} = \frac{A}{E\sqrt{G}}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{C}{G}, \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\sqrt{(EG)}}{r'r''} = 0 \end{cases}$$

$$(7)\quad\begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \cos a_1, & \cos b_1, & \cos c_1 \\ \cos a_2, & \cos b_2, & \cos c_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Die Gleichungen (4) und die Gleichungen für die Hauptkrümmungshalbmesser werden:

$$(8)\ \frac{1}{\varrho_u^*} = \frac{A}{E\sqrt{(EG)}},\ \frac{1}{\varrho_v^*} = \frac{B}{G\sqrt{(EG)}},\ \frac{1}{\varrho_u^*} + \frac{1}{\varrho_v^*} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''},\ \frac{AB-C^2}{(EG)^2} = \frac{1}{r'\,r''},$$

Die Gleichungen 5), 6), 7) und 8) enthalten für orthogonale Flächencoordinaten die fundamentalen Relationen, welche bei Untersuchung von Flächen zur Anwendung kommen, es bleibt noch übrig für eine Curve, welche auf einer Fläche liegt, die wichtigsten Gleichungen herzustellen.

Für eine beliebige Raumcurve bilde die Tangente im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ. Seien ferner λ, μ, ν und l, m, n die Winkel, welche respective die Hauptnormale und die Normale zur Krümmungsebene mit den Axen einschliessen. Bezeichnet man durch ∂s das Bogenelement, durch $\partial \varepsilon$ den Winkel zweier successiven Tangenten, durch $\partial \omega$ den Winkel zweier successiven osculatorischen Ebenen, so sind durch die Gleichungen:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s},\quad \frac{1}{r} = \frac{\partial \omega}{\partial s},$$

der Krümmungsradius ϱ und der Torsionsradius r definirt. Längs der Curve besteht zwischen u und v eine Gleichung, man kann folglich jede dieser Variabelen als Function einer dritten Variabelen ansehn, für welche der Einfachheit halber s genommen werde. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\left(\sqrt{E}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\sqrt{G}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 = 1,$$

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} = \sqrt{E}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\cos a_1 + \sqrt{G}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}\cos a_2.$$

Ist Θ der Winkel, welchen die Tangente zur Curve im Punkte (x,y,z) mit der Curve bildet, für welche u allein variirt, so kann man setzen:

$$(9)\qquad \sqrt{E}\cdot\frac{\partial u}{\partial s} = \cos\Theta,\quad \sqrt{G}\cdot\frac{\partial v}{\partial s} = \sin\Theta,$$

folglich:

$$(10)\qquad \cos\alpha = \cos\Theta\ \cos a_1 + \sin\Theta\ \cos a_2.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 5) und 9) folgt:

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial s} = \frac{\cos\lambda}{\varrho} = H\cos a + H_1\ (\cos a_2\ \cos\Theta - \cos a_1\ \sin\Theta),$$

wo:

$$(11)\left\{\begin{aligned} H &= \left(\frac{A}{E}\cos^2\Theta + 2\frac{C}{\sqrt{(EG)}}\sin\Theta\cos\Theta + \frac{B}{G}\sin^2\Theta\right)\frac{1}{\sqrt{(EG)}} \\ H_1 &= \frac{\partial\Theta}{\partial s} - \frac{1}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\Theta + \frac{1}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin\Theta. \end{aligned}\right.$$

Nimmt man:

$$(12) \qquad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{(H^2 + H_1^2)},$$

so ist:

$$(13) \qquad \cos\lambda = \frac{H\cos a + H_1(\cos a_2 \cos\Theta - \cos a_1 \sin\Theta)}{\sqrt{(H^2 + H_1^2)}}.$$

Setzt man in der Gleichung:

$$-\frac{\cos l}{r} = \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} + \frac{\cos\alpha}{\varrho}$$

für $\cos\alpha$, $\frac{1}{\varrho}$, $\cos\lambda$ ihre Werthe aus (10), (12) und (13), so folgt mittelst der Gleichungen (6) und (9):

$$\frac{\cos l}{r} = \frac{H_1\cos a - H(\cos a_2 \cos\Theta - \cos a_1 \sin\Theta)}{\sqrt{(H^2+H_1^2)}} \left\{ \frac{H\frac{\partial H_1}{\partial s} - H_1\frac{\partial H}{\partial s}}{H^2 + H_1^2} + \left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta \right\}.$$

Nimmt man:

$$(14) \qquad \frac{1}{r} = \frac{H\frac{\partial H_1}{\partial s} - H_1\frac{\partial H}{\partial s}}{H^2 + H_1^2} + \left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta,$$

so ist:

$$(15) \qquad \cos l = \frac{H_1\cos a - H(\cos a_2 \cos\Theta - \cos a_1 \sin\Theta)}{\sqrt{(H^2 + H_1^2)}}.$$

Ist (ξ, η, ζ) der Mittelpunkt der osculatorischen Kugelfläche, R ihr Radius, so bestehen die Gleichungen:

$$\xi = x + \varrho\cos\lambda - r\frac{\partial\varrho}{\partial s}\cos l,\quad R^2 = \varrho^2 + \left(r\frac{\partial\varrho}{\partial s}\right)^2,$$

folglich nach (12), (13), (14) und (15):

$$(16) \left\{\begin{aligned} &(\xi - x)\left\{\frac{H\frac{\partial H_1}{\partial s} - H_1\frac{\partial H}{\partial s}}{H_1^2 + H^2} + \left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta\right\} = \\ &\quad \frac{\cos a}{(H^2 + H_1^2)}\left\{\frac{\partial H_1}{\partial s} + H\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - H\frac{C}{EG}\cos 2\Theta\right\} \\ &- \frac{\cos a_2\cos\Theta - \cos a_1\sin\Theta}{(H^2 + H_1^2)}\left\{\frac{\partial H}{\partial s} - H_1\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} + H_1\frac{C}{EG}\cos 2\Theta\right\}, \end{aligned}\right.$$

$$(17) \left\{\begin{aligned} &\left\{\frac{H\frac{\partial H_1}{\partial s} - H_1\frac{\partial H}{\partial s}}{H^2 + H_1^2} + \left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta\right\}^2 R^2 \\ &= \frac{1}{(H^2 + H_1^2)^2}\left\{\frac{\partial H_1}{\partial s} + H\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - H\frac{C}{EG}\cos 2\Theta\right\}^2 \\ &+ \frac{1}{(H^2 + H_1^2)^2}\left\{\frac{\partial H}{\partial s} - H_1\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} + H_1\frac{C}{EG}\cos 2\Theta\right\}^2. \end{aligned}\right.$$

Der Ausdruck von H in (11) sowie die Quantität

$$\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta$$

der Gleichungen (14), (16) und (17) lassen sich auf folgende Weise darstellen. Ist φ der Winkel, welchen die Curve, für welche u allein variirt, mit dem Hauptschnitt bildet, dessen Krümmungshalbmesser r' ist, so hat man bekanntlich:

$$\frac{1}{\varrho_u^*} = \frac{\cos^2\varphi}{r'} + \frac{\sin^2\varphi}{r''}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (8) giebt:

$$\frac{A}{E\sqrt{(EG)}} = \frac{\cos^2\varphi}{r'} + \frac{\sin^2\varphi}{r''},\quad \frac{B}{G\sqrt{(EG)}} = \frac{\sin^2\varphi}{r'} + \frac{\cos^2\varphi}{r''},$$

$$\left(\frac{C}{EG}\right)^2 = \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi.$$

Nimmt man:

(18) $$\frac{C}{EG} = \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) \sin\varphi \cos\varphi,$$

so folgt:

$$H = \frac{\cos^2(\Theta - \varphi)}{r'} + \frac{\sin^2(\Theta - \varphi)}{r''},$$

$$\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta = \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)\sin(\Theta - \varphi)\cos(\Theta - \varphi)\ ^*).$$

III.

Die Tangenten zu den Hauptschnitten hüllen zwei Systeme von Curven ein, die nach Monge Krümmungslinien heissen. Lässt man ein orthogonales System von Flächencoordinaten mit den Krümmungslinien zusammenfallen, so hat man in der Gleichung (18) von II. entweder $\sin\varphi = 0$ oder $\cos\varphi = 0$, also $C = 0$. Die Krümmungshalbmesser ϱ_u^* und ϱ_v^* sind dann mit r' und r'' identisch. Sei $\varrho_u^* = r'$ und $\varrho_v^* = r''$. Die Gleichungen (8) und (6) von II. geben dann:

(1) $$\frac{A}{E\sqrt{(EG)}} = \frac{1}{r'},\quad \frac{B}{G\sqrt{(EG)}} = \frac{1}{r''}.$$

---

*) Unter den verschiedenen Theoremen zu welchen die vorhergehenden Formeln Veranlassung geben, möge nur das folgende hervorgehoben werden. Haben r' und r'' entgegengesetzte Zeichen, so existiren auf der Fläche zwei Systeme von Curven, bestimmt durch die Gleichung $H = 0$, welche die Eigenschaft haben, dass der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts, welcher durch eine ihrer Tangenten geht, unendlich gross ist. Diese Linien heissen bekanntlich nach Dupin asymptotische Linsen. Setzt man in den Gleichungen (11) und (14) $H = 0$, so folgt durch Elimination von Θ:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{AB - C^2}{(EG)^2} \text{ d. i. } r^2 = -r'r''.$$

Das Quadrat des Torsionsradius einer asymptotischen Linie in einem Punkte einer Fläche ist also gleich dem negativen Product der beiden Hauptkrümmungshalbmesser in diesem Punkte. Ist für eine Fläche das Krümmungsmaass negativ constant, so existiren auf derselben zwei Systeme von Curven von constantem Torsionsradius.

$$(2)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\sqrt{E}}{r'}=\dfrac{1}{r''}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\sqrt{G}}{r''}=\dfrac{1}{r'}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\end{cases}\quad\text{oder}\quad\begin{aligned}&\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{1}{r'}\\ &\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=\sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{1}{r''}\end{aligned}$$

$$(3)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)+\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\dfrac{\sqrt{(EG)}}{r'\,r''}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{r''}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\right)+\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{r'}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\right)+\dfrac{\sqrt{(EG)}}{r'\,r''}=0.\end{cases}$$

Die zweite der vorstehenden Gleichungen folgt unmittelbar aus der ersten durch Zuziehung der Gleichungen (2). Für den vorliegenden Fall mögen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 übergehn in a', b', c' und a'', b'', c''. Es ist dann:

$$(4)\qquad \frac{\partial x}{\partial u}=\sqrt{E}\,.\cos a',\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\sqrt{G}\,.\cos a''.$$

Wegen der Gleichungen (1) und $C=0$ treten an die Stelle der Gleichungen (5) von II. die folgenden:

$$(5)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\cos a}{\partial u}=-\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\cos a', & \dfrac{\partial\cos a}{\partial v}=-\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\cos a''\\ \dfrac{\partial\cos a'}{\partial u}=\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\cos a-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos a'', & \dfrac{\partial\cos a'}{\partial v}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos a''\\ \dfrac{\partial\cos a''}{\partial u}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos a', & \dfrac{\partial\cos a''}{\partial v}=\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\cos a-\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos a'\end{cases}$$

Es ist ferner:

$$(6)\qquad\begin{vmatrix}\cos a, & \cos b, & \cos c\\ \cos a', & \cos b', & \cos c'\\ \cos a'', & \cos b'', & \cos c''\end{vmatrix}=1$$

Für die Krümmungslinie, längs welcher v allein variirt, sollen die Quantitäten α, ϱ, λ, l, r, ξ, R der Gleichungen (10) und (12)—(17) von II. mit dem Index v versehen werden. Man findet dann:

$$(7)\quad\begin{cases}\cos\alpha_v=\cos a'',\ \cos\lambda_v=\dfrac{\dfrac{\cos a}{r''}+h\cos a'}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{r''^2}+h^2\right)}},\ \cos l_v=\dfrac{h\cos a-\dfrac{\cos a'}{r''}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{r''^2}+h^2\right)}},\\ \left(\dfrac{1}{r''}\dfrac{\partial h}{\partial v}-h\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{1}{r''}\right)(\xi_v-x)=\dfrac{\partial h}{\partial v}\cos a-\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{1}{r''}\,.\cos a',\\ h=-\dfrac{1}{\sqrt{(EG)}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\ \dfrac{1}{\varrho_v}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{r''^2}+h^2\right)},\ \dfrac{1}{r_v}=\dfrac{\partial\arctan(r''h)}{\partial v},\\ \dfrac{1}{R_v^2}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{r''}\dfrac{\partial h}{\partial v}-h\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{1}{r''}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial h}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{1}{r''}\right)^2}.\end{cases}$$

Ist ein System von Krümmungslinien plan, z. B. das System, für welches v variirt, so ist:

$$r'' h = -\frac{r''}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{r' r''}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{G}}{r''}$$

unabhängig von v, also auch $\cos l_v$, da $\cos a'' \cos l_v + \cos b'' \cos m_v + \cos c'' \cos n_v = 0$, so ist $x \cos l_v + y \cos m_v + z \cos n_v$ nur von u abhängig. Bedeutet also Ω eine Function von u allein, so hat man:

$$(h r'' \cos a - \cos a')\, x + (h r'' \cos b - \cos b')\, y + (h r'' \cos c - \cos c')\, z = \sqrt{(1 + h^2 r''^2)} \,.\, \Omega,$$

oder $h r'' = \cot \sigma$ gesetzt:

$$(8) \qquad (\cos a \cos \sigma - \cos a' \sin \sigma)\, x + (\cos b \cos \sigma - \cos b' \sin \sigma)\, y + (\cos c \cos \sigma - \cos c' \sin \sigma)\, z = \Omega.$$

In der vorstehenden Gleichung ist σ der Winkel unter welchem die Ebene der planen Krümmungslinie die Fläche schneidet.

Die Gleichungen (5) geben:

$$\frac{\sqrt{G}}{r''} \frac{\partial \cos a'}{\partial u} - \frac{1}{r'} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cos a' = \frac{\sqrt{E}}{r'} \frac{\partial \cos a''}{\partial v} - \frac{1}{r''} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cos a'',$$

$$\frac{\partial \cos a'}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cos a'',$$

d. i. nach (2) und (4):

$$(9) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r''}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r'}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial x}{\partial v}\right), \\ 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Sind E, G, r', r'' als Functionen von u und v gegeben, so genügt jede der Coordinaten x, y, z zwei partiellen Differentialgleichungen von der Form der Gleichungen (9). Denkt man sich eine dieser Gleichungen integrirt, so wird die zweite Gleichung zwischen den beiden willkührlichen Functionen, welche die Integration involvirt, eine Relation geben. Ferner müssen die gefundenen Werthe von x, y, z den Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G, \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

genügen. Hieraus folgt, dass x, y, z keine willkürlichen Functionen enthalten, wenn E, G, r', r'' gegeben sind, also einem bestimmten System dieser Quantitäten nur eine Fläche entspricht. Mittelst der Gleichungen (2) lässt sich sehr einfach zeigen, dass nur E und G als gegeben anzunehmen nöthig sind, indem dann die Bestimmung von r' und r'' von einer quadratischen Gleichung abhängt. Setzt man:

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) = S \sqrt{(EG)},$$

so ist nach (3):

$$S = -\frac{1}{r' r''}, \quad S^2 = \frac{1}{(r' r'')^2} \tag{11}$$

Bedeutet T eine näher zu bestimmende Grösse, so kann man offenbar setzen:

$$\frac{1}{r'^2} = T \,.\, S, \ \frac{1}{r''^2} = \frac{S}{T}. \tag{12}$$

Wegen der Gleichung (11) ist dann:

$$T = -\frac{r''}{r'}. \tag{13}$$

Multiplicirt man die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}\right) \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} = 2 \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r'}$$

mit $\frac{1}{r'}$ und die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} = 2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{r''}$$

mit $\frac{1}{r''}$, so folgt:

$$\left(\frac{1}{r' r''} - \frac{1}{r'^2}\right) \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r'^2}, \quad \left(\frac{1}{r' r''} - \frac{1}{r''^2}\right) \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{r''^2},$$

oder nach (11) und (12):

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial T}{\partial v} &= \left(\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial v} + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v}\right) T + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ \frac{\partial T}{\partial u} &= \left(\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial u} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u}\right) T + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} T^2. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Bildet man hieraus den doppelten Werth von $\frac{\partial^2 T}{\partial u\, \partial v}$, substituirt für $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$ ihre Werthe, so erhält man für T die quadratische Gleichung:

$$L\, T^2 - 2\, M\, T + N = 0, \tag{15}$$

wo L, M, N folgende Bedeutungen haben:

$$\left\{ \begin{aligned} L &= \left(\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial v} + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v}\right) \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u}\right) = - S E \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{SEG} \frac{\partial G}{\partial u}\right), \\ N &= \left(\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial u} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u}\right) \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v}\right) = - S G \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{SEG} \frac{\partial E}{\partial v}\right), \\ M &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial v}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u}\right) - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} = \\ &\qquad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log S^2 EG}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Von den beiden Wurzeln der Gleichung (15) ist diejenige zu nehmen, welche die Gleichungen (14) identisch macht, da dieses für beide Wurzeln nicht allgemein der Fall ist, noch dieselben einander gleich sind. Die Gleichung (15) giebt:

$$2\,(LT - M)\frac{\partial T}{\partial v} + T^2\frac{\partial L}{\partial v} - 2\,T\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial v} = 0,$$
$$2\left(\frac{N}{T} - M\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T} + \frac{1}{T^2}\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{2}{T}\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial u} = 0.$$

Setzt man hierin aus (14) den Werth von $\frac{\partial T}{\partial v}$ und:

$$-\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T} = \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial u} + \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{1}{T} + \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}$$

so erhält man:

$$(17)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{2L}{SE}\frac{\partial SE}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v}\right)T^2 - 2\left(\frac{M}{SE}\frac{\partial SE}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{L}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\right)T - 2\,\frac{M}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial v} = 0,\\ &\left(\frac{2N}{SG}\frac{\partial SG}{\partial u} - \frac{\partial N}{\partial u}\right)\frac{1}{T^2} - 2\left(\frac{M}{SG}\frac{\partial SG}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial u} - \frac{N}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{1}{T} - 2\,\frac{M}{G}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0.\end{aligned}\right.$$

Jede dieser Gleichungen muss mit der Gleichung (15) eine Wurzel gemein haben, es ergeben sich durch Elimination von T zwei Differentialgleichungen für E und G, d. h. die allgemeinsten Gleichungen zur Bestimmung von E und G, wenn u und v die Argumente der Krümmungslinien sind. Da die betreffenden Gleichungen ziemlich weitläufig sind, so sollen sie hier nicht weiter angeführt werden.

Im Vorhergehenden ist stillschweigend vorausgesetzt, dass r' und r'' endliche Werthe haben, die Flächen, welche sich in der Ebene ausbreiten lassen, sollen in den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen bleiben.

IV.

Zur Erläuterung der in III. aufgestellten Gleichungen seien folgende Werthe von E und G gegeben:

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\frac{E}{k^2} = \frac{(\sin^2 p + \sin^2 q)\,\sin^2 p\,\sin^2 q}{D},\ \frac{G}{2\,k^2} = \frac{\sin^2 p + \sin^2 q - \sin^2 p\,\sin^2 q}{D}\cos^2 p\,\cos^2 q,\\ &D = \sin^2 p\,\cos^2 q + \sin^2 q\,\cos^2 p,\end{aligned}\right.$$

wo k eine Constante bedeutet und p, q in Function von u und v durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$(2)\qquad \frac{\sin p}{\sin q} = \overset{u}{e}, \quad \cos p\,\cos q = \overset{-v}{e},$$

oder:

$$\log\sin p - \log\sin q = u, \quad \log\cos p + \log\cos q = -v.$$

Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$(3)\quad\begin{aligned}&\cot p\,\frac{\partial p}{\partial u} - \cot q\,\frac{\partial q}{\partial u} = 1,\ \operatorname{tang} p\,\frac{\partial p}{\partial u} + \operatorname{tang} q\,\frac{\partial q}{\partial u} = 0,\\ &\cot p\,\frac{\partial p}{\partial v} - \cot q\,\frac{\partial q}{\partial v} = 0,\ \operatorname{tang} p\,\frac{\partial p}{\partial v} + \operatorname{tang} q\,\frac{\partial q}{\partial v} = 1.\end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(4)\qquad \sin p\,\sin q = w,$$

so folgt mittelst der Gleichungen (3):

$$(5)\qquad \frac{\partial w}{\partial u} = -w\,\frac{\sin^2 p - \sin^2 q}{D}\,,\quad \frac{\partial w}{\partial v} = w\,\frac{\cos^2 p\,\cos^2 q}{D}\,,$$

wo D dieselbe Bedeutung wie in (1) hat. Die Gleichungen (2) und (4) geben:

$$\cos p\,\cos q = e^{-v},\ 1 + w^2 - e^{-2v} = \sin^2 p + \sin^2 q,\ 2 - w^2 - e^{-2v} = D,$$
$$(\sin^2 p - \sin^2 q)(e^u + e^{-u}) = (\sin^2 p + \sin^2 q)(e^u - e^{-u}).$$

Hierdurch gehn die Gleichungen (1) und (5) über in:

$$(6)\qquad \begin{cases} E = k^2 w^2\,\dfrac{1 + w^2 - e^{-2v}}{1 - w^2 - e^{-2v}}, & G = 2k^2\,\dfrac{(1 - e^{-2v})\,e^{-2v}}{1 - w^2 - e^{-2v}}, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial u} = -w\,\dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\,\dfrac{1 + w^2 - e^{-2v}}{1 - w^2 - e^{-2v}}, & \dfrac{\partial w}{\partial v} = w\,\dfrac{e^{-2v}}{1 - w^2 - e^{-2v}}. \end{cases}$$

Mit Hülfe der vorstehenden Gleichungen giebt die Gleichung (10) von III.:

$$(7)\qquad -k^2 S = \frac{1}{(e^u + e^{-u})^2}\,\frac{1}{1 - e^{-2v}}.$$

Setzt man aus (6) und (7) die Werthe von E, G und S in die Gleichung (15) von III., so folgt:

$$(8)\qquad T = -\frac{2}{w^2}\,\frac{(1 - e^{-2v})^2}{1 + w^2 - e^{-2v}},$$

oder:

$$T = \frac{1 - e^{-2v}}{w^2}\,\frac{1 - e^{-2v} - 3w^2}{1 + w^2 - e^{-2v}}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (6) und (7) findet man, dass der zweite Werth von T nur der ersten der Gleichungen (14) genügt, nicht aber der zweiten, während der in (8) gegebene Werth beiden Gleichungen genügt. Da:

$$S = -\frac{1}{r'\,r''},\quad T = -\frac{r''}{r'}$$

so erhält man aus (7) und (8):

$$\frac{k}{r'} = \pm\frac{\sqrt{2}}{w}\,\frac{1}{e^u + e^{-u}}\sqrt{\left(\frac{1 - e^{-2v}}{1 + w^2 - e^{-2v}}\right)},\quad \frac{k}{r''} = \pm\frac{w}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{e^u + e^{-u}}\,\frac{\sqrt{(1 + w^2 - e^{-2v})}}{(1 - e^{-2v})^{\frac{3}{2}}}$$

Setzt man hierin für e^u, e^{-v} und w ihre Werthe aus (2) und (4), so folgt:

$$(9)\qquad \frac{k}{r'} = \pm\sqrt{2}\,.\,\frac{(1 - \cos^2 p\,\cos^2 q)^{\frac{1}{2}}}{(\sin^2 p + \sin^2 q)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{k}{r''} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(\sin p\,\sin q)^2}{(\sin^2 p + \sin^2 q)^{\frac{1}{2}}(1 - \cos^2 p\,\cos^2 q}$$

Führt man in die Gleichungen (9) von III. p und q statt u und v mittelst der Gleichungen (2) oder (3) als unabhängige Variabeln ein, berücksichtigt die Werthe von E, G, r' und r'' aus (1) und (9), so folgt:

$$\left\{D\sin^2 q-(\sin^2 p+\sin^2 q)\cos^2 q\right\}\left\{\sin^2 p\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}-\sin p\cos p\frac{\partial x}{\partial p}+\operatorname{tang} p\operatorname{tang} q\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right\}$$
$$=-\left\{D\sin^2 p-(\sin^2 p+\sin^2 q)\cos^2 p\right\}\left\{\sin^2 q\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}-\sin q\cos q\frac{\partial x}{\partial q}+\operatorname{tang} p\operatorname{tang} q\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right\}$$

$$\sin q\left(\sin p\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}-\cos p\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{1}{\cos p}\operatorname{tang} q\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}\right)$$
$$=\sin p\left(\sin q\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}-\cos q\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{1}{\cos q}\operatorname{tang} p\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}\right),$$

oder:

$$\sin p\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}-\cos p\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{1}{\cos p}\operatorname{tang} q\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}=0,$$
$$\sin q\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}-\cos q\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{1}{\cos q}\operatorname{tang} p\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}=0.$$

Schreibt man diese Gleichungen auf folgende Weise:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\sin p}\frac{\partial x}{\partial p}\right)}{\partial\log\cot p}=\frac{\partial\left(\frac{1}{\sin p}\frac{\partial x}{\partial p}\right)}{\partial\log\sin q},\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{\sin q}\frac{\partial x}{\partial q}\right)}{\partial\log\sin p}=\frac{\partial\left(\frac{1}{\sin q}\frac{\partial x}{\partial q}\right)}{\partial\log\cot q},$$

so erhält man unmittelbar:

$$\frac{1}{\sin p}\frac{\partial x}{\partial p}=\Phi_1(\log\cot p+\log\sin q),\quad \frac{1}{\sin q}\frac{\partial x}{\partial q}=\Psi_1(\log\cot q+\log\sin p),$$

oder:

$$\frac{1}{\sin p}\frac{\partial x}{\partial p}=\Phi(\sin q\cot p),\quad \frac{1}{\sin q}\frac{\partial x}{\partial q}=\Psi(\sin p\cot q), \tag{10}$$

wo Φ, Ψ beliebige Functionen ihrer Argumente sind. Eliminirt man x zwischen den vorstehenden Gleichungen, so folgt:

$$\Phi'(\sin q\cot p)=\Psi'(\sin p\cot q),$$

welche Gleichung nur bestehen kann, wenn jede ihrer Seiten gleich einer Constanten ist. Bezeichnet man dieselbe durch n_0, so ist:

$$\Phi'(\sin q\cot p)=n_0,\qquad \Psi'(\sin p\cot q)=n_0,$$

also:

$$\Phi(\sin q\cot p)=-l_0+n_0\sin q\cot p,\ \Psi(\sin p\cot q)=-m_0+n_0\sin p\cot q,$$

wo l_0, m_0 Constanten sind. Die Gleichungen (10) werden hierdurch:

$$\frac{\partial x}{\partial p}=-l_0\sin p+n_0\sin q\cos p,\quad \frac{\partial x}{\partial q}=-m_0\sin q+n_0\sin p\cos q.$$

Mit Weglassung einer unnöthigen Constanten folgt:

$$x=l_0\cos p+m_0\cos q+n_0\sin p\sin q.$$

Für x, y, z ergeben sich die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} x&=l_0\cos p+m_0\cos q+n_0\sin p\sin q,\\ y&=l_1\cos p+m_1\cos q+n_1\sin p\sin q,\\ z&=l_2\cos p+m_2\cos q+n_2\sin p\sin q.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Setzt man:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=E_1,\ \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2=G_1,\ \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=F_1, \tag{12}$$

so ist:

$$E = E_1 \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + G_1 \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + 2 F_1 \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial u},$$
$$G = E_1 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + G_1 \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + 2 F_1 \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial v},$$
$$0 = E_1 \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} + G_1 \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} + F_1 \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial u}\right).$$

Mittelst der Gleichungen (1) und (3) findet man:

$$E_1 = k^2 (2 \sin^2 p + \cos^2 p \sin^2 q), \quad G_1 = k^2 (2 \sin^2 q + \sin^2 p \cos^2 q),$$
$$F_1 = k^2 \sin p \sin q \cos p \cos q.$$

Die Gleichungen (11) und (12) geben für E_1, G_1 und F_1 ein zweites System von Werthen, vergleicht man dieselben mit den vorhergehenden, so folgt:

$$l_0{}^2 + l_1{}^2 + l_2{}^2 = 2 k^2, \quad m_0 n_0 + m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0,$$
$$m_0{}^2 + m_1{}^2 + m_2{}^2 = 2 k^2, \quad l_0 n_0 + l_1 n_1 + l_2 n_2 = 0,$$
$$n_0{}^2 + n_1{}^2 + n_2{}^2 = k^2, \quad l_0 m_0 + l_1 m_1 + l_2 m_2 = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass sich die Constanten l_0, m_0, n_0 etc. nur auf eine Drehung des Coordinatensystems beziehn. Man kann also setzen:

$$l_0 = k\sqrt{2}, l_1 = 0, l_2 = 0, m_0 = 0, m_1 = k\sqrt{2}, m_2 = 0, n_0 = 0, n_1 = 0, n_2 = k.$$

Die Gleichungen (11) werden dann:

$$(13) \qquad x = k \sqrt{2} \,.\, \cos p, \; y = k \sqrt{2} \,.\, \cos q, \; z = k \sin p \sin q.$$

Hieraus folgt:

$$(14) \qquad (2 k^2 - x^2)(2 k^2 - y^2) = 4 k^2 z^2.$$

Die Fläche, repräsentirt durch die vorstehende Gleichung, hat bekanntlich die Eigenschaft, dass die Summe oder Differenz der Distanzen eines ihrer Punkte von zwei festen Geraden, welche sich orthogonal schneiden, constant ist. In der Gleichung (14) ist die Ebene der beiden Geraden zur xy-Ebene und die Halbirungslinie des rechten Winkels zur Achse der x genommen. Die vorkommende Constante ist durch $2k$ bezeichnet. Da nach (13) x, y, z immer endliche Werthe haben, so bezieht sich die Gleichung (14) auf eine constante Summe der Distanzen. Ist die Differenz der Distanzen constant, so treten an die Stelle der Gleichungen (13) die folgenden:

$$x = k \sqrt{2} \cos pi, \; y = k \sqrt{2} \cos qi, \; z = - k \sin pi \sin qi,$$

wo $i = \sqrt{(-1)}$. *)

---

*) Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, dass die Fläche, repräsentirt durch die Gleichung (14), vier Umbilici, aber nicht eine sogenannte Linie sphärischer Krümmung hat, d. h. eine Curve längs welcher $r' = r''$ ist. (Mém. couronnés de l'Ac. Belgique t. XXXII). Die Bedingung $r' = r''$ giebt $2 \sin^2 p + \sin^2 q + \sin^2 q \cos^2 p = 0$, welche Gleichung nur bestehen kann, wenn p und q einen der Werthe 0 oder 180°

V.

Zu Folge der Gleichungen (11), (13), (15) und (16) von III. ist:

$$S = -\frac{1}{r' r''}, \quad T = -\frac{r''}{r'}, \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{\partial T}{\partial v} &= \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial v} + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\right) T + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v} \\ -\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T} &= \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial u} + \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{1}{T} + \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$L T^2 - 2 M T + N = 0, \tag{3}$$

wo, mit Rücksicht auf den Werth von S und die Gleichungen (2) von III., L, M, N folgende Bedeutungen haben:

$$\left\{\begin{aligned} L &= -SE\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{SEG}\frac{\partial G}{\partial u}\right) = -2\frac{\sqrt{(EG)}}{r' r''}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{r' r''}{\sqrt{(EG)}}\frac{r'}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''}\right\}\cdot\sqrt{\frac{E}{G}}, \\ N &= -SG\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{SEG}\frac{\partial E}{\partial v}\right) = -2\frac{\sqrt{(EG)}}{r' r''}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{r' r''}{\sqrt{(EG)}}\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r'}\right\}\cdot\sqrt{\frac{G}{E}}, \\ M &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{\sqrt{(EG)}}{r' r''}\right)^2 - 4\frac{r' r''}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r'}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Genügen für gegebene Werthe von E und G beide Wurzeln der Gleichung (3) den beiden Gleichungen (2), so ergeben sich zwei Flächen, die auf einander abwickelbar sind. Die Aufsuchung dieser Flächen kommt darauf hinaus, die Flächen zu finden, welche sich so biegen lassen, dass ihre Krümmungslinien nach der Biegung Krümmungslinien bleiben. Da die Gleichung (3) quadratisch ist, so lässt sich eine derartige Biegung nur auf eine Weise ausführen. Ein besonderer Fall ist noch zu bemerken, wenn die Gleichung (3) identisch besteht, d. h. die Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ stattfinden. Sind U_1 und V_1 resp. Functionen von u und v allein, so geben die beiden Gleichungen $L = 0$ und $N = 0$:

---

haben. Diesen Werthen entsprechen vier Punkte in der xy-Ebene. Der Begriff einer Linie sphärischer Krümmung wird gewöhnlich nach Monge angeführt, ohne dass, soweit dem Verfasser bekannt, derselbe sich durch irgend ein Beispiel erläutert findet. Aus diesem Grunde mögen die beiden folgenden Sätze hier angeführt werden. Existirt auf einer Fläche eine Linie sphärischer Krümmung, so liegt dieselbe auf einer Kugelfläche, welche die erstere Fläche längs der bemerkten Curve berührt. Soll eine Rotationsfläche Linien sphärischer Krümmung enthalten, so muss die Evolute der Meridiancurve in der Ebene des Meridians die Rotationsaxe schneiden, der Anzahl der Schnittpunkte entspricht eine gleiche Anzahl Linien sphärischer Krümmung. Diesen Satz verificirt man leicht, wenn für x, y, z folgende Gleichungen genommen werden:

$$x = (V' \cos v + V \sin v)\cos u,\ y = (V' \cos v + V \sin v)\sin u,$$
$$z = V' \sin v - V \cos v,$$

wo V eine beliebige Function von v und V' die Derivirte bedeutet.

(5) $$\frac{1}{SEG}\frac{\partial G}{\partial u} = 2\,U_1, \quad \frac{1}{SEG}\frac{\partial E}{\partial v} = 2\,V_1.$$

Die Gleichung $M = 0$ d. i.:

$$\frac{\partial^2 \log S^2 EG}{\partial u\,\partial v} = \frac{2}{EG}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}$$

geht dann über in:

$$\frac{\partial^2 \log S^2 EG}{\partial u\,\partial v} = 8\;U_1\,V_1\,S^2\,EG.$$

Hieraus folgt:

(6) $$S^2\,EG = \frac{1}{8}\,\frac{U'\,V'}{(U+V)^2}\,\frac{1}{U_1\,V_1},$$

wo U nur von u, V nur von v abhängt. Verschwindet keine der Functionen U_1 oder V_1, so kann in (6) keine der Functionen U oder V constant sein. Die Gleichungen (5) lassen sich schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = U_1 S \sqrt{(EG)}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = V_1\,S\,\sqrt{(EG)}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen geht die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) = -\frac{\sqrt{(EG)}}{r'\,r''} = S\,\sqrt{(EG)}$$

über in:

$$V_1\,\frac{\partial \log S\sqrt{EG}}{\partial v} + U_1\,\frac{\partial \log S\sqrt{(EG)}}{\partial u} + \frac{\partial V_1}{\partial v} + \frac{\partial U_1}{\partial u} = 1,$$

d. i. nach (6):

(7) $$\frac{1}{2U'}\,\frac{\partial (U_1 U')}{\partial u} + \frac{1}{2V'}\,\frac{\partial (V_1 V')}{\partial v} - \frac{U_1\,U' + V_1\,V'}{U+V} = 1.$$

Da U und V nicht constant sein sollen, so kann man in $U_1\;U'$ und $V_1\;V'$ resp. u und v durch U und V ausdrücken und demgemäss setzen:

$$U_1\,U' = \Phi\,(U), \quad V_1\,V' = \Psi\,(V).$$

Die Gleichung (7) wird dann:

(8) $$\Phi'\,(U) + \Psi'\,(V) - \frac{\Phi\,(U) + \Psi\,(V)}{U+V} = 1\,.$$

Diese Gleichung ist aber unmöglich, differentiirt man dieselbe zuerst nach U und dann nach V, so folgt:

$$\Phi'\,(U) + \Psi'\,(V) - \frac{\Phi\,(U) + \Psi\,(V)}{U+V} = 0,$$

welche Gleichung mit der Gleichung (8) im Widerspruch steht. Die Gleichung (8) kann nur möglich sein, wenn eine der beiden Functionen U oder V constant ist, dann muss aber nach (6) eine der Functionen U_1 oder V_1 verschwinden, d. h. es ist nach (5):

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \text{ oder } \frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

In dem einen wie in dem andern Falle ist ein System von Krümmungslinien plan, die Ebenen derselben schneiden die Fläche orthogonal, die Krümmungslinien sind gleichzeitig kürzeste Linien. Die Flächen, welche den Gleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$ entsprechen, sind schon von Bour (Journ. de l'éc. polytechn. t. XXII. p. 89) untersucht worden, weshalb eine weitere Ausführung derselben hier unterbleiben soll. Nur sei bemerkt, dass eine solche Fläche die Enveloppe einer Rotationsfläche ist, welche sich so bewegt, dass ein fester Punkt der Rotationsaxe eine plane Curve beschreibt, deren Ebene zur Rotationsaxe senkrecht ist. Im Folgenden sollen diese Flächen ausgeschlossen bleiben, also angenommen werden, dass keine der Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial u}=0,\ \frac{\partial E}{\partial v}=0$$

stattfindet.

Um die Bedingung aufzustellen, welche ausdrückt, dass beide Wurzeln der Gleichung (3) den Gleichungen (2) genügt, scheint es am einfachsten zu sein, auf folgende Weise zu verfahren. Dem Punkte (x, y, z) einer Fläche F entspreche der Punkt (x_1, y_1, z_1) einer Fläche F_1 so, dass E und G in beiden Punkten dieselben Werthe haben. Für beide Flächen sind u und v die Argumente der Krümmungslinien, ferner sollen r_1' und r_1'' für den Punkt (x_1, y_1, z_1) dieselbe Bedeutung haben, wie r' und r'' für den Punkt (x, y, z). Man hat dann die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r'}=\frac{1}{r''}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''}=\frac{1}{r'}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r_1'}=\frac{1}{r_1''}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r_1''}=\frac{1}{r_1'}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Diese Gleichungen geben:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r'}=\frac{r_1''}{r''}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r_1'}=\frac{r_1''}{r''}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r'}{r_1'}\frac{\sqrt{E}}{r'}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''}=\frac{r_1'}{r'}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r_1''}=\frac{r_1'}{r'}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r''}{r_1''}\frac{\sqrt{G}}{r''}\right),$$

oder:

$$(9)\quad \begin{cases} \left(1-\frac{r_1''\,r'}{r''\,r_1'}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\log\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)=\frac{r_1''}{r''}\frac{\partial}{\partial v}\frac{r'}{r_1'}, \\ \left(1-\frac{r_1'\,r''}{r'\,r_1''}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\log\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)=\frac{r_1'}{r'}\frac{\partial}{\partial u}\frac{r''}{r_1''}. \end{cases}$$

Da S für beide Flächen in entsprechenden Punkten gleiche Werthe hat, so ist $r_1'\,r_1''=r'\,r''$. Diese Gleichung lässt sich ersetzen durch:

$$(10)\quad \frac{r_1'}{r'}=\frac{1-w}{1+w},\ \frac{r_1''}{r''}=\frac{1+w}{1-w},$$

wo w eine näher zu bestimmende Function von u und v ist. Mittelst der Gleichungen (9) gehen die Gleichungen (9) über in:

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{E}}{r'} = -\frac{1}{2w} \frac{1+w}{1-w} \frac{\partial w}{\partial v} = -\left(\frac{1}{1-w} + \frac{1}{2w}\right) \frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{G}}{r''} = -\frac{1}{2w} \frac{1-w}{1+w} \frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{1}{1+w} - \frac{1}{2w}\right) \frac{\partial w}{\partial u}.$$

Diese Gleichungen integrirt geben:

$$(11) \qquad \frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}} u_1', \quad \frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}} v_1',$$

wo u_1 nur von u, v_1 nur von v abhängt und

$$u_1' = \frac{\partial u_1}{\partial u}, \quad v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial v}$$

ist. Aus den Gleichungen (11) folgt:

$$(12) \qquad \left(\frac{1}{v_1'} \frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 - \left(\frac{1}{u_1'} \frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 = 1.$$

Mittelst der Gleichungen (11) geht die zweite Gleichung (3) von III. über in:

$$\frac{1}{v_1'} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v_1'} \frac{\partial \log w}{\partial v}\right) + \frac{1}{u_1'} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u_1'} \frac{\partial \log w}{\partial u}\right) = \frac{1-w^2}{2w}.$$

Nimmt man u_1 und v_1 als unabhängige Veränderliche, so ist:

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 \log w}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \log w}{\partial v_1^2} = \frac{1-w^2}{2w}.$$

Man kann immer $u_1 = u, v_1 = v$ also $u_1' = v_1' = 1$ setzen, wie aus folgenden Betrachtungen erhellt. Führt man u_1, v_1 als unabhängige Variabeln ein, so gehen $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ über in $u_1' \sqrt{E}$, $v_1' \sqrt{G}$. Die Gleichung:

$$\frac{E\sqrt{(EG)}}{r'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

bleibt dann unverändert, wenn direct $u = u_1$, $v = v_1$ gesetzt wird. Hieraus folgt, dass die beiden Gleichungen (9) von III. ungeändert bleiben, wenn direct $u = u_1$ und $v = v_1$ gesetzt wird. Nimmt man in den Gleichungen (11), (12) und (13) $u_1 = u$ und $v_1 = v$, so erhält man in Verbindung mit (10):

$$(14) \qquad \frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}}, \quad \frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}}, \quad \frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}}, \quad \frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}}.$$

$$(15) \qquad \left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{\sqrt{E}}{r_1'}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{G}}{r_1''}\right)^2 = 1.$$

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 \log w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log w}{\partial v^2} = \frac{1-w^2}{2w}.$$

Die Gleichungen (9) von III. gehen nach (14) über in:

$$(17)\quad \begin{cases} 2\,\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{E}\,\dfrac{\partial E}{\partial v}\,\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{1}{G}\,\dfrac{\partial G}{\partial u}\,\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ (1+w)\,\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\,\dfrac{\partial x}{\partial u}\right) + \dfrac{1-w}{2w}\,\dfrac{\partial w}{\partial u}\,\dfrac{1}{\sqrt{E}}\,\dfrac{\partial x}{\partial u} = \\ (1-w)\,\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\,\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) + \dfrac{1+w}{2w}\,\dfrac{\partial w}{\partial v}\,\dfrac{1}{\sqrt{G}}\,\dfrac{\partial x}{\partial v}\,. \end{cases}$$

Um die entsprechenden Gleichungen für x_1 zu erhalten, hat man nur nöthig, in den Gleichungen (17) $x = x_1$ und $-w$ statt w zu setzen. Ist w bekannt, so ergeben sich E und G mittelst der Gleichungen:

$$(18)\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{r''}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\sqrt{E}}{r'} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial \log w}{\partial v}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial \log w}{\partial u}.$$

Es lässt sich leicht verificiren, dass die Gleichung:

$$\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 = 1$$

die nöthige und hinreichende Bedingung ist, dass beide Wurzeln der Gleichung (3) den Differentialgleichungen (2) genügen. Ersetzt man diese Gleichung durch:

$$(19)\qquad \frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}}\,,\quad \frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}}\,,$$

so geben die Gleichungen (4)

$$L = \frac{1-w^2}{w}\,J\,\sqrt{\frac{E}{G}}\,,\ N = \frac{1-w^2}{w}\,J\,\sqrt{\frac{G}{E}}\,,\ M = -\frac{1+w^2}{w}\,J,$$

wo:

$$J = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,\log\frac{1+w}{1-w}\,.$$

Die Gleichung (2) hat in diesem Falle die beiden Wurzeln:

$$T = -\frac{1-w}{1+w}\sqrt{\frac{G}{E}}\,,\ T = -\frac{1+w}{1-w}\sqrt{\frac{G}{E}}$$

d. i. nach (19):

$$T = -\frac{r''}{r'}\,,\ T = -\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2\frac{r''}{r'}\,.$$

Die erste dieser Wurzeln genügt den Gleichungen (2), substituirt man die zweite Wurzel, so findet man mittelst der Gleichungen (19), dass dieselbe ebenfalls die Gleichungen (2) identisch macht.

Da:

$$\left(\frac{\partial\cos a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos b}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos c}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2,\ \left(\frac{\partial\cos a}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos b}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos c}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2,$$

so bleiben

$$\frac{\sqrt{E}}{r'}\,,\quad \frac{\sqrt{G}}{r''}$$

für eine Parallelfläche zu einer gegebenen Fläche unverändert. Bekanntlich entsprechen den Krümmungslinien einer Fläche wieder Krümmungslinien einer ihrer Parallelflächen. Lässt sich also eine Fläche so biegen, dass die Krümmungslinien Curven derselben Art werden, so ist dieses auch mit einer Parallelfläche derselben der Fall.

Findet zwischen r' und r'' eine Relation statt, so kann man r' und r'' als Functionen einer Variabeln t ansehen, die Gleichungen (2) in III. zeigen dann, dass E und G ebenfalls Functionen von t sind. Sollen die Gleichungen (14) stattfinden, so ist auch w Function von t. Die Gleichungen (18) geben dann:

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial t}=-\frac{1}{2w}\frac{\partial w}{\partial t},\quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t}=-\frac{1}{2w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

oder einfacher:

$$2w\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial w}+\sqrt{G}=0,\quad 2w\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial w}+\sqrt{E}=0.$$

Sind k und k_0 Constanten, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

$$\sqrt{E}=k\;\frac{2k_0+1+w}{2\sqrt{w}},\quad \sqrt{G}=k\;\frac{2k_0+1-w}{2\sqrt{w}}.$$

Setzt man diese Werthe von $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ in die beiden ersten Gleichungen (14), so folgt:

$$k\,(2k_0+1-w)=r''\,(1+w),\quad k\,(2k_0+1+w)=r'\,(1-w).$$

Die Elimination von w giebt:

$$(r'-kk_0)\,(r''-kk_0)=k^2\,(1+k_0)^2.$$

Durch diese Gleichung ist eine Parallelfläche zu der Fläche charakterisirt, für welche $r'\,r''=k^2$ ist. Nimmt man in der Gleichung (3) S constant, so ist eine Wurzel derselben gleich -1, also $r'=r''$, welchem Falle die Kugelfläche entspricht, die Gleichungen (2) verschwinden dann identisch, die zweite Wurzel giebt Flächen von constantem Krümmungsmaass. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich:

> Lässt sich eine Fläche so biegen, dass die Krümmungslinien nach der Biegung Krümmungslinien bleiben, so kann dieses auf unendlich viele Arten geschehen, wenn ein System von Krümmungslinien gleichzeitig kürzeste Linien bildet, in allen andern Fällen nur auf eine Weise. Hat eine Fläche die bemerkte Eigenschaft, so ist dieses auch mit einer ihrer Parallelflächen der Fall. Findet zwischen den Hauptkrümmungshalbmessern eine Relation statt, so ist, abgesehen von den Rotationsflächen, entweder ihr Product oder die Summe ihrer reciproken Werthe gleich einer positiven Constanten.

VI.

Die in V. gefundenen Gleichungen:

(1) $$\frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}}, \quad \frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}}, \quad \frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}}, \quad \frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}},$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{1}{2w}\frac{\partial w}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{1}{2w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

(3) $$\frac{\partial^2 \log w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log w}{\partial v^2} = \frac{1-w^2}{2w},$$

scheinen sich allgemein nicht weiter behandeln zu lassen, da die vollständige Integration der Gleichungen (2) und (3) auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst. Um daher zu einigen Resultaten zu gelangen, wird es am einfachsten sein, den umgekehrten Weg einzuschlagen, also einzelne Flächen oder eine Gattung von Flächen zu betrachten und die in ihren Gleichungen vorkommenden Constanten oder Functionen so zu bestimmen, dass die Gleichungen (1) erfüllt werden.

Die Gleichungen (2) lassen sich in einem Falle leicht integriren, wenn nämlich E und G Functionen von w sind, dann zeigen aber die Gleichungen (1), dass zwischen r' und r'' eine Relation stattfindet; man erhält wieder das in V. gefundene Resultat.

Die Flächen, für welche die Gleichung (3) von V. identisch verschwindet, gehören zu einer allgemeinen Gattung von Flächen, für welche ein System von Krümmungslinien plan ist; es ergiebt sich hier die Aufgabe, die Flächen mit einem System planer Krümmungslinien zu finden, deren Gleichungen den Gleichungen (1) genügen.

Sei das System der Krümmungslinien, für welches v allein variirt, plan, dann ist der Ausdruck:

$$\frac{r''}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{r'r''}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''}$$

unabhängig von v, nach (1) und (2) ist also:

$$\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{1}{1+w}\frac{\partial w}{\partial u} = 2\frac{\partial \operatorname{arc.tang}\sqrt{w}}{\partial u}$$

nur von u abhängig. Bezeichnet p eine Function von u, so kann man setzen:

$$2\frac{\partial \operatorname{arc\,tang}\sqrt{w}}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial u}.$$

Hieraus folgt:

(4) $$\sqrt{w} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p+q),$$

wo q eine näher zu bestimmende Function von v ist. Zur Vereinfachung werde gesetzt:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = p', \quad \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} = p'', \text{ etc.}$$

Setzt man den Werth von w aus (4) in die Gleichung (3), so folgt:

(5) $$(p'' + q'') \sin (p + q) = (1 + p'^2 + q'^2) \cos (p + q).$$

Von den beiden Functionen p und q soll keine constant sein also der Fall, dass eine der Quantitäten

$$\frac{\partial E}{\partial v}\ ,\quad \frac{\partial G}{\partial u}$$

verschwindet, soll hier nicht in Betracht kommen.

Die Gleichung (5) nach u differentiirt, giebt:

$$p''' \sin (p+q) = p' (p'' - q'') \cos (p+q) - p' (1+p'^2+q'^2) \sin (p+q),$$

oder rechts nach (5):

$$1 + p'^2 + q'^2 = (p'' + q'') \operatorname{tang} (p + q)$$

gesetzt:

$$\tfrac{1}{2} \sin 2 (p + q) \cdot \frac{p'''}{p'} = p'' \cos 2 (p + q) - q''.$$

Diese Gleichung nach u differentiirt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{p'''}{p'} + 4\, p'\, p'' = 0.$$

Multiplicirt man die vorstehende Gleichung mit $\frac{p'''}{p'}$, so folgt durch Integration:

$$\left(\frac{p'''}{p'}\right)^2 + 4 p''^2 = 4 f^2,$$

wo f eine Constante bedeutet. Setzt man:

$$\frac{p'''}{\sqrt{(f^2 - p''^2)}} = - 2 p',$$

multiplicirt diese Gleichung mit p'', so folgt durch Integration:

$$\sqrt{f^2 - p''^2} = g + p'^2\,.$$

oder:

(6) $$(f - g - p'^2)(f + g + p'^2) = p''^2.$$

Eine einfache Betrachtung zeigt, dass für reelle Werthe von p, man f und g positiv, ferner $f > g$ annehmen kann. Alle andern Annahmen, durch welche p eine logarithmische oder trigonometrische Function von u wird, geben für q imaginäre Werthe. Nimmt man in der Gleichung (6):

$$2 f = n^2,\ \frac{f - g}{2 f} = k^2,\ \ p' = \sqrt{(f - g)} \cos \varphi = k n \,.\cos \varphi,$$

so folgt: $n^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) = \varphi'^2$, also $\varphi = \operatorname{am} (n u + u_0)$, wo u_0 eine Constante ist. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit $u_0 = 0$ setzen, also $\varphi = \operatorname{am} n u$, und:

$$p' = k n \cos \operatorname{am} n u = \frac{\partial \arcsin (k \sin \operatorname{am} n u)}{\partial n}\,.$$

Bezeichnet p_0 eine Constante, so ist

$$\sin(p + p_0) = k \sin \mathrm{am}\, nu.$$

Man kann offenbar $p_0 = 0$ setzen; die Gleichung (5) giebt nämlich den Werth von $q - p_0$, da nun nach (4) $\sqrt{w}$ nur von $p + q$ abhängt, so fällt die Constante p_0 in $\sqrt{w}$ heraus. Setzt man also

$$\sin p = k \sin \mathrm{am}\, nu, \quad \cos p = \Delta \mathrm{am}\, nu,$$

so geht die Gleichung (5) über in:

$$\left\{(1 + q'^2 - n^2 + k^2n^2) \sin q + q'' \cos q\right\} k \sin \mathrm{am}\, nu =$$
$$\left\{(1 + q'^2 + k^2n^2) \cos q - q'' \sin q\right\} \Delta\, \mathrm{am}\, nu.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

$$(1+q'^2-n^2+k^2n^2)\sin q+q''\cos q=0, \quad (1+q'^2+k^2n^2)\cos q-q''\sin q=0,$$

oder:

$$q'^2 = n^2 \sin^2 q - 1 - n^2k^2, \quad q'' = n^2 \sin q \,.\, \cos q.$$

Die Gleichung für q'' ist nichts weiter wie der Differentialquotient der Gleichung für q'^2 nach v. Es ist: $q'^2=n^2(1-k^2)-1-n^2\cos^2 q$. Nimmt man also: $n^2(1-k^2)-1 = n^2 l^2$, so folgt: $q'^2=n^2(l^2-\cos^2 q)$. Mit Weglassung einer unnöthigen Constanten erhält man hieraus:

$$\cos q = l \sin \mathrm{am}\,(nv, l).$$

Die Moduli k und l sind durch die Gleichung verbunden:

(7) $$1 = n^2(1 - k^2 - l^2).$$

Der Einfachheit halber sollen die Moduli k und l unter der Bezeichnung der Amplitudo weggelassen werden, wobei dann stillschweigend vorausgesetzt wird, dass die elliptischen Functionen mit dem Argumente nu den Modul k haben und l der Modul der Functionen vom Argumente nv ist. Die Complemente von k^2 und l^2 sind durch k'^2 und l'^2 bezeichnet, so dass also $k^2 + k'^2 = 1$ und $l^2 + l'^2 = 1$. Aus dem Vorstehenden folgt:

(8) $$\begin{aligned} \sin p &= k \sin \mathrm{am}\, nu, & \cos p &= \Delta \mathrm{am}\, nu, \\ \sin q &= \Delta \mathrm{am}\, nv, & \cos q &= l \sin \mathrm{am}\, nv. \end{aligned}$$

Ist σ der Winkel, unter welchem die Ebene der planen Krümmungslinie die Fläche im Punkte (x, y, z) schneidet, so hat man nach den Entwicklungen von III.:

$$-\frac{r''}{\sqrt{G}}\,\frac{1}{\sqrt{E}}\,.\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \cot \sigma.$$

Mittelst der Gleichungen (1) und (8) findet man:

(9) $$\cot \sigma = \frac{\partial p}{\partial u} = kn \cos \mathrm{am}\, nu.$$

Setzt man den Werth von $\sqrt{w}$ aus (4) in die Gleichungen (1), so folgt:

$$(10)\quad \frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1}{\sin(p+q)}, \quad \frac{\sqrt{E}}{r'} = \cot(p+q), \quad \frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \cot(p+q), \quad \frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{1}{\sin(p+q)}.$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Ebene der planen Krümmungslinie mit den Coordinatenaxen bildet, so ist nach den Gleichungen (7) von III. $\alpha = l_v$, $\beta = m_v$, $\gamma = n_v$, folglich:

$$(11)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \cos a \cos\sigma - \cos a' \sin\sigma, \\ \dfrac{\partial\cos\alpha}{\partial u} = -\left(\cos a \sin\sigma + \cos a' \cos\sigma\right)\left(\dfrac{\sqrt{E}}{r'} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right) + \cos a'' \sin\sigma \dfrac{r''}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial}{\partial v} \dfrac{\sqrt{E}}{r'}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos\beta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\right)^2,$$

so ist nach (11):

$$(12)\quad \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2 + \left(\sin\sigma \frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2$$

Mittelst der Gleichungen (8), (9) und (10) folgt:

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\right)^2 = \frac{(1+k^2n^2)(n^2-1+k^2n^2)}{(1+k^2n^2-n^2\sin^2 p)^2} = \frac{(1+k^2n^2)(n^2-1+k^2n^2)}{(1+k^2n^2\cos^2\operatorname{am} nu)^2}.$$

Setzt man hierin nach (7) $1 + k^2n^2 = n^2 l'^2$, $n^2 - 1 + k^2n^2 = n^2 l^2$, so ist einfacher:

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{ll'}{l'^2 - \sin^2 p}\right)^2 = \left(\frac{n^2 ll'}{1 + k^2n^2\cos^2\operatorname{am} nu}\right)^2.$$

Wird die Quadratwurzel positiv genommen, so folgt:

$$(13)\quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial u} = \frac{ll'}{l'^2 - \sin^2 p} = \frac{n^2 ll'}{1 + k^2n^2\cos^2\operatorname{am} nu}.$$

Die Gleichung (12) lässt sich durch die beiden folgenden ersetzen:

$$(14)\quad \frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{\partial\sigma}{\partial u} = \sin\varphi \frac{\partial\varepsilon}{\partial u}, \quad \sin\sigma \frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{r'} = \cos\varphi \frac{\partial\varepsilon}{\partial u}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (8), (9) und (10) geben die vorstehenden Gleichungen durch Division:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{l'^2 \sin\operatorname{am} nv\, \Delta\operatorname{am} nu + kl\,\Delta\operatorname{am} nv \sin\operatorname{am} nu}{\cos\operatorname{am} nv \sqrt{(l'^2 - k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}.$$

Hieraus folgt:

$$(15)\quad \begin{cases} l'\cos\varphi = \dfrac{\cos\operatorname{am} nv \sqrt{(l'^2 - k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}{\Delta\operatorname{am} nv\,\Delta\operatorname{am} nu + kl\sin\operatorname{am} nv \sin\operatorname{am} nu}, \\ l'\sin\varphi = \dfrac{l'^2 \sin\operatorname{am} nv\,\Delta\operatorname{am} nu + kl\,\Delta\operatorname{am} nv \sin\operatorname{am} nu}{\Delta\operatorname{am} nv\,\Delta\operatorname{am} nu + kl\sin\operatorname{am} nv \sin\operatorname{am} nu}, \\ \dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \dfrac{l'\,\Delta\operatorname{am} nu + kl\sin\operatorname{am} nu}{l'\,\Delta\operatorname{am} nu - kl\sin\operatorname{am} nu} \cdot \dfrac{\Delta\operatorname{am} nv + l'\sin\operatorname{am} nv}{\Delta\operatorname{am} nv - l'\sin\operatorname{am} nv}. \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung (15) erhält man unmittelbar:

$$(16)\quad \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{kll' n^3 \cos\operatorname{am} nu}{1 + k^2n^2\cos^2\operatorname{am} nu}, \quad \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{l' n}{\cos\operatorname{am} nv}.$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen in Verbindung mit (13) giebt:

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} = kn \cos \operatorname{am} nu \frac{\partial\varepsilon}{\partial u}.$$

Da nun $kn \cos \operatorname{am} nu = \cot\sigma$, so ist:

$$(17) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = \cos\varphi \cot\sigma.$$

Die zweite Gleichung (11) lässt sich nach (14) einfacher schreiben:

$$(18) \quad \frac{\partial\cos\alpha}{\partial\varepsilon} = -(\cos a \sin\sigma + \cos a' \cos\sigma)\sin\varphi + \cos a'' \cos\varphi.$$

Diese Gleichung nach u differentiirt, giebt, mit Rücksicht auf (14) und (17):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\varepsilon}\right) = -(\cos a\cos\sigma - \cos a'\sin\sigma)\frac{\partial\varepsilon}{\partial u},$$

d. i. nach (11):

$$\frac{\partial^2\cos\alpha}{\partial\varepsilon^2} + \cos\alpha = 0.$$

Analoge Gleichungen finden für $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ statt. Diese Gleichungen integrirt geben:

$$\cos\alpha = \cos A\cos\varepsilon + \cos A_1\sin\varepsilon,$$
$$\cos\beta = \cos B\cos\varepsilon + \cos B_1\sin\varepsilon,$$
$$\cos\gamma = \cos C\cos\varepsilon + \cos C_1\sin\varepsilon,$$

wo zwischen den constanten Winkeln A, B, C, A_1, B_1, C_1 die Gleichungen bestehen:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1, \quad \cos^2 A_1 + \cos^2 B_1 + \cos^2 C_1 = 1,$$
$$\cos A\cos A_1 + \cos B\cos B_1 + \cos C\cos C_1 = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die festen Richtungen, bestimmt durch die Winkel A, B, C und A_1, B_1, C_1 zu einander orthogonal sind. Nimmt man die Richtungen zu Coordinatenaxen, so kann man setzen: $\cos A=0$, $\cos A_1=1$, $\cos B=-1$, $\cos B_1=0$, $\cos C=0$, $\cos C_1=0$, folglich:

$$(19) \quad \begin{cases} \cos\alpha = \cos a\cos\sigma - \cos a'\sin\sigma = \sin\varepsilon, \\ \cos\beta = \cos b\cos\sigma - \cos b'\sin\sigma = -\cos\varepsilon, \\ \cos\gamma = \cos c\cos\sigma - \cos c'\sin\sigma = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (18) und (19) geben:

$$\cos a'\cos\alpha + \cos b'\cos\beta + \cos c'\cos\gamma = -\sin\sigma,$$
$$\cos a''\cos\alpha + \cos b''\cos\beta + \cos c''\cos\gamma = 0,$$
$$\cos a'\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\varepsilon} + \cos b'\frac{\partial\cos\beta}{\partial\varepsilon} + \cos c'\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\varepsilon} = -\cos\sigma\sin\varphi,$$

d. i.

$$(20) \begin{cases} \cos a'\sin\varepsilon - \cos b'\cos\varepsilon = -\sin\sigma, \quad \cos a'\cos\varepsilon + \cos b'\sin\varepsilon = -\cos\sigma\sin\varphi, \\ \cos a''\sin\varepsilon - \cos b''\cos\varepsilon = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (19) findet man:

$$\cos\alpha\cos b' - \cos\beta\cos a' = (\cos a\cos b' - \cos b\cos a')\cos\sigma$$
$$= \sin\varepsilon\cos b' + \cos\varepsilon\cos a'.$$

Nun ist $\cos a\cos b' - \cos b\cos a' = \cos c''$

und nach (24) $\sin\varepsilon\cos b' + \cos\varepsilon\cos a' = -\cos\sigma\sin\varphi$, also: $\cos c'' = -\sin\varphi$. Diese Gleichung in Verbindung mit

$$\cos\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\cos\gamma}{\partial\varepsilon} = 0$$

giebt

$$\cos c' = -\cos\sigma\cos\varphi.$$

Die Gleichungen (19) geben:

$$\cos b''\sin\varepsilon + \cos a''\cos\varepsilon =$$
$$(\cos a\cos b'' - \cos b\cos a'')\cos\sigma - (\cos a'\cos b'' - \cos b'\cos a'')\sin\sigma$$
$$= -(\cos c'\cos\sigma + \cos c\sin\sigma) = \cos\varphi.$$

Es ist also:

$$(21)\qquad \begin{aligned}&\cos a''\cos\varepsilon + \cos b''\sin\varepsilon = \cos\varphi,\\ &\cos c' = -\cos\sigma\cos\varphi,\ \cos c'' = -\sin\varphi.\end{aligned}$$

Nach III. ist die Gleichung der Ebene der planen Krümmungslinie im Punkte (x, y, z):

$$(\cos a\cos\sigma - \cos a'\sin\sigma)\,x + (\cos b\cos\sigma - \cos b'\sin\sigma)\,y$$
$$+ (\cos c\cos\sigma - \cos c'\sin\sigma)\,z = \Omega,$$

wo Ω nur von u abhängt. Nach (19) reducirt sich diese Gleichung auf:

$$(22)\qquad x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = \Omega.$$

Die Ebenen der planen Krümmungslinien sind also einer festen Geraden parallel, welche zur Axe der z genommen ist. Die Gleichung (22) nach u differentiirt giebt:

$$(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} + (\sin\varepsilon\cos a' - \cos\varepsilon\cos b')\sqrt{E} = \frac{\partial\Omega}{\partial u}.$$

Wegen der ersten Gleichung (20) folgt:

$$(23)\qquad x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = \frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + \frac{\sin\sigma.\sqrt{E}}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}}.$$

Differentiirt man diese Gleichung wieder nach u, so findet man wegen der zweiten Gleichung (20):

$$-x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon = \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\sin\sigma\sqrt{E}}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}}\right) + \frac{\sqrt{E}\cos\sigma}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}}\sin\varphi.$$

Setzt man rechts nach (17):

$$\cos\sigma = \frac{\sin\sigma}{\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon},$$

so folgt:

$$- x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\sin \sigma . \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \right).$$

Diese Gleichung zur Gleichung (22) addirt giebt:

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \right) = - \left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} \right),$$

folglich:

$$(24) \qquad \frac{\sin \sigma . \sqrt{E}}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} = \cos \varphi \left\{ V - \int \frac{\partial \varepsilon}{\cos \varphi} \left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} \right) \right\},$$

wo V eine Function von v bedeutet. Differentiirt man die Gleichung (23) nach v, so geht die linke Seite nach (21) über in

$$(\cos a'' \cos \varepsilon + \cos b'' \sin \varepsilon) \sqrt{G} = \cos \varphi \sqrt{G}.$$

Mittelst der Gleichungen (16) und (24) folgt:

$$(25) \quad \begin{cases} \sqrt{G} = V' + \dfrac{l'n}{\cos \operatorname{am} nv} \Big\{ - V \sin \varphi + \sin \varphi \displaystyle\int \frac{\partial \varepsilon}{\cos \varphi} \left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} \right) \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int \partial \varepsilon \cdot \operatorname{tang} \varphi \left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} \right) \Big\}. \end{cases}$$

Der Werth von z ergiebt sich einfach auf folgende Weise. Es ist:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{E} . \cos c',$$

oder wegen (21).

$$- \frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{E} \cos \sigma \cos \varphi = \sqrt{E} \sin \sigma . \cot \sigma \cos \varphi.$$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$- \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \cot \sigma \cos^2 \varphi .$$

Nun ist nach (19)

$$\cot \sigma \cos^2 \varphi = \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sin \varphi}{\partial \varepsilon},$$

folglich:

$$- \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \frac{\partial \sin \varphi}{\partial \varepsilon}.$$

Bedeutet $F(v)$ eine näher zu bestimmende Function von v, so giebt die vorstehende Gleichung:

$$z = F(v) - \sin \varphi \frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} + \int \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \right) \partial \varepsilon,$$

d. i. nach (24):

$$(26)\qquad \begin{aligned} z = F(v) - \sin\varphi \left\{ V - \int \frac{\partial\varepsilon}{\cos\varphi}\left(\Omega + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2}\right)\right\} \\ - \int \operatorname{tang}\varphi \left(\Omega + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2}\right)\partial\varepsilon. \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{G}\cos c''.$$

Setzt man links für z seinen Werth aus (26), rechts für $\cos c''$ und $\sqrt{G}$ ihre Werthe aus (21) und (25), so ergiebt sich:

$$(27)\qquad \frac{\partial F(v)}{\partial v} = V\frac{l'n}{\cos\operatorname{am} nv},\quad F(v) = \int V\frac{l'n}{\cos\operatorname{am} nv}\,\partial v.$$

Nach (7), (9) und (13) ist:

$$\frac{1}{\sin\sigma}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} = \frac{n^2 ll'}{\sqrt{(1+k^2n^2\cos^2\operatorname{am} nu)}} = \frac{nll'}{\sqrt{(l'^2 - k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}.$$

Mittelst dieser Gleichung, der Gleichungen (25) und (27) geben die Gleichungen (22), (23) und (26):

$$(28)\qquad \begin{cases} x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = \Omega, \\ x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + \dfrac{\sqrt{E}}{n}\cdot\dfrac{\sqrt{(l'^2 - k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}{ll'}, \\ z = \displaystyle\int \frac{Vl'n}{\cos\operatorname{am} nv}\,\partial v + \left(\sqrt{G} - V'\right)\frac{\cos\operatorname{am} nv}{nl'}. \end{cases}$$

Setzt man ferner:

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial u} = \dfrac{n^2 ll'}{1 + k^2n^2\cos^2\operatorname{am} nu} = \dfrac{ll'}{l'^2 - k^2\sin^2\operatorname{am} nu} \\ \displaystyle\int \frac{\Delta\operatorname{am} nu}{\sqrt{(l'^2 - k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2} + \Omega\right)\partial\varepsilon = P, \\ \displaystyle\int \frac{\sin\operatorname{am} nu}{\sqrt{(l'^2 - k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2} + \Omega\right)\partial\varepsilon = P_1, \end{cases}$$

so ergeben sich, durch Substitution der Werthe von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ aus (15) in (24) und (25), für $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ folgende Gleichungen:

$$(30)\qquad \begin{cases} (\Delta\operatorname{am} nu\,\Delta\operatorname{am} nv + kl\sin\operatorname{am} nu\sin\operatorname{am} nv)\dfrac{\sqrt{E}}{n} = \\ \qquad lV\cos\operatorname{am} nv - ll'\,(P\,\Delta\operatorname{am} nv + P_1\,kl\sin\operatorname{am} nv), \\ (\Delta\operatorname{am} nu\,\Delta\operatorname{am} nv + kl\sin\operatorname{am} nu\sin\operatorname{am} nv)\dfrac{\sqrt{G}}{n} = \\ \qquad \left(\dfrac{V'}{n}\Delta\operatorname{am} nv - Vl'^2\dfrac{\sin\operatorname{am} nv}{\cos\operatorname{am} nv} - kll'P_1\right)\Delta\operatorname{am} nu \\ \quad + \left(\dfrac{V'}{n}\sin\operatorname{am} nv - V\dfrac{\Delta\operatorname{am} nv}{\cos\operatorname{am} nv} + l'P\right)kl\sin\operatorname{am} nu. \end{cases}$$

Der Fläche, bestimmt durch die Gleichungen (28), entspricht eine andere Fläche, welche als Biegung der ersteren angesehen werden kann. Für einen Punkt (x_1, y_1, z_1) dieser zweiten Fläche sollen

$$a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_1',\ b_1',\ c_1';\quad a_1'',\ b_1'',\ c_2'';\quad r_1' \text{ und } r_1''$$

analoge Bedeutungen haben, wie a, b, c etc. für den Punkt (x, y, z) der ersten Fläche. Zu Folge der Gleichungen (10) ist:

$$\frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{1}{\sin(p+q)}, \quad \frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \cot(p+q),$$

folglich:

$$\frac{r_1' r_1''}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{r_1'}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{\partial q}{\partial v}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das System der Krümmungslinien, für welches u allein variirt, plan ist. Da die analytischen Entwicklungen denen des vorhergehenden Falles analog sind, so sollen dieselben nur kurz angedeutet werden. Ist τ der Winkel, unter welchem die Ebene der planen Krümmungslinie die Fläche schneidet, so kann man setzen:

$$\cot\tau = \frac{\partial q}{\partial v} = -ln \cos \operatorname{am} nv.$$

Den Gleichungen (11), (13) und (14) entsprechen die folgenden:

$$\cos\alpha_1 = \cos a_1 \cos\tau - \cos a_1'' \sin\tau,$$

$$\frac{\partial \cos\alpha_1}{\partial v} = -(\cos a_1 \sin\tau + \cos a_1'' \cos\tau)\left(\frac{\sqrt{G}}{r''} + \frac{\partial\tau}{\partial v}\right)$$
$$+ \cos a_1' \sin\tau \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial v} = \frac{-n^2 k k'}{i + l^2 n^2 \cos^2 \operatorname{am} nv} = \frac{-kk'}{k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv},$$

$$\frac{\sqrt{G}}{r_1''} + \frac{\partial\tau}{\partial v} = \sin\psi \frac{\partial\eta}{\partial v}, \quad \sin\tau \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \cos\psi \frac{\partial\eta}{\partial v}.$$

Die letzten Gleichungen geben:

$$k'\cos\psi = \frac{\cos \operatorname{am} nu \sqrt{(k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv)}}{\Delta \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} nu \sin \operatorname{am} nv},$$

$$k'\sin\psi = \frac{k'^2 \sin \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} uv\, \Delta \operatorname{am} nu}{\Delta \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} nu \sin \operatorname{am} nv}.$$

Man findet wieder, dass die Ebenen des planen Systems einer festen Geraden parallel sind. Nimmt man:

$$\cos a_1 \cos\tau - \cos a_1'' \sin\tau = \sin\eta,$$
$$\cos b_1 \cos\tau - \cos b_1'' \sin\tau = -\cos\eta,$$
$$\cos c_1 \cos\tau - \cos c_1'' \sin\tau = 0,$$

so ist die Gleichung der Ebene der planen Krümmungslinie:

$$x_1 \sin\eta - y_1 \cos\eta = \Phi,$$

wo Φ eine Function von v bedeutet. Mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen und der folgenden:

$$\frac{1}{\cos\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{k'n}{\cos \operatorname{am} nu}, \quad \frac{1}{\cos\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \cot\tau, \ \cos c_1 = \cos\psi \sin\tau,$$

$\cos c_1' = \sin\psi$, $\cos c_1'' = \cos\psi \cos\tau$, $\cos a_1'' \sin\eta - \cos b_1'' \cos\eta = -\sin\tau$,
$\cos a_1'' \cos\eta + \cos b_1'' \sin\eta = -\sin\psi \cos\tau$, $\cos a_1' \cos\eta + \cos b_1' \cos\eta = \cos\psi$,

lassen sich die entsprechenden Gleichungen zu den Gleichungen (28), (29) und (30) herleiten. Diese Gleichungen sind folgende, in denen U eine Function von u bedeutet:

$$(31)\quad \begin{cases} x_1 \sin\eta - y_1 \cos\eta = \Phi, \\ x_1 \cos\eta + y_1 \sin\eta = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \dfrac{\sqrt{G}}{n} \cdot \dfrac{\sqrt{(k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv)}}{kk'}, \\ \qquad - z_1 = \displaystyle\int^{\bullet} \frac{Uk'n}{\cos \operatorname{am} nu}\, \partial u + \left(\sqrt{E} - U'\right) \frac{\cos \operatorname{am} nu}{nk'}. \end{cases}$$

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\eta}{\partial v} = \dfrac{-n^2 kk'}{1 + l^2 n^2 \cos^2 \operatorname{am} nv} = \dfrac{-kk'}{k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv}, \\ \displaystyle\int^{\bullet} \frac{\Delta \operatorname{am} nv}{\sqrt{(k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv)}} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + \Phi\right) \partial\eta = Q, \\ \displaystyle\int^{\bullet} \frac{\sin \operatorname{am} nv}{\sqrt{(k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv)}} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + \Phi\right) \partial\eta = Q_1. \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} (\Delta \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} nu \sin \operatorname{am} nv) \dfrac{\sqrt{E}}{n} = \\ \quad \left(\dfrac{U'}{n} \Delta \operatorname{am} nu - Uk'^2 \dfrac{\sin \operatorname{am} nu}{\cos \operatorname{am} nu} - lkk' Q_1\right) \Delta \operatorname{am} nv \\ + \left(\dfrac{U'}{n} \sin \operatorname{am} nu - U \dfrac{\Delta \operatorname{am} nu}{\cos \operatorname{am} nu} + k' Q\right) kl \sin \operatorname{am} nv, \\ (\Delta \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} nu \sin \operatorname{am} nv) \dfrac{\sqrt{G}}{n} \\ = - kU \cos \operatorname{am} nu + kk' (Q \Delta \operatorname{am} nu + Q_1 kl \sin \operatorname{am} nu). \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen enthalten die beiden Functionen Φ und U, welche mit den Functionen Ω und V auf folgende Weise zusammenhängen. Vergleicht man die Werthe von $\frac{\sqrt{G}}{n}$ aus (30) und (33), so folgt:

$$\begin{gathered} kU \cos \operatorname{am} nu + kll' (-P_1 \Delta \operatorname{am} nu + P \sin \operatorname{am} nu) = \\ \left(-\frac{V'}{n} \Delta \operatorname{am} nv + Vl'^2 \frac{\sin \operatorname{am} nv}{\cos \operatorname{am} nv} + kk' Q\right) \Delta \operatorname{am} nu \\ + \left(-\frac{V'}{n} \sin \operatorname{am} nv + V \frac{\Delta \operatorname{am} nv}{\cos \operatorname{am} nv} + kk' Q_1\right) kl \sin \operatorname{am} nu. \end{gathered}$$

Da nun V, Q, Q_1 nur von v abhängen, so müssen die Factoren von $\Delta \operatorname{am} nu$ und $\sin \operatorname{am} nu$ auf der rechten Seite constant sein. Sind λ und μ Constanten, so ist:

$$(34)\quad \begin{cases} kk' Q - \dfrac{V'}{n} \Delta \operatorname{am} nv + Vl'^2 \dfrac{\sin \operatorname{am} nv}{\cos \operatorname{am} nv} = \lambda k, \\ kk' Q_1 - \dfrac{V'}{n} \sin \operatorname{am} nv + V \dfrac{\Delta \operatorname{am} nv}{\cos \operatorname{am} nv} = \mu, \end{cases}$$

$$U \cos \operatorname{am} nu + ll' (-P_1 \Delta \operatorname{am} nu + P \sin \operatorname{am} nu) = \lambda \Delta \operatorname{am} nu + \mu l \sin \operatorname{am} nu.$$

Differentiirt man die vorstehende Gleichung nach u, berücksichtigt die Werthe von

$$\frac{\partial P}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial P_1}{\partial u}$$

aus (29), so erhält man eine zweite Gleichung zwischen P und P_1. Diese Gleichungen geben:

$$(35)\quad \begin{cases} ll'\,P + \dfrac{U'}{n}\,\Delta\,\mathrm{am}\,nu - Uk'^2\,\dfrac{\sin\mathrm{am}\,nu}{\cos\mathrm{am}\,nu} = \mu l, \\ ll'\,P_1 + \dfrac{U'}{n}\sin\mathrm{am}\,nu - U\,\dfrac{\Delta\,\mathrm{am}\,nu}{\cos\mathrm{am}\,nu} = -\lambda. \end{cases}$$

Da Ω und Φ verschwinden können, also auch P, P_1 und Q, Q_1, so ist es am zweckmässigsten, die Werthe von V und U aus den Gleichungen (34) und (35) darzustellen und dieselben in die Gleichungen (30) oder (33) zu substituiren. Man erhält dann für $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ die Gleichungen:

$$(36)\quad \begin{cases} (\Delta\,\mathrm{am}\,nu\,\Delta\,\mathrm{am}\,nv + kl\sin\mathrm{am}\,nu\sin\mathrm{am}\,nv)\,\dfrac{\sqrt{E}}{n} = \\ -(kk'\,Q_1 - \mu + l'\,P)\,l\Delta\,\mathrm{am}\,nv + (k'Q - \lambda - ll'\,P_1)\,kl\sin\mathrm{am}\,nv, \\ (\Delta\,\mathrm{am}\,nu\,\Delta\,\mathrm{am}\,nv + kl\sin\mathrm{am}\,nu\sin\mathrm{am}\,nv)\,\dfrac{\sqrt{G}}{n} = \\ -(ll'\,P_1 + \lambda - k'\,Q)\,k\,\Delta\,\mathrm{am}\,nu + (l'\,P - \mu + kk'Q_1)\,kl\sin\mathrm{am}\,nu. \end{cases}$$

Die Gleichungen (35) geben:

$$\frac{k'nU}{\cos\mathrm{am}\,nu} = (ll'P_1 + \lambda)k'\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\sin\mathrm{am}\,nu}{\cos\mathrm{am}\,nu} - \frac{ll'\,P - \mu l}{k'}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,nu}{\cos\mathrm{am}\,nu},$$

$$\frac{U'\cos\mathrm{am}\,nu}{nk'} = (ll'P_1 + \lambda)\,k'\,\frac{\sin\mathrm{am}\,nu}{\cos\mathrm{am}\,nu} - \frac{ll'\,P - \mu l}{k'}\,\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,nu}{\cos\mathrm{am}\,nu}.$$

Hieraus erhält man durch partielle Integration:

$$\int \frac{k'nU}{\cos\mathrm{am}\,nu}\,\partial u - \frac{U'\cos\mathrm{am}\,nu}{nk'} =$$

$$ll'\int \frac{\partial u}{\cos\mathrm{am}\,nu}\left(\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,nu}{k'}\,\frac{\partial P}{\partial u} - k'\sin\mathrm{am}\,nu\,\frac{\partial P'}{\partial u}\right).$$

Die Differentialquotienten von P und P_1 nach u ergeben sich leicht mittelst der Gleichungen (29). Auf diese Art findet man:

$$(37)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{k'nU}{\cos\mathrm{am}\,nu}\,\partial u - \frac{U'\cos\mathrm{am}\,nu}{nk'} = \\ \qquad\qquad \displaystyle\frac{ll'}{k'}\int \frac{\cos\mathrm{am}\,nu}{\sqrt{(l'^2 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,nu)}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2} + \Omega\right)\partial\varepsilon, \\ \displaystyle\int \frac{l'nV}{\cos\mathrm{am}\,nv}\,\partial v - \frac{V'\cos\mathrm{am}\,nv}{nl'} = \\ \qquad\qquad \displaystyle -\frac{kk'}{l'}\int \frac{\cos\mathrm{am}\,nv}{\sqrt{(k'^2 - l^2\sin^2\mathrm{am}\,nv)}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + \Phi\right)\partial\eta. \end{cases}$$

Die Functionen P, P_1, Q, Q_1, welche in $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ vorkommen, sowie die Integrale (37) in den Gleichungen für z und z_1, lassen sich leicht durch Einführung von zwei neuen Functionen an die Stelle von Ω und Φ durch Functionen ohne Integralzeichen darstellen. Durch partielle Integration folgt:

$$\int H\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2}+\Omega\right)\partial\varepsilon = H\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}-\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\Omega+\int \Omega\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}+H\right)\partial\varepsilon.$$

Wegen:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}=\frac{ll'}{l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}=\frac{l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu}{ll'},$$

ist:

$$(38)\qquad \int \Omega\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}+H\right)\partial\varepsilon=\int \frac{ll'\,\Omega}{l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}+H\right)\partial u.$$

Für:

$$H=\frac{\sin \operatorname{am} nu}{\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu)}}$$

folgt:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}+H=\frac{n^2\sin^2 \operatorname{am} nu}{\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu}}\left\{\frac{1}{n^2}+k^2\cos^2 \operatorname{am} nu-\frac{l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu}{l^2}\Delta^2 \operatorname{am} nu\right\}.$$

Da $\frac{1}{n^2}=1-k^2-l^2=l'^2-k^2$, so ist:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}+H=-\frac{n^2}{l^2}\sin \operatorname{am} nu\cdot(l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu)^{-\frac{3}{2}}.$$

Je nachdem $H\cdot\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu)}$ einen der Werthe

$$\sin \operatorname{am} nu\ ,\ \cos \operatorname{am} nu\ ,\ \Delta \operatorname{am} nu$$

hat, findet man für:

$$\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}+H}{(l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu)^{\frac{3}{2}}}$$

die Werthe:

$$-\frac{n^2}{l^2}\sin \operatorname{am} nu,\ -\frac{\cos \operatorname{am} nu}{(ll')^2},\ \frac{n^2}{l'^2}\Delta \operatorname{am} nu.$$

Die Reduction eines Integrals von der Form des Integrals (38) besteht in der Ausführung der Integrale:

$$\int \Omega\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu)}\ \Theta\cdot\partial u,$$

wo Θ eine der Functionen $\sin \operatorname{am} nu$, $\cos \operatorname{am} nu$, $\Delta \operatorname{am} nu$ ist. Diese Integrale lassen sich sämmtlich ausführen, wenn man setzt:

$$\Omega\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2 \operatorname{am} nu)}=\frac{1}{n}\frac{\partial^2 U_1'\Delta \operatorname{am} nu}{\partial u^2}+nU_1'\Delta^3 \operatorname{am} nu-k^2\frac{\partial U_1'\sin \operatorname{am} nu\cos \operatorname{am} nu}{\partial u},$$

wo U_1 eine beliebige Function von u und $U_1'=\frac{\partial U_1}{\partial u}$ ist. Genau dasselbe Verfahren lässt sich auf die Integrale in Beziehung auf v anwenden. Da die Gleichungen durch diese Reductionen an Einfachheit verlieren, so sollen dieselben nicht weiter ausgeführt werden.

Ist für die Fläche, definirt durch die Gleichungen (28), das System der Krümmungslinien, für welches u allein variirt, sphärisch, so findet die Gleichung statt:

$$\sqrt{E} = \frac{\sqrt{E}}{r'} F_1(v) + \frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{r'} F(v),$$

wo $F(v)$ und $F_1(v)$ Functionen von v sind. Mittelst der Gleichungen (8), (10) und (30) geht die vorstehende Gleichung über in:

$$(39)\left\{\begin{aligned}&\left\{F(v) - V\right\} ln \cos \operatorname{am} nv + \left\{F_1(v)\Delta \operatorname{am} nu + nkll' P_1\right\} l \sin \operatorname{am} nv \\ &= \left\{k F_1(v) \sin \operatorname{am} nu - nll' P\right\} \Delta \operatorname{am} nv.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung nach u differentiirt giebt nach (29):

$$k F_1(v) \cos \operatorname{am} nu = \frac{ll'\left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2}\right)}{\sqrt{(l'^2 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} nu)}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass $F_1(v)$ constant ist. Die Fläche ist also eine Parallelfläche zu derjenigen, für welche $F_1(v) = 0$ ist.

Nimmt man $F_1(v) = 0$, so ist:

$$\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} = 0,$$

d. h. $\Omega = x_0 \sin \varepsilon - y_0 \cos \varepsilon$, wo x_0, y_0 Constanten sind. Dieser Werth von Ω in Verbindung mit den beiden ersten Gleichungen (28) zeigt, dass sich die Constanten x_0, y_0 nur auf eine Verschiebung des Anfangspunktes der Coordinaten beziehen. Nimmt man also $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, so ist auch $\Omega = 0$. Die erste Gleichung (28) giebt dann

$$x \sin \varepsilon - y \cos \varepsilon = 0 \quad \text{und} \quad \cos a'' \sin \varepsilon - \cos b'' \cos \varepsilon = 0,$$

folglich:

$$(40) \qquad (x - V \cos a'') \sin \varepsilon - (y - V \cos b'') \cos \varepsilon = 0.$$

Wegen $F_1(v) = 0$, $P = 0$, $P_1 = 0$ erhält man aus (39) $F(v) = V$. Ist (ξ, η, ζ) der Mittelpunkt der osculatorischen Kugelfläche im Punkte (x, y, z) der sphärischen Krümmungslinie, so hat man, wegen

$$F_1(v) = 0 \quad \text{und} \quad F(v) = V:$$

$$\xi = x - V \cos a'', \ \eta = y - V \cos b'', \ \zeta = z - V \cos c''.$$

Hierdurch geht die Gleichung (40) über in: $\xi \sin \varepsilon - \eta \cos \varepsilon = 0$. Da nun ε nicht constant sein kann, ferner ξ, η, ζ nur von v abhängen, so ist die Gleichung $\xi \sin \varepsilon - \eta \cos \varepsilon = 0$ nicht anders möglich, als für $\xi = 0$, $\eta = 0$, der Mittelpunkt der osculatorischen Kugelfläche liegt auf der Axe der z. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich:

Lässt sich eine Fläche mit einem System planer Krümmungslinien so biegen, dass dieselben nach der Biegung Krümmungslinien bleiben, so sind die Ebenen des planen Systems einer festen Geraden parallel; dasselbe findet für die deformirte Fläche statt. Ist das zweite System der Krümmungslinien der primitiven Fläche sphärisch, so ist dieselbe eine Parallelfläche zu derjenigen, für welche die Ebenen des planen Systems sämmtlich durch eine feste Gerade gehen. Diese feste Gerade enthält gleichzeitig die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen des sphärischen Systems.