Ueber partielle Integration.

Von

MARTIN BRENDEL in Göttingen.

1. Man pflegt unter partieller Integration (*intégration par parties*) das bekannte Integrationsverfahren zu verstehen, das durch die Formel

$$\int u dv = uv - \int v du$$

definirt ist. Es lässt sich aber zeigen, dass diese Formel nur ein specieller Fall eines allgemeineren Verfahrens ist, welches mit mehr Recht als partielle Integration bezeichnet zu werden verdient, und welches auch wirklich das Analogon oder vielmehr die Umkehrung der partiellen Differentiation ist.

Es sei nämlich die Integration

$$y = \int f(u, v) dx$$

auszuführen, wo u und v Functionen von x darstellen. Lässt sich diese Integration ausführen, indem man v als constant ansieht, und sei dieses *partielle Integral*

$$y_0 = \int' f(u, v) dx,$$

wo der Accent am Integralzeichen bedeuten soll, dass bei der Integration v als Constante angesehen werden soll, so wird im allgemeinen y_0 eine Function von x und v sein, da man behufs der Integration u durch x ersetzen wird. Offenbar ist dann:

$$y = y_0 - \int \frac{\partial y_0}{\partial v} dv$$

und das durch diese Formel definirte Integrationsverfahren sollte eigentlich als *partielle Integration* bezeichnet werden.

Die obigen Gleichungen behalten ihre Allgemeinheit, wenn wir x statt u schreiben, und unser Verfahren ist dann durch folgende Formeln charakterisirt:*)

*) Von Herrn Zermelo wurde ich darauf aufmerksam gemacht, wie man leicht

$$(1) \quad y = \int f(x, v) dx = y_0 + y_1,$$

$$y_0 = \int f'(x, v) dx, \quad y_1 = - \int \frac{\partial y_0}{\partial v} dv = - \int \frac{\partial y_0}{\partial v} \frac{dv}{dx} dx,$$

wo die beiden Ausdrücke für y_1 ausdrücklich hingeschrieben sind, weil je nach der Beschaffenheit der Function f entweder der Gebrauch von v oder der von x als Integrationsvariabler vortheilhafter sein kann.

2. Setzen wir in dem Formelsystem (1) $f(x, v) = v$, so erhalten wir den speciellen Fall unsers Verfahrens, den man gewöhnlich als partielle Integration bezeichnet, und den man vielmehr, wie Herr Hilbert vorschlägt, *Integration eines Products* nennen sollte.

3. Wenn es auch von vornherein klar ist, dass die Integrationen, welche sich nach unserm Verfahren durch bekannte Functionen ausführen lassen, auch durch die eine oder andre der sonst üblichen Methoden ausführbar sein müssen, so scheint jenes doch häufig schneller zum Ziele zu führen als diese und namentlich zur Ableitung einer grossen Menge von Transformationen von Integralen scheint es sehr fruchtbar zu sein. Es mögen einige Beispiele gegeben werden, welche das Verfahren ein wenig illustriren sollen, auf deren Zusammenstellung ich aber leider nur beschränkte Zeit verwenden konnte, so dass ihre Wahl gewiss nicht so zweckmässig getroffen worden ist, wie es hätte der Fall sein können; auch eine generelle Untersuchung der Fälle, die sich nach unserm Verfahren behandeln lassen, wäre am Platze, ist aber von mir nicht ausgeführt worden.

Sei z. B. das Integral

$$y = \int \frac{x dx}{1 + ax + bx^2}$$

zeigen kann, dass diese Formeln wirklich die Umkehrung der partiellen Differentiation darstellen; es ist nämlich:

$$df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} du = df(u, v) - \frac{\partial f}{\partial v} dv.$$

Wenn man also setzt:

$$y = \int \frac{\partial f}{\partial u} du, \quad y_0 = f(u, v), \quad y_1 = - \int \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

so ist

$$y = y_0 + y_1, \quad \frac{dy_1}{dv} = - \frac{\partial y_0}{\partial v}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{\partial y_0}{\partial u},$$

aus welchem letzterm folgt:

$$y_0 = \int dy.$$

auszuführen; setzt man $v = 1 + ax$, so wird

$$y_0 = \int' \frac{x dx}{v + bx^2} = \frac{1}{2b} \lg(v + bx^2),$$

$$dy_1 = -\frac{1}{2b} \frac{dv}{v + bx^2} = -\frac{a}{2b} \frac{dx}{v + bx^2}$$

also:

$$\int \frac{x dx}{1 + ax + bx^2} = \frac{1}{2b} \lg(1 + ax + bx^2) - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{1 + ax + bx^2},$$

womit eine bekannte Transformationsformel abgeleitet ist.

Hat man allgemeiner:

$$y = \int x f(a + bx + cx^2) dx$$

und setzt man $v = a + bx + cx^2$, so ist, wenn man mit F diejenige Function bezeichnet, deren Ableitung f ist:

$$y_0 = \frac{1}{2c} F(v + cx^2), \quad dy_1 = -\frac{1}{2c} f(v + cx^2) dv = -\frac{b}{2c} f(v + cx^2) dx$$

und hiermit die allgemeine Transformationsformel:

$$\int x f(a + bx + cx^2) dx = \frac{1}{2c} F(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c} \int f(a + bx + cx^2) dx,$$

wonach man durch Specialisirung ausser vielen andern die folgenden sofort hinschreiben kann:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{a + bx + cx^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}},$$

$$\int x \sin(a + bx + cx^2) dx = -\frac{1}{2c} \cos(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c} \int \sin(a + bx + cx^2) dx.$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich natürlich auch ableiten durch die Substitution $a + bx + cx^2 = z$, wobei $x dx$ durch den Werth

$$\frac{1}{2c} dz - \frac{b}{2c} dx$$

zu ersetzen ist.

4. Sei ferner das Integral

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + \sqrt{b + cx}}}$$

gegeben; setzt man $v = \sqrt{b + cx}$, so wird $y_0 = \frac{2}{a} \sqrt{v + 1 + ax}$, und hier-

mit $dy_1 = -\frac{1}{a} \frac{dv}{\sqrt{v + 1 + ax}}$, also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + \sqrt{b + cx}}} = \frac{2}{a} \sqrt{1 + ax + \sqrt{b + cx}} - \frac{1}{a} \int \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{ab}{c} + v + \frac{a}{c} v^2}},$$

wo die Integration rechter Hand mit v als Integrationsvariabler ausgeführt werden kann, worauf dann v durch x zu ersetzen ist.

Ebenso erhält man, wenn man $v = \sqrt[3]{b + cx}$ setzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + \sqrt[3]{b + cx}}} = \frac{2}{a} \sqrt{1 + ax + \sqrt[3]{b + cx}} - \frac{1}{a} \int \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{ab}{c} + v + \frac{a}{c} v^3}},$$

wo man das elliptische Integral gleich in der für die weitere Transformation bequemen Form erhält.

5. Die Methode ist auch namentlich da anwendbar, wo eine Integration $\int f(x) dx$ auszuführen ist, indem $f(x)$ nicht explicit als Function von x , oder doch nur in complicirter Form als solche gegeben ist. Sei z. B. die Integration $\int \frac{dx}{\sqrt{x + v}}$ auszuführen und dabei v als Function von x durch die Gleichung

$$x = av^4 + bv^3 + cv^2 + ev + g$$

gegeben, so erhält man ohne weiteres nach unsrer Formel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x + v}} = 2 \sqrt{x + v} - \int \frac{dv}{\sqrt{av^4 + bv^3 + cv^2 + (e+1)v + g}}.$$

Diese, sowie einige der vorher gegebenen Formeln kann man auch ableiten nach der Formel

$$\int f(x + v) dx = F(x + v) - \int f(x + v) dv,$$

wo F wieder diejenige Function bezeichnet, deren Ableitung f ist und welche ebenfalls einen Specialfall unsers Verfahrens darstellt.

6. Es sei besonders auf den Fall aufmerksam gemacht, wo die Integration $\int f(x, v) dx$ auszuführen ist, während v nur durch eine Differentialgleichung von der Form $\frac{dv}{dx} = \varphi(x, v)$ gegeben ist. Lässt sich dann die Integration $y_0 = \int f(x, v) dx$ ausführen, so kann es vorkommen, dass der Ausdruck $dy_1 = -\frac{\partial y_0}{\partial v} \frac{dv}{dx} dx$ von v frei ist, womit das Integral y als Function von x und v dargestellt ist, ohne dass sich im allgemeinen v durch bekannte Functionen von x darstellen lässt. Erhält man aber auf diese Weise, was gewöhnlich der Fall sein wird, dy_1 als Function von x und v , so kann man das partielle Integrationsverfahren erneut anwenden und so auf die Darstellung des Integrals durch eine Reihe geführt werden; die Differentialgleichung $\frac{dv}{dx} = \varphi(x, v)$ braucht man nicht erst zu lösen.

Unten soll noch ein Beispiel hierfür gegeben werden. Hier wollen wir nur ein Beispiel anführen für den Fall, dass $\frac{dy_1}{dx}$ von v frei ist, welches auch zeigen soll, dass man aus einer so hergestellten Grundformel eine Reihe anderer herleiten kann.

Sei $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1+vx}}$, wo wir v zunächst unbestimmt lassen wollen, so haben wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+vx}} = \frac{2}{v} \sqrt{1+vx} + \int \frac{2+vx}{v^2 \sqrt{1+vx}} \frac{dv}{dx} dx.$$

Tritt nun der Fall ein, dass die Grösse rechter Hand unter dem Integralzeichen von v frei ist, d. h. kann v durch die Gleichung

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 \sqrt{1+vx}}{2+vx} X$$

dargestellt werden, wo X eine, im übrigen beliebige, Function von x allein ist, so wird:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+vx}} = \frac{2}{v} \sqrt{1+vx} + \int X dx.$$

Aus dieser Relation kann man unter andern eine Reihe von Transformationsformeln ableiten. Setzt man z. B. $v = x$, so wird

$$X = \frac{2+x^2}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{x} \sqrt{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + 2 \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

woraus die Integralformel:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{x} \sqrt{1+x^2}$$

folgt. Setzt man aber $v = x^{n-1}$, so erhält man in ähnlicher Weise:

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{1+x^n}} = -\frac{\sqrt{1+x^n}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{n-2}{2(n-1)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}.$$

7. Unsere Methode ist noch einer Erweiterung fähig, indem man nämlich der Grösse y_0 noch eine willkürliche Function von v hinzufügen kann, was natürlich auch in dem unter Nr. 2 genannten Specialfall möglich ist.

Das Formelsystem (1) sieht dann folgendermassen aus:

$$(2) \quad \begin{aligned} y &= \int f(x, v) dx = y_0 + y_1, \\ y_0 &= \int f(x, v) dx + W(v), \quad \frac{dy_1}{dx} = -\frac{\partial y_0}{\partial v} \frac{dv}{dx}, \end{aligned}$$

oder

$$(3) \quad y = \int' f(x, v) dx + W(v) - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \int' f(x, v) dv + W'(v) \right\} dv.$$

Da sich die Function $W(v)$ in der letztern Gleichung identisch heraushebt, so wird der Fall, wo ihre Einführung von Nutzen ist, nicht gerade sehr häufig eintreten. Ich kann aber ein einfaches Beispiel beibringen, wo sie wesentliche Dienste leistet.

Ist nämlich die Integration $y = \int v dx$ auszuführen, wo v durch die Gleichung $\frac{dv}{dx} = \frac{X}{x}$ definirt und X eine Function von x allein ist, so giebt unsere Methode ebenso wie die gewöhnliche Formel der partiellen Integration:

$$\int v dx = vx - \int X dx.$$

Ist aber v durch die Gleichung $\frac{dv}{dx} = \frac{X}{x+v}$ definirt, so giebt die gewöhnliche Methode, ebenso wie unser Formelsystem (1):

$$\int v dx = vx - \int \frac{xX}{x+v} dx,$$

wodurch nichts gewonnen ist. Führt man aber nach den Formeln (2) eine willkürliche Function $W(v)$ ein, so wird:

$$y_0 = vx + W(v)$$

und:

$$\int v dx = vx + W(v) - \int \frac{x + W'(v)}{x+v} X dx.$$

Man braucht nur $W'(v) = v$, also $W(v) = \frac{v^2}{2}$, zu wählen und erhält:

$$\int v dx = vx + \frac{v^2}{2} - \int X dx.$$

8. Es soll nun noch ein Beispiel gegeben werden für den in Nr. 6 erwähnten Fall, dass die Integration auf eine Reihe führt. Sei nämlich der Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = a \cos (\beta x + V)$$

auszuführen, wo $\frac{dV}{dx} = b \cos \varepsilon x$, und wo a, β, b, ε Constanten und zwar b und ε kleine Grössen sind. Setzen wir $y = y_0 + y_1$, so giebt unsere Methode:

$$y_0 = \frac{a}{\beta} \sin (\beta x + V),$$

$$\frac{dy_1}{dv} = -\frac{ab}{2\beta} \cos [(\beta + \varepsilon)x + V] - \frac{ab}{2\beta} \cos [(\beta - \varepsilon)x + V].$$

Wird der letztere Ausdruck wieder nach unsrer Methode integrirt und $y_1 = y_0' + y_1'$ gesetzt, so wird:

$$y_0' = -\frac{ab}{2\beta(\beta+\varepsilon)} \sin[(\beta+\varepsilon)x + V] - \frac{ab}{2\beta(\beta-\varepsilon)} \sin[\beta-\varepsilon)x + V],$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = \frac{ab^2}{4\beta(\beta+\varepsilon)} \cos[(\beta+2\varepsilon)x + V] + \frac{ab^2}{4\beta} \left(\frac{1}{\beta+\varepsilon} + \frac{1}{\beta-\varepsilon} \right) \cos(\beta x + V)$$

$$+ \frac{ab^2}{4\beta(\beta-\varepsilon)} \cos[(\beta-2\varepsilon)x + V].$$

Die weitere Anwendung des Verfahrens giebt:

$$y_0'' = \frac{ab^2}{4\beta(\beta+\varepsilon)(\beta+2\varepsilon)} \sin[(\beta+2\varepsilon)x + V] + \frac{ab^2}{4\beta^2} \left(\frac{1}{\beta+\varepsilon} + \frac{1}{\beta-\varepsilon} \right) \sin(\beta x + V)$$

$$+ \frac{ab^2}{4\beta(\beta-\varepsilon)(\beta-2\varepsilon)} \sin[(\beta-2\varepsilon)x + V]$$

u. s. w. Der Ausdruck $y = y_0 + y_0' + y_0'' + \dots$ ist ohne weiteres aufzustellen.

In diesem Beispiel tritt der Vortheil des Verfahrens besonders hervor; unsere Reihe schreitet nämlich im wesentlichen nach Potenzen von $\frac{b}{\beta}$ fort, wenigstens die ersten Glieder, solange der im Divisor vorkommende Factor $\beta - n\varepsilon$ (ε können wir stets als positiv annehmen) noch als von der Ordnung β anzusehen ist. Würde man aber behufs der Integration die Grösse $\cos(\beta x + V)$ nach Potenzen von $V = \frac{b}{\varepsilon} \sin \varepsilon x$ entwickeln, so würde diese Entwicklung zwar convergiren, aber im Falle ε erheblich kleiner als b ist, zur Anwendung unbrauchbar sein. Namentlich im Falle, wo ε sich der Grenze Null nähert, ist nur unser Verfahren anwendbar.

Die obige Reihe $y = y_0 + y_0' + y_0'' + \dots$ ist convergent, wenn wir den Fall, wo β durch ε theilbar ist, hier ausschliessen. Es könnte zwar scheinen, als ob auch sie zur Anwendung ungeeignet wäre, weil man immer zu einem Gliede gelangen muss, wo der im Divisor auftretende Factor $\beta - n\varepsilon$ ausserordentlich klein wird. Man hat hier aber ein gewisses Analogon zu Herrn Poincaré's asymptotischen Reihen: bricht man die Reihe rechtzeitig vor dem Gliede ab, für welches $|\beta - n\varepsilon|$ sein Minimum erreicht, so erhält man einen sehr genäherten Werth der Function; setzt man sie aber weiter fort, so entfernt man sich wieder von dem wahren Werthe ihrer Summe; setzt man sie aber überhaupt weit genug fort, so nähert man sich wieder gleichmässig ihrem wahren Werthe. Nur im letzten Punkte liegt der wesentliche Unterschied gegen die asymptotischen Reihen, welche eben divergent sind.

9. Das durch das vorstehende Beispiel erläuterte specielle Verfahren der partiellen Integration stammt von Gylden und bildet den wesent-

lichsten Vorzug seiner Störungstheorie; ich selbst habe es bei der Theorie der kleinen Planeten schon seit 15 Jahren angewandt, und es hat auch den eigentlichen Anlass zu den ganzen vorstehenden Betrachtungen gegeben. In der Störungstheorie tritt gerade der Fall ein, dass $\frac{b}{\varepsilon}$ sehr gross und $\frac{b}{\beta}$ sehr klein wird, also ε sehr klein im Verhältniss zu b und b sehr klein im Verhältniss zu β ist; man braucht dort von der Reihe $y = y_0 + y_0' + y_0'' + \dots$ im allgemeinen nur zwei oder drei Glieder zu berücksichtigen.

Nichts hindert übrigens, die Reihe für y so anzusetzen:

$$y = y_0 + y_0' + y_0'' + \dots + y_0^{(n)} + y_1^{(n)},$$

so dass sie endlich bleibt; das letzte Glied würde dann unausgeführte Integrale enthalten, von denen nur nachzuweisen ist, dass sie klein genug sind, um vernachlässigt werden zu können.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich schliesslich noch auf eine Bezeichnung des partiellen Differentialquotienten hinweisen, die ich beim formalen analytischen Rechnen seit längerer Zeit mit Vorthail anwende.

Ist nämlich z. B. u eine Function von drei Variabeln

$$u = f(x, y, z)$$

so bezeichne ich die Ableitungen folgendermassen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

da offenbar nur die in den Zählern stehenden Differentiale ∂u partielle, die in den Nennern stehenden dx, dy, dz aber totale sind. Der Vollständigkeit halber sollte man schreiben

$$\frac{\partial_x u}{dx}, \quad \frac{\partial_y u}{dy}, \quad \frac{\partial_z u}{dz},$$

aber beim Schreiben der Differentialquotienten kann man natürlich, wie üblich, die Indices an den Zeichen ∂ fortlassen.

Selbstverständlich sollen sich diese Ausführungen nur auf das formale Rechnen mit den Differentialen beziehen, da man wohl mit Recht im allgemeinen nur die Ableitungen einer Function, nicht aber die Differentiale, als wohldefinierte Grössen ansieht. Man wird doch wohl aber sehr

häufig der Bequemlichkeit halber beim formalen Rechnen mit Differentialen operiren und dann kann man nach obigem z. B. in

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u$$

die dx , dy , dz fortheben.

Ist nun in unserm Beispiel z wieder eine Function von x und y , also

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \partial_x z + \partial_y z,$$

so kann man mit den so bezeichneten Differentialen formal rechnen und dabei sicher vor Rechenfehlern sein. In unserm Beispiel kann man so die folgenden Ausdrücke einfach in einander transformiren:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \partial_x z + \frac{\partial u}{\partial z} \partial_y z \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u, \\ du &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ &= \partial_x u + \partial_y u + \frac{\partial_z u (\partial_x z + \partial_y z)}{\partial_z} = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u. \end{aligned}$$

Bei complicirteren Abhängigkeitsverhältnissen mehrerer Variabler unter einander hat mir diese Bezeichnungsweise für das formale Rechnen sehr grosse Dienste geleistet. — Dagegen ist im vorstehenden Aufsatz die sonst übliche Bezeichnungsweise angewandt worden, um die Darstellung nicht durch ungewohnte Bezeichnungen unübersichtlich zu machen.

Göttingen, 1901 Januar.