

ANNALEN DER PHYSIK.

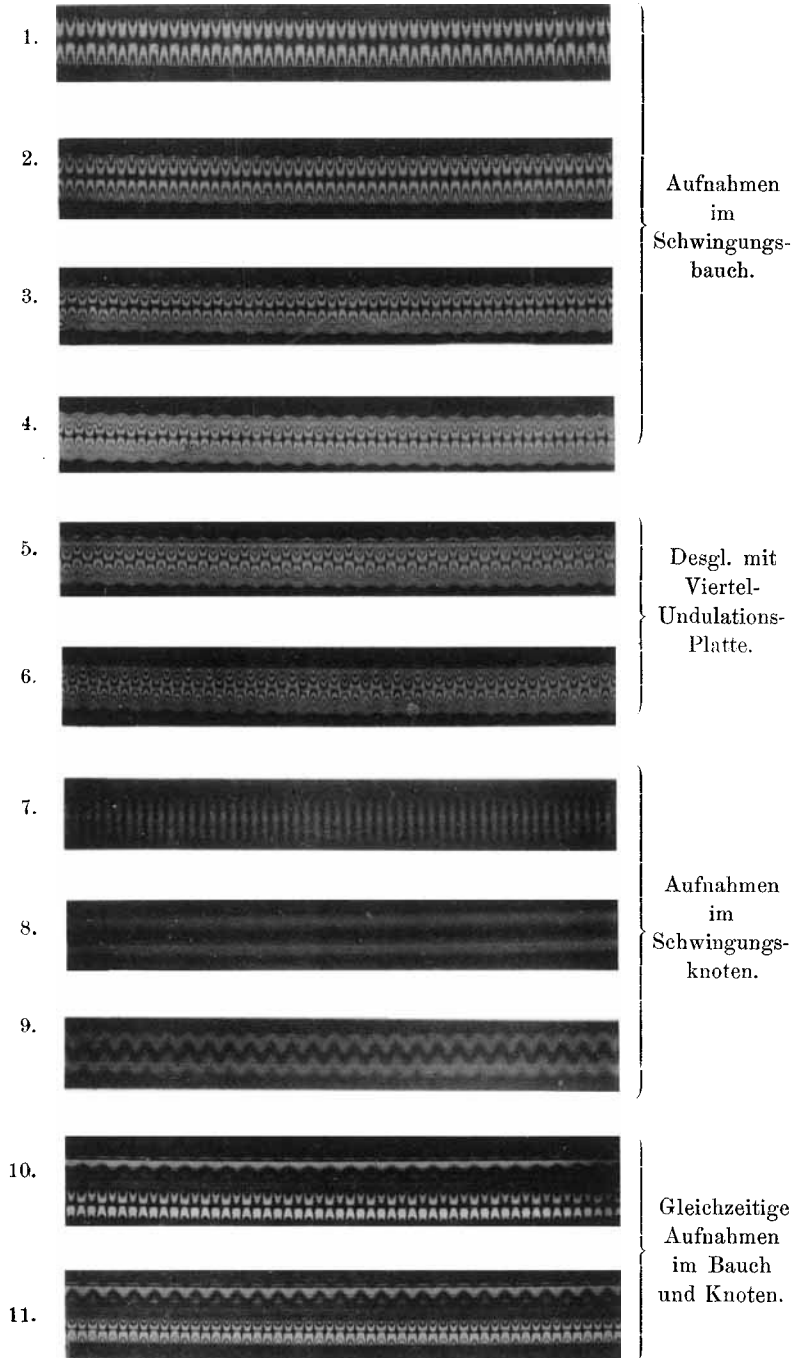
VIERTE FOLGE. BAND 4.

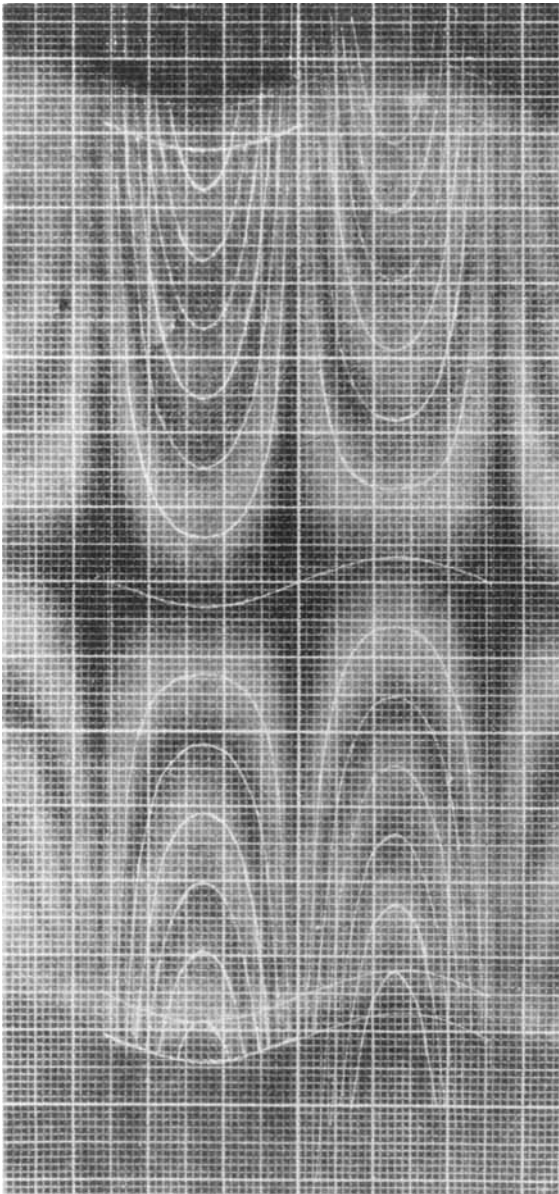
1. *Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten; von W. König.*

(Hierzu Taf. I, Figg. 1–11 und Taf. II.)

Wenn eine längliche Glasplatte oder ein vierkantiger Glasstab transversale Schwingungen mit freien Enden und zwei oder mehr Knotenlinien ausführt, so wird in den Schwingungsbäuchen, entsprechend den periodischen Verbiegungen, die die Platte hier erfährt, eine periodische Doppelbrechung von der gleichen Art auftreten, wie sie dauernd durch eine statische Durchbiegung der Platte hervorgebracht werden kann. Man kann die Frage aufwerfen, ob auch an den Knotenstellen eine Beeinflussung der Lichtschwingungen durch die elastischen Schwingungen der Platte oder die damit verknüpften elastischen Verbiegungen der Platte vorhanden ist. Einige orientierende Versuche ergaben ohne Schwierigkeit, dass in den Knotenstellen in der That eine Doppelbrechung von eigentümlicher Natur auftritt. Sie erinnert in ihrer Art an die Doppelbrechung, welche Kundt in bewegten reibenden Flüssigkeiten beobachtet hat, und schien mir einer genaueren Prüfung ihrer Gesetze und ihres Ursprunges wert zu sein. Eine solche erforderte aber auch eine genaue Untersuchung der Erscheinungen im Schwingungsbauche, um beide Vorgänge quantitativ miteinander vergleichen zu können. So entstand die nachfolgende Untersuchung. Ihr experimenteller Teil ist schon vor einer Reihe von Jahren im Institut des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. ausgeführt worden; auch habe ich auf der Lübecker Naturforscherversammlung über die experimentellen Ergebnisse kurz berichtet.¹⁾ In der theoretischen Deutung der Versuche stiess ich anfangs auf eine Schwierigkeit, die

1) W. König, Verhandl. d. Gesellsch. d. Naturf. u. Aerzte, Lübeck 1895. II. Teil. 1. Hälfte. p. 54.





weitere experimentelle und theoretische Studien veranlasste und dadurch zur Folge hatte, dass sich die ausführliche Mittheilung der Untersuchung bis jetzt verzögert hat.

1. Beschreibung der Apparate.

a) *Die Glasplatte und ihre Aufstellung.* Die untersuchte Glasplatte hatte eine Länge l von 70 cm, eine Breite b von 7 cm und eine Dicke d von 7 mm. Die Beschaffung einer Platte von dieser Grösse aus gut gekühltem, völlig spannungsfreiem Glase hätte enorme Kosten verursacht. Ich habe mich daher bei diesen Versuchen, die eigentlich nur als vorläufige Versuche betrachtet wurden, mit einer Platte begnügt, die aus gutem Spiegelglas geschnitten war. Die schmalen Längsflächen waren gut polirt, um eine gute Durchsicht in Richtung der Breite b durch die Platte zu gestatten. Die Verwendung einer derartigen Platte hatte natürlich den Uebelstand, dass die Platte schon in unverbogenem Zustande eine gewisse Doppelbrechung zeigte. Stellte man sie mit ihrer Fläche senkrecht auf die lange, schmale Seitenfläche und blickte zwischen gekreuzten Nicols, deren Polarisationsrichtungen mit der Längsrichtung der Platte Winkel von 45° bildeten, senkrecht durch die Platte in Richtung ihrer Breite hindurch, so erschien sie nicht vollkommen dunkel, sondern zeigte, parallel zu ihren Flächen, helle und dunkle Streifen, entsprechend doppelbrechenden und neutralen Schichten. Der Charakter der Doppelbrechung stimmte durchaus mit den von Czapski an schnell gekühlten Glasplatten gemachten Beobachtungen¹⁾ überein; die Glasmasse verhielt sich in der Nähe der Flächen wie gepresstes, in der Mitte zwischen den Flächen wie gedehntes Glas, wobei Zug- und Druckrichtung parallel zu den Flächen zu denken sind. Diese Doppelbrechung war nicht stark. Trotz des 7 cm langen Weges, den das Licht in der Platte zu durchlaufen hatte, ging die Interferenzfarbe nicht über das Grau der ersten Ordnung hinaus; eine Glimmerplatte, die das Violett des Ueberganges von der ersten zur zweiten Ordnung zeigte, gab an den hellsten Stellen als Additionsfarbe Blau, als Subtractionsfarbe Rot; danach würde die Gangdifferenz im Maximum

1) S. Czapski, Wied. Ann. 42. p. 319—331. 1891.

nicht über $\lambda/7$ betragen haben. Immerhin bildete diese Eigenschaft der Platte ein störendes Moment, welches die Genauigkeit der Messung der durch Verbiegung hervorgerufenen Doppelbrechung bis zu einem gewissen Grade beeinträchtigte. Eine Berücksichtigung dieses Umstandes in Form einer Correction an den Messungen wäre wohl möglich, aber sehr umständlich gewesen. Bei zweckmässiger Combination verschiedener Messungen gleicht sich der Fehler einigermaassen aus.

Um die beabsichtigten Messungen der Doppelbrechung an vollkommen frei schwingenden Plattenteilen auszuführen, wurde die Platte in solcher Weise zum Schwingen erregt, dass sich vier Knotenlinien auf ihr bildeten, die Platte also ihren dritten Transversalton gab. Nach der Rechnung von Strehlike, unter Berücksichtigung der von Seebeck¹⁾ angegebenen Correction, würden diese Knotenlinien für die gegebene Platte von 700 mm Länge folgende Abstände von dem einen Ende der Platte haben: Nr. 1 66,08, Nr. 2 249,06, Nr. 3 450,94, Nr. 4 633,92. Die Beobachtung, durch Aufstreuen von Sand auf die Platte, ergab die Werte: 66,0, 247,0, 449,0, 633,0. Zur Hervorbringung dieser Schwingungsform wurde die Platte in dem ersten und vierten Knoten unterstützt und an dem einen Ende mit dem Bogen angestrichen. Die Beobachtungen wurden dann in dem einen der vollkommen freien Knoten Nr. 2 oder Nr. 3 ausgeführt. Die Erscheinungen im Schwingungsbauch wurden im mittelsten Bauch, zwischen den Knoten 2 und 3, also in der Mitte der ganzen Platte beobachtet.

Wurde die Platte horizontal auf zwei Leisten gelegt, die sie in den Knoten 1 und 4 unterstützten, so bog sie sich durch ihr eigenes Gewicht ein wenig durch und zeigte eine dementsprechende Doppelbrechung, mit neutraler Mittellinie und beiderseits nach den Oberflächen hin zunehmender Stärke, von negativem Charakter auf der oberen, concaven, zusammengedrückten Hälfte, und von positivem Charakter auf der unteren, convexen, gedehnten Hälfte. Diesem Uebelstande wurde dadurch abgeholfen, dass die Platte nicht in horizontaler, sondern in verticaler Lage befestigt wurde, und zwar so, dass die langen, schmalen Seiten horizontal, die kurzen vertical standen,

1) A. Seebeck, Abhandl. d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Mathem.-phys. Klasse 1. p. 131—168. 1852.

das Licht also in verticaler Richtung die Platte durchsetzen musste (vgl. Fig. 2). Zu dieser Befestigung, die natürlich nur in den Knotenlinien 1 und 4 erfolgen durfte, waren besondere Vorrichtungen erforderlich, die in Fig. 1 abgebildet sind. Sie bestanden in zwei kleinen, aus starkem Holze gefügten Rahmen, von denen *A* eine Seitenansicht, *B* eine Durchsicht darstellt. Zwei gegenüberliegende Seitenwände des Rahmens enthielten einen breiten Schlitz, der zwei Holzleisten *a, a* als Führung diente. Zwischen diese, die sich in zwei flachen Kanten gegenüberstanden, wurde die Glasplatte *g* so weit eingeschoben, dass die Knotenlinie gerade zwischen den Kanten lag; mit Hilfe der Schraube *s* konnte dann die obere Leiste niedergedrückt und die Platte festgeklummt werden, wobei zum

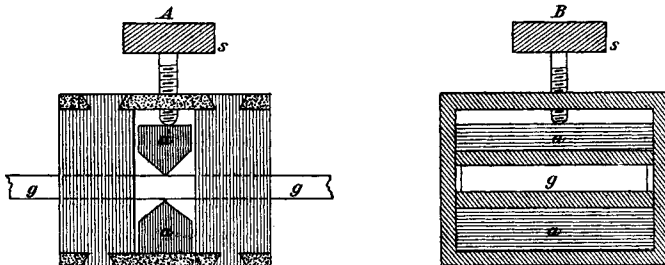


Fig. 1.

Schutze der Platte noch Lederstreifen zwischen die Holzkannte und das Glas gelegt wurden. Nachdem diese Einstellung und Befestigung bei horizontaler Lage der Platte ausgeführt war, wurden die Rahmen mit der Platte auf die hohe Kante gestellt und mit Schraubzwingen auf der Unterlage befestigt. In dieser Weise konnte der Platte eine ganz feste Lage gegeben werden, ohne dass ihre Schwingungsfähigkeit dadurch beeinträchtigt worden wäre.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch, dass sich für den dritten Transversalton der Platte aus den weiter unten besprochenen photographischen Aufnahmen und der Geschwindigkeit des dabei benutzten Fallpendels (113 cm/sec) eine Schwingungszahl von 411 ganzen Schwingungen in der Secunde ergab. Eine genaue Bestimmung dieser Grösse wurde nicht ausgeführt, da sie für das Folgende nicht weiter in Betracht kam.

b) *Die subjective Beobachtungsmethode.* Die gesuchten Erscheinungen wurden zunächst direct mit dem Auge beobachtet.

Zur bequemeren Anordnung der Apparate wurde die Platte dabei in horizontaler Lage belassen. Das Licht eines Auerbrenners fiel durch ein grosses Nicol'sches Prisma senkrecht auf die lange Schmalseite der Platte, ging in Richtung der Breite durch die Platte und wurde durch den Analysator hindurch vom Auge aufgefangen. Um aber die Erscheinungen in ihrer zeitlichen Veränderlichkeit beobachten zu können, wurde durch einen verticalen Spalt, der zwischen Platte und Analysator ganz dicht vor der Platte stand, ein schmales Bündel des Lichtes ausgeblendet und in einem rotirenden Spiegel oder einfacher durch eine Linse betrachtet, die senkrecht zur Richtung des Spaltes hin und her bewegt wurde. Sehr zweckmässig erwies sich auch hierbei wieder die von mir construirte rotirende Linsenscheibe, die schon von Hrn. G. Klinkert in seiner Arbeit über die Saitenschwingungen¹⁾ beschrieben worden ist. Es war mit diesen Hilfsmitteln möglich, nicht bloss die Erscheinungen im Schwingungsbauch und im Schwingungsknoten einzeln zu analysiren, sondern auch beide wenigstens in ihrer Phasenbeziehung miteinander zu vergleichen, indem mittels geeigneter Spiegelvorrichtungen zwei Lichtbündel gleichzeitig, das eine im Bauch, das andere im Knoten durch die Platte hindurchgeschickt und dann übereinander auf denselben Spalt projicirt wurden. Eine quantitative Vergleichung aber war wegen der Flüchtigkeit der Wahrnehmungen bei dieser Methode ausgeschlossen. Zu diesem Zweck mussten die Erscheinungen photographisch festgehalten werden.

c) *Die photographische Aufnahme der Erscheinungen.* Zur dauernden Fixirung der periodischen Vorgänge wurde das Bild des Spaltes auf eine bewegte photographische Platte projicirt. Hierfür wurde das grosse Fallpendel des Instituts benutzt, das ursprünglich für die Untersuchung des Hrn. Klinkert construiert worden war und inzwischen auch von Hrn. W. Hess bei seiner Untersuchung elektrischer Schwingungen in Inductorien²⁾ benutzt worden ist. Es ist von Hrn. Klinkert genau beschrieben worden³⁾, und ich kann mich daher be-

1) G. Klinkert, Wied. Ann. **65**. p. 851. 1898.

2) W. Hess, Wied. Ann. **66**. p. 980—998. 1898.

3) G. Klinkert, Wied. Ann. **65**. p. 850. 1898.

gnügen, zu erwähnen dass das Pendel 2 m lang ist, dass es an seinem unteren Ende eine grössere, bleibeschwerte Platte trägt, die mit einem Ausschnitt und einer Vorrichtung zum Einschieben einer Mattscheibe oder einer photographischen Cassette versehen ist, dass es seine Schwingungen in einem von allen Seiten lichtdicht abgeschlossenen Raume ausführt und in diesem Raume in abgelenkter Lage arretirt und durch eine Zugvorrichtung von aussen her im geeigneten Augenblick losgelassen werden kann. Fig. 2 stellt die ganze Versuchsanordnung in einem senkrechten Durchschnitte dar. Als Licht-

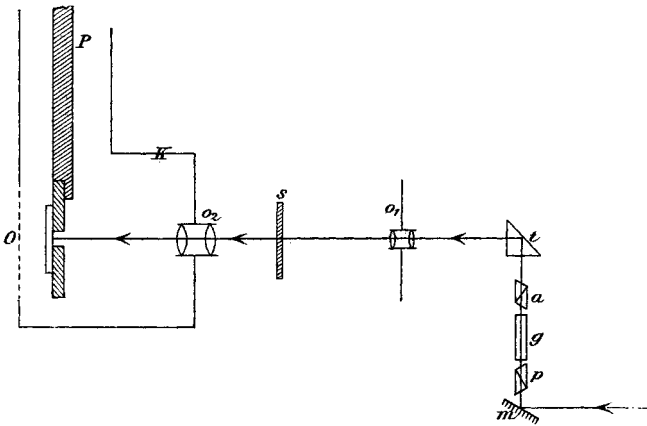


Fig. 2.

quelle wurde die Sonne benutzt. Ein Uhrwerk heliostat lenkte die Sonnenstrahlen auf den Spiegel *m*. Dieser reflectirte sie senkrecht nach oben; sie durchsetzten den Polarisator *p*, die senkrecht stehende Glasplatte *g* in Richtung ihrer Breite und den Analysator *a* und wurden dann von dem total reflectirenden Prisma *t* wieder in horizontale Richtung übergeführt. Das photographische Objectiv *O*₁ entwarf von der oberen Fläche der Glasplatte ein deutliches Bild auf der Blende *s*; diese trug einen senkrechten Spalt, der aus dem Bilde der Glasfläche senkrecht zu deren Längserstreckung eine feine Linie herauschnitt. Diese Lichtlinie endlich wurde von dem Objectiv *O*₂ auf die photographische Platte projicirt oder richtiger auf diejenige Stelle, welche die am unteren Teil des Fall-

pendels P angebrachte photographische Platte bei der Schwingung des Pendels passirte. K ist der untere, kastenartige Teil des Dunkelraumes, der in seiner vorderen Wand das Objectiv O_2 trägt; O ist eine durch einen überfallenden Sack lichtdicht verschliessbare Oeffnung in der hinteren Wand des Dunkelraumes, die zur Bedienung des Pendels bestimmt ist.

Die Hauptschwierigkeit lag in der richtigen Führung des Lichtes, nicht bloss um die erforderliche Helligkeit, sondern vor allem um die grösste Deutlichkeit der Interferenzerscheinungen in dem Bilde der Glasfläche am Ort des Spaltes s zu erreichen. Die Bedingung hierfür ist offenbar die, dass die Lichtstrahlen die Glasplatte als ein Parallelstrahlenbündel parallel zu den beiden Plattenoberflächen durchsetzen. Die mangelhafte Beschaffenheit der Glasplatte erschwerte die Erfüllung dieser Bedingung. Es erwies sich als vorteilhaft, die Sonnenstrahlen nicht direct auf den Polarisator und die Platte fallen zu lassen, sondern sie vorher durch eine grosse, schwache Convexlinse zu concentriren und ihnen dann mittels einer starken Concavlinse, die unmittelbar vor dem Spiegel m stand, den erforderlichen Grad von Parallelität wieder zu verleihen. Durch Verschiebung dieser in Fig. 2 nicht mit gezeichneten Linsen konnte die Lichtführung so geregelt werden, dass im Bilde der Glasfläche auf dem Spalt s der Querschnitt der Platte gleichmässig erhellt erschien und die Interferenzstreifen bei Verbiegung der Platte zwischen gekreuzten Nicols in voller Schärfe hervortraten.

Indem man die Glasplatte in ihrer eigenen Ebene verschob, konnte man nach Belieben die Erscheinungen im Schwingungsbauch oder im Schwingungsknoten aufnehmen. Schwieriger war das Problem, beide Erscheinungen gleichzeitig, unmittelbar übereinander auf den Spalt s zu projiciren, um ihre Phasen- und Grössenbeziehung ausmessen zu können. In diesem Falle wurde die Platte so verschoben, dass die Verticalebene der ganzen Aufstellung die Platte genau in der Mitte zwischen Bauch und Knoten schnitt. Das einfallende Lichtbündel wurde durch Spiegel in zwei Teile geteilt und auf getrennten Wegen weiter geleitet, der eine Teil durch den Knoten, der andere durch den Bauch; jedes der beiden Bündel passirte unter und über der Glasplatte seinen eigenen Polarisator und Analysator.

Ueber den Analysatoren befanden sich total reflectirende Prismen, welche die beiden Lichtbündel wieder auf horizontale Richtung brachten, sie aber senkrecht zur Verticalebene der Aufstellung aufeinander zu reflectirten. In der Mitte zwischen diesen Prismen befanden sich zwei weitere total reflectirende Prismen, mit gekreuzten Hypotenusenflächen unmittelbar nebeneinander liegend und so angeordnet, dass jedes von ihnen eines der beiden Strahlenbündel wieder senkrecht nach oben reflectirte. Hier wurden dann endlich beide Bündel von einem fünften, total reflectirenden Prisma aufgefangen, das sie wieder in horizontale Richtung überführte und auf das Objectiv O_1 warf. Bei richtiger Einstellung der fünf Prismen entstanden dann auf dem Spalt s zwei unmittelbar übereinander gelegene Bilder der Glasfläche, von denen das eine vom Schwingungsbauch, das andere vom Schwingungsknoten herrührte. Die gleichmässige, richtige Erhellung der beiden Bilder hatte aber in diesem Falle grosse Schwierigkeiten.

Nachdem die richtige Einstellung des ganzen optischen Apparates erreicht war, wurden die Aufnahmen in folgender Weise ausgeführt: Bei geschlossenem Objectiv O_2 wurde die Cassette in den Rahmen am Fallpendel eingeschoben, das Fallpendel in die Auslösungsvorrichtung eingehakt und die Cassette dann geöffnet. Darauf wurde das Objectiv O_2 geöffnet; ein Gehülfe strich die Glasplatte mit dem Bogen an und zugleich wurde das Pendel ausgelöst. Unmittelbar darauf wurde das Objectiv O_2 wieder verdeckt, damit beim Rückschwingen des Pendels das Licht die photographische Platte nicht ein zweites Mal traf. Eine Auswahl der auf diesem Wege erzielten Aufnahmen ist auf Taf. I vereinigt.

Bevor ich auf die Discussion der Versuchsergebnisse eingehe, wird es nützlich sein, die wichtigsten Formeln über den Schwingungszustand der Glasplatte, von denen ich im Folgenden Gebrauch zu machen habe, zusammenzustellen.

2. Theorie der Transversalschwingungen der Platte.

Die Längsrichtung der Platte werde als x -Axe, die Richtung ihrer Dicke als y -Axe angenommen. Macht man die Voraussetzung, dass die Dicke klein ist gegen die Länge, und beschränkt man sich auf kleine Deformationen, so kann man

die eintretenden Verschiebungen in erster Annäherung als rein transversal, d. h. nur in Richtung der y -Axe erfolgend, und daher für alle Punkte desselben Querschnittes der Platte als gleich betrachten. Die Bewegungsgleichung der Platte lässt sich dann in der Form ansetzen:¹⁾

$$(1) \quad \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial x},$$

wenn unter μ die Dichte des Glases, unter P die im Querschnitt wirkende tangentielle Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit, verstanden wird. Mit den Verbiegungen der Platte steht diese Kraft im Zusammenhang durch die Beziehung:

$$(2) \quad P = \frac{E \cdot d^2}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

wobei d die Dicke, E den Elasticitätscoefficienten des Glases bedeutet. Unter Benutzung dieser Gleichung geht die Bewegungsgleichung der Platte über in die Form:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{E \cdot d^2}{12 \cdot \mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

Wenn der Stab einen einfachen Ton von der Schwingungszahl n giebt, so lässt sich seine Bewegung darstellen durch die Gleichung:

$$(4) \quad y = u \cdot \sin 2 \pi n t,$$

worin die Amplitude u eine Function von x ist und der Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{(2 \pi n)^2 \cdot 12 \cdot \mu}{E \cdot d^2} \cdot u$$

zu genügen hat. Um die Lösung in einfacherer Form schreiben zu können, setze ich mit Kirchhoff²⁾ den Factor:

$$(6) \quad \frac{(2 \pi n)^2 \cdot 12 \cdot \mu}{E \cdot d^2} = \left(\frac{p}{l} \right)^4.$$

Dann lautet das allgemeine Integral der Gleichung (5):

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} u = & A \cos \frac{p x}{l} + B \cdot \sin \frac{p x}{l} \\ & + C \frac{e^{\frac{p x}{l}} + e^{-\frac{p x}{l}}}{2} + D \frac{e^{\frac{p x}{l}} - e^{-\frac{p x}{l}}}{2}. \end{aligned} \right.$$

1) J. Violle, Lehrbuch der Physik, deutsche Ausgabe 2. (1) p. 199.

2) G. Kirchhoff, Mechanik, 4. Aufl. p. 440. 1897.

Die Grenzbedingungen, dass beide Enden der Platte $x=0$ und $x=l$ frei schwingende Enden sein sollen, ergeben folgende Gleichungen:

$$C = A, \quad D = B,$$

$$A \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p \right) + B \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p \right) = 0,$$

$$A \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p \right) + B \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p \right) = 0.$$

Daraus folgt für p die Gleichung:

$$(8) \quad \cos p \cdot \frac{e^p + e^{-p}}{2} = 1$$

oder

$$\frac{e^p - e^{-p}}{2} = \mp \operatorname{tg} p,$$

wobei das obere oder das untere Zeichen abwechselnd für die aufeinander folgenden Wurzeln p_1, p_2, p_3, p_4 etc. der Gleichung zu nehmen ist. Diese Wurzeln haben die Werte

$$p_1 = 3,011 \frac{\pi}{2}, \quad p_2 = 5,000 \frac{\pi}{2}, \quad p_3 = 7,000 \frac{\pi}{2}, \quad p_4 = 9,000 \frac{\pi}{2}$$

und entsprechen Schwingungen der Platte mit 2, 3, 4, 5 Knoten. Uns interessiert im vorliegenden Falle ausschliesslich die Wurzel

$$p_3 = 7 \frac{\pi}{2}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen für p lässt sich das Verhältnis A/B auf eine einfache Form bringen. Denn es ist:

$$(9) \quad \frac{A}{B} = - \frac{\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p}{\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p},$$

$$= - \frac{\frac{1}{\cos p} - \cos p}{\mp \operatorname{tg} p + \sin p},$$

$$= - \frac{\sin p}{\mp 1 + \cos p};$$

$$\frac{A}{B} = \begin{cases} + \operatorname{ctg} \frac{p}{2} & \text{für } p_1, p_3, \dots \\ - \operatorname{tg} \frac{p}{2} & \text{für } p_2, p_4, \dots \end{cases}$$

Daraus folgt, unter Berücksichtigung der oben angegebenen Werte der Wurzeln p_1, p_2 etc., dass für alle Töne des Stabes sehr angenähert die Bedingung erfüllt ist:

$$B = -A.$$

Dann hat die Amplitude den angenäherten Wert:

$$(10) \quad u = A \left\{ \cos \frac{px}{l} - \sin \frac{px}{l} + e^{-\frac{px}{l}} \right\}$$

und demgemäss haben die Verrückungen selbst und ihre Ableitungen die Näherungswerte:

$$(11) \quad y = A \left\{ \cos \frac{px}{l} - \sin \frac{px}{l} + e^{-\frac{px}{l}} \right\} \sin 2\pi n t,$$

$$(12) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -A \frac{p}{l} \left\{ \cos \frac{px}{l} + \sin \frac{px}{l} + e^{-\frac{px}{l}} \right\} \sin 2\pi n t,$$

$$(13) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A \frac{p^2}{l^2} \left\{ \cos \frac{px}{l} - \sin \frac{px}{l} - e^{-\frac{px}{l}} \right\} \sin 2\pi n t,$$

$$(14) \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = A \frac{p^3}{l^3} \left\{ \cos \frac{px}{l} + \sin \frac{px}{l} - e^{-\frac{px}{l}} \right\} \sin 2\pi n t.$$

Für die nachfolgenden Anwendungen interessiren uns ausschliesslich die Vorgänge im mittleren Schwingungsbauch und im nächstgelegenen Schwingungsknoten für den Fall des dritten Tones, d. h. für $p = 7\pi/2$.

a) Für die Mitte der Platte ist $x = l/2$, folglich ganz allgemein für alle Werte von p :

$$u = A \left[\cos \frac{p}{2} + \frac{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}}{2} \right] + B \left[\sin \frac{p}{2} + \frac{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}}{2} \right].$$

Aus Gleichung (8) lassen sich leicht die Beziehungen herleiten:

$$e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}} = \pm \frac{2 \cos \frac{p}{2}}{\sqrt{\cos p}} \begin{cases} + \text{ für } p_3, p_4, p_7, p_8 \dots \\ - \text{ für } p_1, p_2, p_5, p_6 \dots \end{cases}$$

$$e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}} = \pm \frac{2 \sin \frac{p}{2}}{\sqrt{\cos p}} \begin{cases} + \text{ für } p_1, p_4, p_5, p_8 \dots \\ - \text{ für } p_2, p_3, p_6, p_7 \dots \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke ein, und berücksichtigt die Gleichung (9), so erhält man

$$\text{für } p_2, p_4, p_6, p_8 \dots \quad u = 0,$$

d. h. in der Mitte einen Knoten,

für $p_1, p_3, p_5, p_7 \dots$

$$u = \frac{A}{\cos \frac{p}{2}} [1 \mp \sqrt{\cos p}] \quad \left\{ \begin{array}{l} - \text{ für } p_1, p_5 \dots \\ + \text{ für } p_3, p_7 \dots \end{array} \right.$$

Für den dritten Ton der Platte wäre also der genaue Wert von u für die Mitte:

$$(15) \quad u_0 = \frac{A}{\cos \frac{p_3}{2}} [1 + \sqrt{\cos p_3}].$$

Da die Wurzeln der Gleichung (8) sehr nahe gleich den ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ sind, so ist $\cos p$ sehr nahe $= 0$, $\cos p/2$ sehr nahe $= \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$. Bezeichnet man die Amplitude für den Mittelpunkt der Platte mit a , so ist die Bewegung des mittleren Querschnittes gegeben durch:

$$(16) \quad y = a \cdot \sin 2\pi n t$$

und a in erster Annäherung bestimmt durch die Gleichung:

$$(17) \quad a = A \cdot \sqrt{2}.$$

Für die im Schwingungsbauche auftretende Doppelbrechung ist die Krümmung der Platte maassgebend. Der reciproke Wert des Krümmungsradius $1/\rho$ ist gleich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} \sin 2\pi n t.$$

Berechnet man $d^2 u/dx^2$ in derselben Weise wie oben u aus dem vollständigen Ausdrucke für u , setzt $x = l/2$ und berücksichtigt dieselben Beziehungen, wie bei der Berechnung von u , so erhält man für $p = p_3$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= - \frac{A}{\cos \frac{p_3}{2}} \frac{p_3^2}{l^2} (1 - \sqrt{\cos p_3}), \\ &= - u_0 \frac{p_3^2}{l^2} \frac{1 - \sqrt{\cos p_3}}{1 + \sqrt{\cos p_3}}, \\ &= - u_0 \frac{p_3^2}{l^2} (1 - 2\sqrt{\cos p_3}), \end{aligned}$$

wenn man die höheren Potenzen von $\sqrt{\cos p}$ vernachlässigt. Lässt man das ganze Correctionsglied fort, wie bei den nachfolgenden Anwendungen erlaubt ist, so hat man die einfache Beziehung:

$$(18) \quad \frac{1}{q} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -a \left(\frac{7\pi}{2l} \right)^2 \sin 2\pi n t.$$

Man erhält die Formeln (16) und (18) auch unmittelbar aus den Formeln (11) und (13), wenn man in diesen

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad p = 7 \frac{\pi}{2}$$

setzt, und den letzten Summanden $e^{-p/2}$ als kleine Grösse vernachlässigt.

b) Die Lage der Schwingungsknoten ist bestimmt durch die Bedingung $u = 0$. Von Interesse für das Folgende ist die Grösse der tangentialen Kraft im Knoten, die durch Gleichung (2) als Function von $\partial^3 y / \partial x^3$ definiert war. Die vollständige Durchrechnung des Ausdruckes $d^3 u / dx^3$ führt in diesem Falle, wegen der complicirteren Bedingung für den Wert von x , auf keine in dem Grössenverhältnis ihrer Glieder leicht zu überblickende Endformel. Wir begnügen uns daher von vornherein mit dem den Formeln (11) bis (14) zu Grunde liegenden Grade der Annäherung. Die Bedingung $y = 0$ ergibt aus (11) die Gleichung:

$$e^{-\frac{px}{l}} = \sin \frac{px}{l} - \cos \frac{px}{l},$$

und dies in Gleichung (14) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2A \frac{p^3}{l^3} \cos \frac{px}{l} \cdot \sin 2\pi n t.$$

Setzt man für p den Wert $7\pi/2$ ein, so ist für die beiden mittleren Knoten nach den Rechnungen von Strehlke und Seebeck

$$\frac{px}{l} = 1,2453 \pi \quad \text{bez.} \quad = 2,2547 \pi,$$

$\cos px/l$ also sehr nahe gleich $\mp \sqrt{\frac{1}{2}}$. Daraus folgt:

$$(19) \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = a \left(\frac{7\pi}{2l} \right)^3 \sin 2\pi n t.$$

Nach Feststellung dieser Grössenbeziehungen gehe ich dazu über, die durch die Schwingungen der Platte hervorgerufene Doppelbrechung an der Hand der photographischen Aufnahmen zu besprechen.

3. Die Erscheinungen im Schwingungsbauch.

a) *Allgemeiner Charakter der Erscheinung.* Die im Schwingungsbauch auftretende Doppelbrechung ist von derselben Art, wie sie durch eine statische Durchbiegung der Platte hervorgerufen werden kann. Von der unverändert bleibenden Mitte der Platte aus gerechnet wird das Glas auf der concaven Seite der gebogenen Platte zusammengedrückt, auf der convexen gedehnt. Zug- und Druckrichtung fallen in die Längserstreckung der Platte. Die Hauptaxen der entstehenden Doppelbrechung liegen daher parallel und senkrecht zur Plattenoberfläche, und die Nicol'schen Prismen müssen mit ihren Polarisations Ebenen unter 45° zur Längsrichtung der Platte eingestellt werden, um die Interferenzen in ihrer grössten Deutlichkeit hervortreten zu lassen.

Die Stärke der Doppelbrechung wächst von der neutralen Mittellinie an nach den Oberflächen der Platten zu, und ist dem Abstand von der Mittellinie proportional. Im parallelen Lichte beobachtet man daher eine von der dunklen Mittellinie aus nach beiden Seiten stetig wachsende Phasendifferenz. Die Linien gleicher Phasendifferenz sind, wenigstens in der Nähe des Schwingungsbauches, Linien, die der neutralen Mittellinie parallel laufen. Ihr Abstand von der Mittellinie wird um so kleiner, je stärker die Platte gekrümmt wird. Schwingt der mittlere Querschnitt der Platte nach dem Gesetz der Gleichung (16), so ist die Doppelbrechung in ihm gleich Null in den Augenblicken, in denen die Platte durch ihre Ruhelage geht; mit wachsender Elongation nähern sich die Linien gleicher Phasendifferenz der Mittellinie, erreichen ihren kleinsten Abstand im Augenblick der grössten Ausweichung, und entfernen sich dann wieder; sie schwingen also während einer halben Schwingung der Platte einmal hin und zurück.

Diese Schwingungen der isochromatischen Curven sind in der im Abschnitte 1 beschriebenen Weise zeitlich analysirt

und photographisch aufgenommen. Figg. 1—4 der Taf. I geben diese Aufnahmen für vier verschieden starke Schwingungszustände der Platte wieder. Die Amplitude a der Plattenschwingungen ist an den Aufnahmen unmittelbar aus den Sinuslinien zu entnehmen, welche die beiden Plattenränder gezeichnet haben. Dieselbe Sinuscurve beschreibt natürlich auch die neutrale Mittellinie, wie namentlich an den Aufnahmen mit grosser Amplitude ersichtlich ist. Die neutrale Mittellinie wird in gleichmässigen Abständen von senkrecht zu ihr verlaufenden dunklen Linien gekreuzt. Diese treffen die Plattenränder genau in der Mitte zwischen Berg und Thal der Sinuscurven; sie entsprechen denjenigen Augenblicken, in denen die Platte durch die Ruhelage ging und ohne Doppelbrechung war. Innerhalb jeder der so gebildeten Abteilungen sieht man die Punkte gleicher Phasendifferenz, indem sie an die neutrale Zone heran und wieder fortschwingen, eine eigentümliche Curve beschreiben. Die dunklen Curven in den Figuren entsprechen den Gangdifferenzen λ , 2λ , 3λ , die Mitten der hellen Zwischenräume zwischen ihnen den Gangdifferenzen $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$. Dabei ist unter λ die mittlere Wellenlänge des photographisch wirksamen Lichtes verstanden; sie ist in einer früheren Arbeit zu 0,000 428 mm ermittelt worden.¹⁾ Es soll nun zunächst das Gesetz dieser eigentümlichen, isochromatischen Curven entwickelt werden.

b) *Die Gleichung der isochromatischen Curven.* Wir können die Stärke der Doppelbrechung der Grösse der elastischen Deformation proportional setzen. Es sei s die Länge eines Elementes der Platte in Richtung ihrer Längserstreckung; durch Verbiegung der Platte geht s über in $s + \delta s$. Dann können wir die Phasendifferenz A ansetzen in der Form:

$$(20) \quad A = C \cdot \frac{\delta s}{s},$$

eine Gleichung, die auch dem Vorzeichen nach richtig sein soll, indem wir die bei einer Verlängerung auftretende Doppelbrechung als positiv, die bei einer Verkürzung auftretende als negativ bezeichnen. Bedeutet η den Abstand des be-

1) W. König, Wied. Ann. 69. p. 1—11. 1899.

treffenden Elementes von der neutralen Mittellinie, in der das Element bei der Verbiegung seine Länge s unverändert beibehalten würde, und bezeichnet ρ den Krümmungsradius der Mittellinie, so besteht die Beziehung:

$$\frac{s + \delta s}{s} = \frac{\rho - \eta}{\rho}$$

oder

$$(21) \quad \frac{\delta s}{s} = - \frac{\eta}{\rho},$$

wobei der Krümmungsradius negativ zu rechnen ist, wenn er auf Seite der negativen y -Werte liegt. Für die Phasendifferenz folgt dann:

$$\Delta = - C \frac{\eta}{\rho},$$

und unter Benutzung von (18)

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta = C a \cdot \left(\frac{7\pi}{2l}\right)^2 \cdot \eta \cdot \sin 2\pi n t, \\ \quad = D \cdot \eta \cdot \sin 2\pi n t, \end{cases}$$

wenn man

$$D = C \cdot a \cdot \left(\frac{7\pi}{2l}\right)^2$$

setzt. Der Abstand der Punkte gleicher Phasendifferenz von der Mittellinie variirt also nach dem Gesetze:

$$\eta = \frac{\Delta}{D \cdot \sin 2\pi n t}.$$

Für die aufgenommenen Curven sind die Abscissen der Zeit proportional; unter passender Wahl des Maassstabes kann man setzen

$$x = 2\pi n t.$$

Die Ordinaten der Curven aber sind nicht einfach $= \eta$; es ist vielmehr zu berücksichtigen, dass die Mittellinie selber eine auf- und abschwingende Bewegung nach Gleichung (16) ausführt. Daher sind die Ordinaten der Curve

$$y = \eta + a \cdot \sin 2\pi n t,$$

und die vollständige Gleichung der isochromatischen Curven ist:

$$(23) \quad y = \frac{\Delta}{D \cdot \sin x} + a \cdot \sin x.$$

Dabei ist a die Amplitude der Plattenschwingung, D eine von a abhängige Grösse; beides also sind für eine gegebene Plattenschwingung Constante. Δ ist für jede Curve eine bestimmte Constante. Indem man diesem Parameter alle möglichen positiven oder negativen Werte erteilt, erhält man die ganze Schaar der isochromatischen Curven. Für die Mitte der dunklen Curven auf den Aufnahmen hat Δ ganzzahlige Werte, für die Mitte der hellen ist Δ gleich ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}$; $\Delta = 0$ ergibt die neutrale Mittellinie und die zu ihr senkrechten, dem Fehlen aller Doppelbrechung entsprechenden Geraden $x = 0, \pi, 2\pi$ etc.

Diese Geraden sind zugleich die Asymptoten für sämtliche isochromatischen Curven; denn für $x = 0, \pi, 2\pi$ etc. wird $y = \infty$ für alle endlichen Werte von Δ . Sie teilen das ganze Gebiet in lauter gleiche Abteilungen. Für ein bestimmtes Δ wechselt das Vorzeichen von y von einer Abteilung zur nächsten. Die isochromatischen Curven bestehen daher aus lauter getrennten Aesten, die innerhalb jeder Abteilung asymptotisch zu den beiden Grenzlinien verlaufen und abwechselnd über und unter der Nulllinie liegen, mit symmetrischem Verlauf zu dieser.

Um ein besseres Bild von der Beschaffenheit dieser Curven zu geben, habe ich von einer der Aufnahmen nach dem Originalnegative ein etwa 20 mal vergrössertes Diapositiv hergestellt, das in Taf. II wiedergegeben ist. Leider ist die Reproduction nicht in der wünschenswerten Deutlichkeit ausgefallen, wie auch die Lichtdruckbilder der Taf. I die grosse Schärfe der Originalaufnahmen nur unvollkommen wiedergeben. Für diese vergrösserten Curven wurden die Constanten der Formel durch folgende Messungen festgelegt.

1. Die Breite jeder Abteilung von $x = 0$ bis $x = \pi$ beträgt 25,5 mm.

2. Die Ordinatendifferenz zwischen Berg und Thal der vom Rande der Glasplatte beschriebenen Sinuscurve, also die doppelte Amplitude der Schwingung, $2a$, beträgt 6,5 mm.

3. Der kleinste Abstand der Curven $\Delta = +1$ und $\Delta = -1$ voneinander, d. h. die Grösse $2/D$, beträgt 37 mm.

Folglich ist die Gleichung der Curven:

$$y = \frac{18,5 \cdot \Delta}{\sin 7,059 x} + 3,25 \sin 7,059 x,$$

wobei x und y in mm zu messen sind und das Argument des \sin in Graden ausgedrückt ist. Nach dieser Gleichung sind die Curven für $\Delta = 0, \pm \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}$ und 3 berechnet und auf Millimeterpapier eingezeichnet worden. Diese Zeichnung ist dann in richtiger Lage auf das Diapositiv gelegt und mit diesem zugleich abcopirt worden. Man sieht auf der Taf. II die hellen feinen Linien der Zeichnung auf den helleren oder dunkleren Partien der photographischen Aufnahme verlaufen und überzeugt sich leicht, dass Form und Lage der isochromatischen Curven durch die obige Gleichung im wesentlichen richtig dargestellt wird. Wenn in einigen Fällen die berechneten Curven nicht genau in der Mitte der hellen und dunklen Curven der Aufnahme verlaufen, so kann diese Abweichung durch die im ersten Abschnitt besprochene Doppelbrechung, welche die Platte schon im natürlichen Zustande aufweist, bedingt sein. Ausserdem ist die richtige Uebereinanderlagerung bei der Lichtdruck-Wiedergabe nicht vollkommen gelungen.

c) *Das Vorzeichen der Doppelbrechung.* Schwingt die Platte nach oben im Sinne der Bilder, so ist die Doppelbrechung in der oberen Hälfte positiv, in der unteren negativ, umgekehrt wenn sie nach unten schwingt. Benachbarte Abteilungen haben daher, ebenso wie die beiden Hälften einer jeden Abteilung, entgegengesetztes Vorzeichen der Doppelbrechung. Man kann dieses Verhalten dadurch sichtbar machen, dass man eine Viertelundulations-Glimmerplatte zwischen Glasplatte und Analysator einschaltet in solcher Lage, dass ihre Hauptaxen mit den Hauptaxen der Doppelbrechung in der Glasplatte zusammenfallen. Die Fig. 5 und 6 auf Taf. I sind in dieser Weise gewonnen, und zwar hat bei Aufnahme 5 die Glimmerplatte so gelegen, dass sich ihre Wirkung auf die Phasendifferenz zu der der negativen Doppelbrechung addirte, von der der positiven subtrahirte; bei Aufnahme 6 war die Glimmerplatte um 90° gedreht und ihre Wirkung subtrahirte sich für die negative und addirte sich für die positive Doppelbrechung. Die Gleichung der isochromatischen Curven für diese beiden Fälle lässt sich aus Gleichung (23) dadurch herleiten, dass man für Δ einführt $\Delta \pm \frac{1}{4}$, wobei das Pluszeichen für Aufnahme 5, das Minuszeichen für Aufnahme 6 gelten würde. Die beiden Aufnahmen sind gewissermaassen zu einander complementär,

indem die Gangdifferenzen in ihnen für gleiche Punkte sich um eine halbe Wellenlänge unterscheiden; hell und dunkel ist daher in Aufnahme 5 gegen Aufnahme 6 vertauscht. Für die neutrale Mittellinie und die zu ihr senkrechten Linien $x = 0, \pi, 2\pi$ etc. würde in beiden Aufnahmen die Gangdifferenz $\frac{1}{4}$ betragen, also eine mittlere Helligkeit für diese Stelle bedingen. Gleichwohl erscheinen diese Stellen in Aufnahme 5 ziemlich dunkel — die Curven $A = 0$ sind noch durch dunklere Stellen miteinander verbunden — während sie in Aufnahme 6 fast von gleicher Helligkeit wie die hellen Maxima erscheinen. Diese Abweichung hat offenbar ihren Grund in der ursprünglichen Doppelbrechung der Platte, die, wie ich im 1. Abschnitt erwähnt habe, in der Mitte der Platte positiv ist. Die Gangdifferenz ist daher in der Nähe der neutralen Mittellinie bei Aufnahme 5 nicht $\lambda/4$, sondern etwas kleiner, und bei Aufnahme 6 nicht $\lambda/4$, sondern etwas grösser.

d) *Der Betrag der spezifischen Doppelbrechung.* Aus den Aufnahmen lässt sich endlich das Verhältnis der Phasendifferenz zur elastischen Deformation, d. h. die Constante C der Formel (20), ermitteln. Allein die Phasendifferenz ist nur ein relatives Maass der Doppelbrechung. Sie ist ausserdem abhängig von dem Verhältnis der Dicke der durchstrahlten Schicht zur Wellenlänge. Um auf Zahlen zu kommen, die für das benutzte Glas unabhängig von seinen Dimensionen gelten, führe ich als Maass der Doppelbrechung die durch die Verbiegung erzeugte Differenz der Brechungsexponenten der beiden Strahlen im Glase ein:

$$v = n_1 - n_2.$$

Dann ist

$$A = \frac{v b}{\lambda} = C \frac{\delta s}{s}$$

und folglich

$$(24) \quad v = \frac{C \lambda}{b} \cdot \frac{\delta s}{s} = G \cdot \frac{\delta s}{s}.$$

Die hier neu eingeführte Grösse G ist das Verhältnis der Doppelbrechung zur Deformation oder das „Maass der spezifischen Doppelbrechung“ für den hier vorliegenden Fall einer Dehnung oder Zusammendrückung in einer Richtung. Sie ist eine charakteristische Constante des Glases, vorausgesetzt, dass

strenge Proportionalität zwischen der Doppelbrechung und der Deformation besteht. Ich berechne G aus der maximalen Doppelbrechung, die im Schwingungsbauche bei der grössten Ausweichung der Platte stattfindet. Für diese ist nach (22):

$$\Delta = G \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot a \cdot \left(\frac{7\pi}{2l} \right)^2 \cdot \eta.$$

also:

$$(25) \quad G = \frac{4 \lambda l^2}{49 \cdot \pi^2 b} \cdot \frac{\Delta}{a \eta}.$$

Dér die Veränderlichen eines jeden Versuches enthaltende Factor $\Delta/a\eta$ ist aus einer Reihe verschiedener Aufnahmen in der Weise abgeleitet worden, dass an den Originalnegativen mit Hülfe eines Quincke'schen Kathetometermikroskopes mit Ocularmikrometer folgende Grössen gemessen wurden: 1. die Ordinatendifferenz von Berg und Thal der Sinuscurven des Plattenrandes, also die doppelte Amplitude $2a$ und 2. der kürzeste Abstand 2η zweier Curven derselben Abteilung von entgegengesetzt gleicher Phasendifferenz, und zwar für $\Delta = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Die nachfolgende Tabelle enthält die gemessenen Werte von $2a$ und 2η in Teilen der Ocularscala und die daraus berechneten Werte von $\Delta/a\eta$. Sie hat den Zweck zu zeigen, bis zu welchem Grade sich $\Delta/a\eta$ als Constante aus diesen Messungen ergibt. Wenn man von der letzten

Tabelle 1.

Ausmessung der Interferenzen im Schwingungsbauch.

| $2a$ | 2η | | | $\Delta/a\eta$ | | |
|------|--------------|--------------|--------------|----------------|--------------|--------------|
| | $\Delta = 1$ | $\Delta = 2$ | $\Delta = 3$ | $\Delta = 1$ | $\Delta = 2$ | $\Delta = 3$ |
| 3,5 | 17,5 | 35,5 | 53,0 | 0,0653 | 0,0644 | 0,0647 |
| 3,5 | 16,0 | 32,5 | — | 714 | 703 | — |
| 3,4 | 17,5 | 35,0 | — | 672 | 672 | — |
| 3,2 | 17,5 | 35,5 | — | 714 | 704 | — |
| 3,1 | 19,0 | 39,0 | — | 679 | 662 | — |
| 3,0 | 21,0 | 42,5 | — | 635 | 628 | — |
| 3,0 | 20,0 | 40,5 | — | 667 | 658 | — |
| 2,25 | 27,5 | 56,0 | — | 647 | 635 | — |
| 2,2 | 27,5 | 55,0 | — | 661 | 661 | — |
| 2,0 | 33,0 | — | — | 606 | — | — |

Zahl absieht, die offenbar zu klein ausgefallen ist, gruppieren sich die Zahlen unregelmässig um den Mittelwert 0,0663. Dass die Schwankungen beträchtlich sind, rührt wesentlich von der Unsicherheit der Messung der kleinen Grösse $2a$ her; der Plattenrand erscheint in der Vergrösserung des Mikroskopes nicht hinreichend scharf, um eine ganz exacte Messung der Schwingungsamplitude zu gestatten. Leider ist für diese Zahlen eine Umrechnung auf Millimetermaass nicht möglich, weil ich es seinerzeit verabsäumt hatte, das Grössenverhältnis zwischen dem Bild auf der Platte und dem Object durch besondere Messungen für diese Aufnahmen festzustellen. Derartige Messungen liegen aber für andere Aufnahmen vor, die unter etwas anderen Verhältnissen angestellt waren, sodass der für sie gefundene Reductionsfactor auf die obigen Aufnahmen nicht übertragen werden konnte. Ich komme auf diese Aufnahmen, die im besonderen zum Zweck quantitativer Vergleichen der Vorgänge im Bauch und im Knoten gemacht wurden, und von denen einige in Fig. 10 und 11 der Taf. I wiedergegeben sind, weiter unten ausführlicher zu sprechen. Hier will ich nur die Zahlen angeben, die sich für die Grössen a und η aus den Interferenzcurven des Schwingungsbauches ergeben haben. Ich drücke sie in diesem Falle gleich in mm aus. Aufnahme 10 ergibt mit ihrer sehr kleinen Amplitude sehr unsichere Werte. Aus Aufnahme 11 ergibt sich im Mittel aus drei Messungen:

$$a = 0,13 \text{ mm}, \eta = 1,14 \text{ mm} \text{ für } \Delta = 1, \text{ also } \frac{\Delta}{a\eta} = 6,75.$$

Zwei andere Aufnahmen, die auf der Tafel nicht wiedergegeben sind, ergeben:

$$a = 0,18 \text{ mm}, \eta = 0,95 \text{ mm} \text{ für } \Delta = 1, \text{ also } \frac{\Delta}{a\eta} = 5,85$$

$$a = 0,23 \text{ mm}, \eta = 0,62 \text{ mm} \text{ für } \Delta = 1, \text{ also } \frac{\Delta}{a\eta} = 7,01.$$

Im Mittel folgt daraus für $\Delta/a\eta$: 6,53. Der constante Factor in Formel (25) ergibt sich mit $\lambda = 0,000428$, $l = 700$, $b = 70$ mm zu 0,0248, und danach

$$G = 0,162.$$

Ich vergleiche schliesslich dieses Ergebnis mit dem Resultat von Messungen, die an derselben Platte bei statischer Durchbiegung angestellt wurden.

e) *Bestimmung von G auf statischem Wege.* Die Platte wurde in der Weise verbogen, dass sie in der Nähe ihrer Enden unterstützt, in der Mitte belastet wurde. Um dabei die Grösse der Durchbiegung unabhängig von einem Nachgeben der Auflager bestimmen zu können, wurde der Kunstgriff benutzt, den schon F. Neumann bei seinen Messungen über die Doppelbrechung in gebogenen Glasplatten benutzt hat.¹⁾ Es wurde eine zweite Glasplatte von genau gleichen Dimensionen beschafft; beide wurden, in der Nähe ihrer Enden durch Messingstäbe getrennt, übereinander gelegt und nun in der Mitte zusammengepresst, indem bei wagerechter Lage die untere Platte in der Mitte unterstützt, die obere in der Mitte mit Hülfe eines übergelegten Stabes mit angehängten Gewichten belastet wurde. Bei dieser Anordnung biegen sich beide Platten durch die angehängten Gewichte in gleichem Maasse durch. Die mit dem Kathetometermikroskop gemessene Verminderung ihres Abstandes war gleich der doppelten Durchbiegung jeder einzelnen Platte. Bei einem Abstand l' der Auflager von 568,5 mm ergaben sich im Mittel aus 4 verschiedenen Messungsreihen für die Abstandsänderung der beiden Platten folgende Werte:

| | | |
|-------|------|----------------|
| für 1 | 2 | 3 kg Belastung |
| 0,47 | 0,99 | 1,47 mm |

also im Mittel für je ein Kilo Belastung 0,488 mm. Die Durchbiegung jeder einzelnen Platte oder die Senkung α ihrer Mitte gegen die Lage im unbelasteten Zustande würde demnach für jedes Kilo Belastung 0,244 mm betragen.

Um die Interferenzen für genau die gleichen Wellenlängen zu erhalten, wie oben bei den Schwingungsversuchen, wurde die Doppelbrechung auch bei diesen statischen Versuchen nicht direct beobachtet, sondern photographisch aufgenommen, und zwar sowohl bei gekreuzten, wie bei parallelen Nicols für die Belastungen 0, 1, 2 und 3 kg. An den Platten wurden

1) F. Neumann, Abhandlungen d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1841. II. Teil. p. 45.

wieder mit einem Kathetometermikroskop folgende Grössen ausgemessen: 1. die Abstände der isochromatischen Linien von der Mittellinie für $\Delta = \pm 1, 2, 3$ und 2. die Abstände der Platten voneinander. Ich gebe in der Tab. 2 die aus diesen Messungen gewonnenen Mittelwerte, und zwar bedeutet η (η_0 bis η_3 für die Belastungen 0—3 kg) den Abstand des Interferenzstreifens ($\Delta=1$) von der neutralen Mittellinie, und a (a_1, a_2, a_3) die durch die Belastung hervorgebrachte Durchbiegung der Platten, beide Grössen in Scalenteilen des Ocularmikrometers ausgedrückt. Für die Berechnung ist aber zu berücksichtigen, dass die Grössen a_1 bis a_3 nicht die vollständigen Durchbiegungen der Platten angeben, da die Platten schon bei der Belastung Null infolge der gewählten Versuchsanordnung eine gewisse Durchbiegung erfahren. Bezeichnet man diese mit α_0 , so sind die wahren Durchbiegungen der Platten bei den Belastungen 1, 2 und 3 kg

$$\alpha_1 = \alpha_0 + a_1, \quad \alpha_2 = \alpha_0 + a_2, \quad \alpha_3 = \alpha_0 + a_3.$$

Die Platten zeigen daher auch schon bei der Belastung Null eine gewisse Doppelbrechung und geben einen messbaren Wert η_0 für η . Wenn man berücksichtigt, dass $\eta \times \alpha$ constant sein muss, so lässt sich α_0 aus den Beobachtungen berechnen, indem man die Gleichungen ansetzt:

$$\eta_0 \alpha_0 = \eta_1 (\alpha_0 + a_1) = \eta_2 (\alpha_0 + a_2) = \eta_3 (\alpha_0 + a_3).$$

Den aus diesen Beziehungen im Mittel sich ergebenden Wert von α_0 und die daraus berechneten Beträge der wahren Durchbiegungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ enthält die vierte Columnne der Tabelle; die fünfte giebt die Producte $\eta \times \alpha$, um zu zeigen, wie weit dieselben constant sind.

Tabelle 2.

Ausmessung der Interferenzen bei statischer Biegung.

| Belastung | η | a | α | $\alpha \cdot \eta$ |
|-----------|----------|-------|----------|---------------------|
| 0 kg | 7,20 sc. | — sc. | 1,71 sc. | 12,31 |
| 1 | 4,76 | 0,88 | 2,59 | 12,33 |
| 2 | 3,54 | 1,75 | 3,46 | 12,25 |
| 3 | 2,90 | 2,54 | 4,25 | 12,32 |

Um auf Millimeter umzurechnen, berücksichtigt man, dass die mittlere Durchbiegung für je 1 kg Belastung 0,862 Sct. beträgt. Für diese Grösse hatte die directe Beobachtung 0,244 mm bei einem Werte von $l = 568,5$ mm ergeben. Bei den Versuchen über die Doppelbrechung war l' etwas kleiner, 566,5 mm, demgemäss würden 0,862 Sct. gleich 0,242 mm sein, oder 1 Sct. gleich 0,280 mm. Multiplicirt man den Mittelwert von $\alpha \times \eta$ (12,30) mit dem Quadrat dieses Reductionsfactors, so erhält man in Millimetermaass $\alpha \times \eta = 0,969$.

Um daraus G zu berechnen, muss der Krümmungsradius der Platte aus der Gleichung ermittelt werden, welche die Gestalt des durchgebogenen Stabes bestimmt. Liegt der Stab auf den beiden Lagern im Abstände l' auf und wird in der Mitte mit dem Gewicht P belastet, so ist seine Gestalt durch die Gleichung gegeben:

$$y = - \frac{P}{8 \cdot E \cdot b \cdot d^3} \{ \pm 8x^3 - l'^3 - 3l'(4x^2 - l'^2) \},$$

wobei der Nullpunkt der Abscissen in der Mitte des Stabes liegt und das obere Zeichen im ersten Klammergliede für die positiven, das untere für die negativen Abscissen gültig ist. Für die Mitte ergibt sich daraus die Senkung:

$$\alpha = - \frac{Pl'^3}{4Eb d^3}$$

und der Krümmungsradius

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3Pl'}{Eb d^3} = \frac{12\alpha}{l'^2}.$$

Daraus folgt

$$(26) \quad G = \frac{\lambda \cdot l'^2}{12 \cdot b} \cdot \frac{A}{\alpha \cdot \eta},$$

worin λ wieder = 0,000 428, $l' = 566,5$, $b = 70$ mm zu setzen ist. Dann giebt der obige Wert von $\alpha \cdot \eta$

$$G = 0,169.$$

Eine andere Beobachtungsreihe, bei der die Interferenzen sowohl in der oberen, als in der unteren Platte ausgemessen wurden, ergab für die obere Platte $G = 0,174$, für die untere $G = 0,170$. Die sehr nahe Uebereinstimmung dieser drei Werte dürfte wohl auf einem Zufall beruhen; denn die Einzelwerte der Messungen zeigen relativ grosse Schwankungen, besonders

in den kleinen Werten der Durchbiegung. Der kleinen Abweichung, welche die aus den Schwingungsbeobachtungen abgeleitete Zahl für G , 0,162, von den hier gefundenen Werten — im Mittel 0,170 — zeigt, dürfte daher eine bestimmte Bedeutung nicht beizulegen sein. Vielmehr glaube ich aus der nahen Uebereinstimmung der Zahlen den Schluss ziehen zu dürfen, dass die bei den Schwingungen im Bauche auftretende Doppelbrechung sich auch quantitativ aus der jeweiligen Verbiegung der Platte vollständig erklären lässt.

Der gefundene Wert von G steht übrigens in guter Uebereinstimmung mit den Werten, die von anderen Beobachtern für Glas gefunden worden sind. Die Doppelbrechung des Glases ist seit den ersten Beobachtungen, die Brewster¹⁾ darüber angestellt hat, mehrfach gemessen worden, so von F. Neumann in der schon genannten Arbeit, von Wertheim²⁾, Mach³⁾ und Pockels.⁴⁾ Die von mir im Obigen eingeführte Grösse G entspricht dabei folgenden Grössen in der Bezeichnungsweise der verschiedenen Autoren:

bei F. Neumann und Mach $G = \frac{5}{4} \frac{p-q}{G^2}$,

bei Wertheim $G = \frac{E}{G}$,

bei Pockels $G = n(1 + \nu) \frac{p-q}{\omega^0}$.

Berechnet man hiernach die Grösse G aus den Angaben der verschiedenen Autoren, so findet man folgende Werte:

| | |
|--|---------------|
| bei Brewster (nach der Berechnung von F. Neumann ⁵⁾) | $G = 0,168$ |
| bei F. Neumann | $G = 0,157$ |
| bei Wertheim für gewöhnliches Kronglas | $G = 0,179$ |
| (bei anderen Glassorten liegen die Werte zwischen 0,1633 und 0,2182) | |
| bei Mach | $G = 0,168$ |
| bei Pockels | $G = 0,174$. |

1) D. Brewster, Phil. Trans. Jahrgang 1816 (1. Teil) p. 156—178; Edinb. Trans. 8. p. 369. 1818.
 2) W. Wertheim, Ann. chim. phys. (3) 40. p. 156—221. 1854.
 3) E. Mach, Optisch-akustische Versuche. p. 16. Prag 1873.
 4) F. Pockels, Wied. Ann. 37. p. 390—391. 1889.
 5) F. Neumann, l. c. p. 49.

Danach liegt also G für gewöhnliches Glas zwischen 0,16 und 0,18 und zwischen diese Grenzen fallen auch die von mir gefundenen Werte.

4. Die Erscheinungen im Schwingungsknoten.

a) *Allgemeiner Charakter der Erscheinung.* Im freien Schwingungsknoten der Glasplatte tritt zwischen gekreuzten Nicols eine einfache Aufhellung ein, die sich ziemlich gleichmässig über die ganze Dicke der Platte zu erstrecken scheint. Sie ist am grössten, wenn die Schwingungsrichtungen der Nicols senkrecht und parallel zur Längserstreckung der Glasplatte liegen. Während also im Schwingungsbauche die Doppelbrechung von der neutralen Mitte aus nach den Rändern hin zunimmt und ihre Axen in die Längsrichtung der Platte und senkrecht zu ihr fallen, ist im Knoten die Doppelbrechung sehr nahe constant in der Dickenerstreckung der Platte und ihre Axen bilden mit der Längsrichtung der Platte Winkel von 45° . Die Grösse der Doppelbrechung ist gering; die Aufhellung geht auch bei den stärksten Schwingungen nicht über das Weiss der ersten Ordnung hinaus. Zerlegt man daher die Erscheinungen mit der Linsenscheibe, oder photographirt sie mit dem Fallpendel, wobei natürlich die Nicols auf die Lage der grössten Aufhellung eingestellt werden, so erhält man eine einfache Folge von hellen und dunklen Streifen (Fig. 7 der Taf. I). Die Abstände der Mitten der hellen oder der dunklen Streifen voneinander sind genau gleich der Breite der einzelnen Abteilungen der Bauchbilder; sie entsprechen also einer halben Schwingungsdauer der Platte, oder während einer ganzen Schwingung der Platte tritt zweimal Aufhellung und Wiederverdunkelung ein.

In zwei benachbarten Perioden dieser Erscheinung hat die Doppelbrechung entgegengesetzten Charakter. Man erkennt dies am besten, wenn man zwischen die Glasplatte und den Analysator noch einen Gypskeil einschiebt, der so geschnitten ist, dass seine Kante mit den Schwingungsrichtungen des Lichtes in der Gypsplatte Winkel von 45° bildet. Legt man einen solchen Gypskeil auf die Glasplatte im Knoten derart, dass die Interferenzstreifen des Keiles der Längsrichtung der Platte parallel laufen, so fallen die Axen der Doppelbrechung

im Gyps mit denen in der Glasplatte zusammen und es tritt je nach dem Vorzeichen der Doppelbrechung in der Glasplatte Addition oder Subtraction der Wirkung, also Verschiebung der Interferenzstreifen nach der einen oder der anderen Richtung ein. Bei der Aufnahme dieser Erscheinungen mit dem Fallpendel projectirt sich das Bild der Interferenzstreifen im Gypskeil zugleich mit dem Bilde der Glasplatte auf den Spalt s (Fig. 2) und zwar so, dass die Streifen senkrecht zum Spalt verlaufen. Macht man eine Aufnahme, ohne dass die Platte schwingt, so erhält man das Bild des ruhenden, unverschobenen Streifens (Fig. 8 auf Taf. I). Bei schwingender Platte aber verwandelt sich der geradlinige Streifen in eine Wellenlinie (Fig. 9 auf Taf. I), deren Periode der ganzen Periode der Plattenschwingung entspricht, indem der Streifen bei der einen Aufhellungsperiode nach oben, bei der nächsten nach unten verschoben wird.

Aufnahmen dieser Art geben zugleich ein Mittel an die Hand, um die Stärke der maximalen Doppelbrechung im Knoten zu messen. Die Amplitude der Wellencurve des Interferenzstreifens — die halbe Ordinatendifferenz von Berg und Thal der Curve — giebt die maximale Verschiebung des Streifens aus seiner Ruhelage. Misst man ausserdem auf den Aufnahmen den Abstand zweier benachbarter Streifen des Gypskeiles, deren Phasendifferenz eine ganze Schwingungsdauer beträgt, so bedeutet das Verhältnis beider Grössen die von der Glasplatte bewirkte maximale Phasendifferenz in Bruchteilen der Schwingungsdauer des Lichtes. Doch haben diese Messungen kein Interesse, wenn nicht zugleich die Amplitude der Plattenschwingung oder die gleichzeitige Stärke der Doppelbrechung im Schwingungsbauche festgestellt werden kann. Es war daher nötig, gleichzeitige Aufnahmen der Vorgänge im Bauch und im Knoten auszuführen. Die Anordnung dieser Versuche ist bereits auf p. 7 u. 8 beschrieben. Zwei Beispiele derartiger Aufnahmen enthält Taf. I unter Figg. 10 u. 11. Bevor ich jedoch auf die quantitative Vergleichung der beiden Arten von Doppelbrechung eingehe, empfiehlt es sich, die Beziehungen festzustellen, die in Bezug auf die Phasen und die Vorzeichen zwischen ihnen bestehen.

b) *Die Phase der Periode.* Die Doppelaufnahmen lassen ohne weiteres erkennen, dass die Maxima der Doppelbrechung

in den Knoten gleichzeitig mit denen in den Bäuchen eintreten. Die Doppelbrechung in den Knoten ist gleich Null in denjenigen Zeitpunkten, in denen auch die Doppelbrechung in den Bäuchen gleich Null ist, d. h. in denjenigen Zeitpunkten, in denen die Platte durch ihre Ruhelage hindurchgeht und ihre Deformation gleich Null ist. Die Doppelbrechung in den Knoten hat also nichts mit der Bewegung der Platte als solcher zu thun —, ein Gedanke, auf den vielleicht der Vergleich mit der gleichartigen Doppelbrechung in reibenden Flüssigkeiten führen könnte — sondern sie ist wie diejenige in den Bäuchen bedingt durch die in jedem Augenblicke vorhandene Deformation der Platte. Diese Deformation ist in den Bäuchen eine Biegung mit Dehnung und Zusammendrückung, wie sie oben genauer formulirt worden ist; in den Knoten ist die Deformation eine Scheerung. Die scheerende Kraft steht senkrecht auf der Längserstreckung der Platten und ist in erster Annäherung die gleiche für den ganzen Querschnitt. Bei einer solchen Deformation liegen die Axen der grössten Dehnung und der grössten Zusammendrückung unter 45° zur Richtung der scheerenden Kraft. Mit diesem Charakter der elastischen Deformation stimmt der Charakter der Doppelbrechung nach den obigen Darlegungen durchaus überein. Es erübrigt, diese Uebereinstimmung auch für das Vorzeichen der Doppelbrechung nachzuweisen.

c) *Das Vorzeichen der Doppelbrechung.* Ich habe die Doppelbrechung im Schwingungsbauche als positiv bezeichnet für die gedehnten, als negativ für die zusammengedrückten Teile des Glases. Die neutrale Mittellinie trennt das Gebiet der positiven von dem der negativen Doppelbrechung. Geht man vom Schwingungsbauche nach dem Knoten zu, so nimmt die Stärke der Doppelbrechung auf beiden Seiten der Mittellinie ab, wird im Knoten Null und wechselt bei weiterem Fortschreiten über den Knoten hinaus ihr Vorzeichen. Die Umgebung des Knotens wird also durch die Knotenlinie und die neutrale Mittellinie in vier Quadranten geteilt, von denen je zwei benachbarte entgegengesetztes Vorzeichen der durch Biegung der Platte entstehenden Doppelbrechung haben (vgl. Fig. 4). Für die scheerende Deformation im Knoten fällt dann, wie ohne weiteres ersichtlich ist, die Richtung der

grössten Dehnung in die positiven, die der grössten Zusammen-drückung in die negativen Quadranten. Mit diesen Richtungen fallen die Axen der Doppelbrechung zusammen, und zwar hat im Glase derjenige Strahl die grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, der in der Richtung der grössten Dehnung polarisirt ist, dessen Schwingungen also senkrecht zu dieser Richtung sich vollziehen. Die Polarisationsrichtung dieses Strahles will ich als die „positive Axe der Doppelbrechung“ bezeichnen. Im Schwingungsbauche fällt diese positive Axe im gedehnten Teile in die Längsrichtung der Platte, im zusammengedrückten Teile steht sie senkrecht dazu. Für den Schwingungsknoten ist der Charakter der Doppelbrechung dann immer durch die einfache Regel bestimmt, dass die positive Axe der Doppelbrechung die positiven Quadranten halbt.

Die Richtigkeit dieser Feststellung liesse sich an den Doppelaufnahmen prüfen; doch würde dieses Verfahren bei den complicirten räumlichen Beziehungen sehr unübersichtlich sein. Ich ziehe es vor, einige Erscheinungen zu beschreiben, die in der Nähe des Knotens auftreten, und deren Erklärung sich aus der obigen Feststellung über den Charakter der Doppelbrechung ohne Schwierigkeit gewinnen lässt. Man nimmt sie wahr, wenn man die schwingende Platte in der Knotengegend zwischen gekreuzten Nicols direct, ohne Spalt und Linsenscheibe, untersucht, sodass man nicht bloss die Knotenlinie selbst, sondern auch die benachbarten Teile der Platte zu überblicken vermag. Stehen die Nicols mit ihren Schwingungsebenen parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte, so tritt während der Schwingung nur eine gleichmässige Aufhellung ein, die im Knoten am stärksten ist und nach den Bäuchen zu allmählich abnimmt. Stehen die Nicolebenen unter 45° zur Längsrichtung der Platte, so bleiben Knoten- und Mittellinie dunkel, die vier Quadranten aber hellen sich auf, und die Stärke der Aufhellung wächst mit der Entfernung vom Knoten und von der Mittellinie. Dreht man die Nicols aus dieser 45° -Stellung heraus in eine mittlere Stellung, so treten beide Aufhellungen gleichzeitig ein; die dunkle Mittellinie aber teilt sich in zwei getrennte und nach entgegengesetzten Seiten gebogene Aeste, die, je nachdem das Nicolsystem nach rechts oder nach links herumgedreht ist, die in

Fig. 3a oder in Fig. 3b skizzierte Lage haben. Der Vorgang erklärt sich aus dem Zusammenwirken der beiden verschiedenen Arten von Doppelbrechung, die einerseits aus der Scheerungs-, andererseits aus der Biegungsdeformation der Platte hervorgehen. Ich will mir eine genauere Erörterung dieser Erscheinungen für eine spätere Gelegenheit vorbehalten und mich an dieser Stelle damit begnügen, das Resultat des Zusammen-

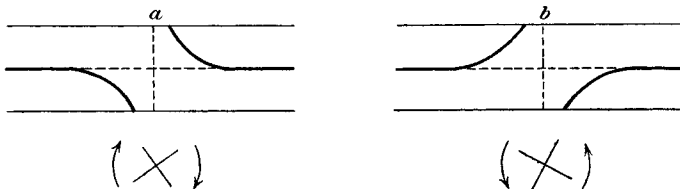


Fig. 3.

wirkens der beiden elastischen Deformationen durch eine Skizze zu erläutern, um an dieser die Entstehung der in Fig. 3 dargestellten Erscheinung und ihren Zusammenhang mit dem Vorzeichen der Doppelbrechung demonstrieren zu können.

Die kurzen Striche in Fig. 4 bedeuten die Richtung der positiven Axe der Doppelbrechung; die gestrichelten Linien

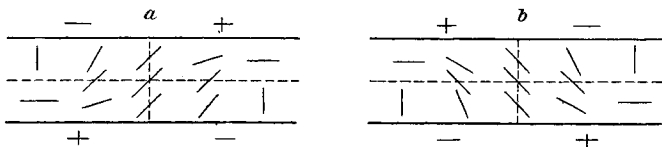


Fig. 4.

stellen die Knotenlinie einerseits, die neutrale Mittellinie andererseits dar. Es sind die beiden entgegengesetzten Fälle gezeichnet, dass die aus der Biegung hervorgehende Doppelbrechung, vom Knoten aus gerechnet, einmal im rechten oberen und linken unteren, das andere Mal im linken oberen und rechten unteren Quadranten positives Vorzeichen hat. Die Richtung der positiven Axe im Knoten ist den obigen Ueberlegungen gemäss jedesmal parallel zur Halbierungslinie der positiven Quadranten eingezeichnet. Die Figuren veranschaulichen, in welcher Weise die Richtung der positiven Axe sich aus der dem einen Schwingungsbauche zukommenden Lage

beim Durchgang durch den Knoten in die um 90° verschiedene Lage im anderen Schwingungsbauche allmählich herumdreht. Denkt man sich nun das Nicolsystem aus der 45° -Stellung heraus nach rechts gedreht, so lehrt die Betrachtung der Figuren unmittelbar, dass in den beiden gezeichneten Fällen Auslöschung an bestimmten Stellen des rechten oberen und des linken unteren Quadranten eintreten muss; umgekehrt bei Drehung nach links. Diesen Folgerungen aus den Zeichnungen entsprechen die in Fig. 3 dargestellten Thatsachen. Sie können also als Beweis für die Richtigkeit der Behauptungen angesehen werden, die ich oben hinsichtlich des Vorzeichens der Doppelbrechung im Knoten aufgestellt habe.

Ich füge in Bezug auf die beschriebenen Erscheinungen noch die folgenden Bemerkungen hinzu: Aus der obigen Darlegung folgt, dass für die beiden gezeichneten Fälle die Curven bei derselben Nicolstellung die gleiche Lage haben. Sie ändern also die Lage nicht, während die Platte aus einer Verbiegung in die entgegengesetzte hinüberschwingt, und sind daher auch während der Schwingung deutlich sichtbar. Die Form der Curven aber, wie sie in Fig. 3 dargestellt ist, entspricht nicht ganz den Beobachtungen. Die Curven machten zwar den Eindruck von Hyperbeln, doch war die Knotenlinie augenscheinlich nicht die eine Asymptote. Auch machten sich Verzerrungen der Curven bemerklich, indem in diesem Bereich geringer künstlicher Doppelbrechung die ursprüngliche Doppelbrechung der Glasplatte stärkere Störungen verursachte. Der in Fig. 3 gezeichnete Fall würde verwirklicht sein, wenn die Platte vollkommen homogen und die durch Scheerung hervorgerufene Doppelbrechung durch die ganze Plattendicke constant wäre. Wie weit die Abweichungen durch die Nichterfüllung dieser letzteren Bedingung oder durch die Inhomogenität der Platte verursacht sind, soll hier nicht weiter untersucht werden. Ich werde später auf diesen Punkt zurückkommen.

d) *Die Grösse der Doppelbrechung.* Die Doppelaufnahmen wurden mit dem Kathetometermikroskop ausgemessen und zwar wurden folgende Grössen festgestellt: 1. an dem Knotenbilde die Amplitude der Wellencurve des Interferenzstreifens und der Abstand zweier Interferenzstreifen voneinander — das Verhältnis beider Zahlen giebt die Phasendifferenz \mathcal{A}_k im

Knoten —; 2. an dem Bauchbilde die Amplitude a der Plattenschwingung und der kürzeste Abstand η einer Curve von bestimmter Phasendifferenz Δ_b von der Mittellinie. Ferner wurden auf Glas geritzte Millimeterscalen am Ort des Knotens und am Ort des Bauches auf die Glasplatte gelegt und die Grösse ihres Bildes auf der Mattscheibe des Fallpendels mit demselben Mikroskop ausgemessen. Diese Messung ergab unmittelbar den Factor, mit dem die Ausmessungen an den Negativplatten zu multipliciren waren, um sie auf die wirkliche Grösse des Objectes in Millimetern zu reduciren. Die beiden am besten gelungenen Aufnahmen ergaben auf diese Weise folgende Zahlen:

$$\begin{aligned} \text{für } a = 0,18 \text{ mm, } \Delta_k &= 0,26, \quad \Delta_k/a = 1,444, \\ \text{für } a = 0,23 \text{ mm, } \Delta_k &= 0,33, \quad \Delta_k/a = 1,435. \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz ist also der Amplitude der Schwingung proportional und wird, wenn die letztere in Millimetern gemessen wird, durch die Formel

$$\Delta_k = 1,44 \times a$$

ausgedrückt. Anstatt das Verhältnis von Δ_k zur Amplitude a zu bilden, kann man das Verhältnis zur Doppelbrechung im Bauche bilden, die ja ebenfalls mit a proportional ist. Die Resultate der Messung von Δ_b , a und η habe ich oben bereits angeführt (vgl. p. 21). Danach ist:

$$\Delta_b = 6,53 \times a \times \eta,$$

folglich:

$$(27) \quad \frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{0,22}{\eta}.$$

Es bleibt nun schliesslich die Frage zu erörtern, ob sich diese empirisch gefundene Grössenbeziehung zwischen den beiden optischen Erscheinungen aus der Grössenbeziehung der elastischen Vorgänge im Knoten und im Bauch ausreichend erklären lässt.

5. Theorie der optischen Erscheinungen.

Die beiden an der schwingenden Glasplatte beobachteten Doppelbrechungen sind nicht ohne weiteres miteinander vergleichbar, weil sie von zwei ganz verschiedenen elastischen Deformationen herrühren. Um die Beziehungen zu entwickeln,

bediene ich mich der von F. Neumann aufgestellten Gleichungen.¹⁾ Es seien α, β, γ drei zu einander senkrechte „relative Dilatationen“; v_x, v_y, v_z seien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes für Strahlen, deren Schwingungen sich im deformirten Körper parallel zu α, β, γ vollziehen, die also mit ihrer Fortpflanzungsrichtung und ihrer Polarisationsrichtung senkrecht zu den genannten Richtungen liegen. Endlich sei v die Geschwindigkeit des Lichtes im nicht deformirten Glase. Dann kann man ganz allgemein ansetzen:

$$\begin{aligned} v_x &= v + q \cdot \alpha + p \beta + p \gamma, \\ v_y &= v + p \cdot \alpha + q \beta + p \gamma, \\ v_z &= v + p \cdot \alpha + p \beta + q \gamma. \end{aligned}$$

Ich denke mir im Folgenden die x -Axe stets in die Richtung der grössten Dehnung gelegt; die z -Axe in die Richtung des durchfallenden Lichtes. Dann ist die beobachtete Phasendifferenz bestimmt durch die Differenz der beiden Geschwindigkeiten v_x und v_y nach der Formel:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{b}{\lambda} (n_x - n_y) \\ &= \frac{b \cdot v_0}{\lambda} \frac{v_y - v_x}{v_y \cdot v_x}, \end{aligned}$$

in der v_0 die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume bedeutet. Im Product des Nenners kann bei kleinen Deformationen der Unterschied der Grössen v_x und v_y von v vernachlässigt werden. Setzt man dann noch den Brechungsexponenten des Glases $v_0/v = N$, so ist:

$$\Delta = \frac{b \cdot N^2}{\lambda \cdot v_0} (p - q) (\alpha - \beta).$$

Im Knoten hat die Deformation den Charakter einer Schiebung. Die Richtungen der grössten Dehnung und Zusammendrückung liegen unter 45° zur Richtung der scheerenenden Kraft; die Zusammendrückung hat dieselbe Grösse wie die Dehnung, und in der dritten Richtung ist die Deformation gleich Null, also $\beta = -\alpha, \gamma = 0$:

$$\Delta_k = \frac{b \cdot N^2}{\lambda \cdot v_0} (p - q) \cdot 2 \alpha_k,$$

wenn α_k die Dehnung im Knoten bedeutet.

1) F. Neumann, l. c.

Im Bauche hat die Deformation den Charakter einer Dehnung (oder Zusammendrückung) in einer Richtung und einer Contraction (oder Dilatation) in allen dazu senkrechten Richtungen. Das Verhältniß der Quercontraction zur Längsdilatation werde mit μ bezeichnet. Dann ist zu setzen:

$$\beta = \gamma = -\mu \alpha,$$

also

$$A_b = \frac{b \cdot N^2}{\lambda \cdot v_0} (p - q) (1 + \mu) \alpha_b.$$

Streng genommen wäre noch zu berücksichtigen, dass bei der Dehnung der Platte die durchstrahlte Dicke b sich verkürzt um $\mu \alpha b$; doch ist das davon herrührende Correctionsglied von der zweiten Ordnung der Kleinheit und deshalb zu vernachlässigen.

Danach ist also:

$$\frac{A_k}{A_b} = \frac{2}{1 + \mu} \cdot \frac{\alpha_k}{\alpha_b}.$$

Es handelt sich jetzt also darum, das Verhältniß der Dehnungen α_k und α_b im Knoten und im Bauch aus den Gesetzen für die elastische Verbiegung der Platte bei der Schwingung zu bestimmen. Die Grösse α_b ist unmittelbar aus der Krümmung der Platte zu berechnen:

$$\alpha_b = \frac{\eta}{\rho} = \eta \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Nicht so einfach ist die Frage nach der Grösse von α_k . Die elastische Deformation im Knoten besteht in einer Schiebung des Querschnittes in der Schwingungsebene der Platte. Ist σ_k die Grösse dieser Schiebung, so ist nach bekannten Sätzen der Elasticitätslehre die unter 45° zur Richtung der Schiebung liegende grösste Dehnung halb so gross wie die Schiebung, also:

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \sigma_k.$$

Es bleibt also die Frage zu beantworten, wie σ_k zu berechnen ist. Würden sich die Querschnitte parallel mit sich selbst verschieben, um δy für zwei Querschnitte, die um δx entfernt sind, so wäre

$$\sigma_k = \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Mit dieser Annahme würde man für die Constante der Formel (27) 51 statt 0,22 erhalten, also einen ganz falschen

Wert. Die Querschnitte verschieben sich eben nicht parallel mit sich selbst, sondern neigen sich gegeneinander in dem Maasse, als sich die Axe des Stabes krümmt; die Schiebungen der Querschnitte gegeneinander aber sind bedingt durch die Aenderungen der Krümmung und sind diesen nach Gleichung (2) proportional. Ist P die durch diese Gleichung definirte tangentiale Kraft, n der Starrheitscoefficient des Glases, so ist:

$$\sigma_k = \frac{P}{n},$$

folglich:

$$\alpha_k = \frac{E}{2n} \frac{d^2}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Zwischen dem Elasticitätsmodul E und dem Starrheitscoefficienten n besteht aber die Beziehung:

$$n = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_k = (1 + \mu) \frac{d^2}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

und

$$\frac{A_k}{A_b} = \frac{d^2}{6 \cdot \eta} \times \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (18) und (19) ergibt sich daraus für die schwingende Platte:

$$\frac{A_k}{A_b} = \frac{p \cdot d^2}{6 \cdot l} \times \frac{1}{\eta} = \frac{7 \pi d^2}{12 l} \times \frac{1}{\eta}$$

und wenn man die Dimensionen der Platte einsetzt:

$$\frac{A_k}{A_b} = 0,128 \times \frac{1}{\eta}.$$

Nach dieser Theorie würde also der empirisch bestimmte Wert der Constante nicht ganz doppelt so gross sein (0,22 gegen 0,13) wie der theoretische.

Doch auch diese Theorie entspricht der Wirklichkeit nur in sehr geringer Annäherung. Eine strenge Theorie der Biegung eines Stabes ist von de Saint-Venant¹⁾ entwickelt worden. Nach dieser sind die tangentialen Kräfte im Querschnitt des gebogenen Stabes nicht constant, sondern von Punkt zu Punkt

1) de Saint-Venant, Liouville's Journal (2) 1. p. 89—189. 1856.

veränderlich, und zwar sind scheinende Kräfte an jedem Elemente wirksam nicht bloss in der Ebene der Biegung (der xy -Ebene in der obigen Bezeichnungsweise), sondern auch in der durch die Axe des Stabes hindurchgehenden, auf der Biegungsebene senkrechten Ebene (xz -Ebene).

Die letzteren mögen mit p_{xz} , die ersteren mit p_{xy} bezeichnet werden. Beide sind an den äusseren Begrenzungsflächen der Platte Null und im übrigen complicirte Functionen von y und z , die von de Saint-Venant für einen rechteckigen Stabquerschnitt berechnet worden sind. Die Kräfte p_{xz} kommen für uns nicht in Betracht, um so weniger, als ihr Mittelwert in Richtung der Breite b , die in unserer Bezeichnungsweise in die z -Axe fällt, d. h.

$$\int_{-b/2}^{+b/2} p_{xz} dz = 0$$

ist. Die Kräfte p_{xy} bedingen die beschriebene Doppelbrechung im Knoten. Da die Differenz der Brechungsexponenten an jeder Stelle dem Werte dieser Kraft oder der durch sie bedingten elastischen Deformation proportional sein wird, so wird die ganze Phasendifferenz, die man durch die ganze Breite b der Platte in einer bestimmten, zur z -Axe parallelen Richtung hindurch wahrnimmt, der Summe jener Kräfte für die ganze Breite b , d. h. der Grösse:

$$\int_{-b/2}^{b/2} p_{xy} dz$$

proportional sein. Für diese Grösse giebt die de Saint-Venant'sche Formel den einfachen Ausdruck:

$$\int_{-b/2}^{+b/2} p_{xy} dz = \frac{3}{2} \frac{P'}{d} \left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right).$$

Integrirt man diesen noch über dy von $-d/2$ bis $+d/2$, so erhält man als Summe aller auf den Querschnitt $b \times d$ in Richtung der y -Axe wirkenden scheinenden Kräfte:

$$\int_{-d/2}^{+d/2} dy \int_{-b/2}^{+b/2} dz p_{xy} = P'$$

Bezeichnet man mit P den Mittelwert dieser Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit, so würde:

$$P = \frac{P'}{b \times d}$$

sein. Dieser Wert würde dem P in Formel (2) entsprechen. Aber nach der de Saint-Venant'schen Theorie würde sich dieses P nicht gleichmässig über den Querschnitt in Richtung der Dicke der Platte verteilen, sondern sein für die Doppelbrechung maassgebender Mittelwert, genommen in Richtung der Breite b der Platte, würde nach der Formel:

$$(28) \quad \frac{3}{2} P \left(1 - \frac{4 y^2}{d^2} \right).$$

variieren. Die Kraft würde am Rande für $y = \pm d/2$ Null sein, in der Mitte für $y=0$ das Maximum $\frac{3}{2} P$ haben.¹⁾ Den gleichen Verlauf müsste dann die Doppelbrechung zeigen.

Wenn es gestattet wäre, dieses Ergebnis des de Saint-Venant'schen Problems auf die Deformation eines schwingenden Stabes im Knoten zu übertragen, so würde auch hier die scheerende Wirkung in der Mitte der Platte anderthalbmal grösser anzunehmen sein, als sie oben aus dem Mittelwert der Schubkraft für den ganzen Querschnitt berechnet worden ist. Demgemäss würde auch die Constante der Formel (27) anderthalbmal grösser sein, also gleich 0,192, womit eine ziemliche Annäherung an den empirischen Wert 0,22 erreicht wäre.

Allerdings würde in diesem Falle die Berechnung des Δ_k aus den in Taf. I, Figg. 10 und 11 abgebildeten Aufnahmen nicht mehr streng richtig sein, denn diese Berechnung beruht auf der Annahme, dass die Doppelbrechung im Knoten gleichmässig über den Querschnitt verteilt sei. Nimmt sie nach den Rändern hin ab, so wird offenbar die Amplitude der Wellenlinie, welche der in der Mitte der Platte gelegene Interferenzstreifen des Gypskeiles beschreibt, kleiner ausfallen, als der maximalen

1) Auch die Technik verwendet die gleiche Formel zur Berechnung der Schubspannungen in gebogenen, prismatischen Trägern. Vgl. C. Bach, *Elasticität und Festigkeit*, p. 414. 3. Auflage. Berlin 1898.

Doppelbrechung in der Mitte entsprechen würde. Auch ist es dann erforderlich, den Streifenabstand des Gypskeiles nicht aus der Aufnahme der schwingenden, sondern aus der ruhenden Platte zu entnehmen. Man kann unter Zugrundelegung des durch Formel (28) ausgedrückten Gesetzes die Correctionen berechnen, die man an den auf p. 32 mitgetheilten Zahlen anbringen muss, um den wirklichen Betrag der maximalen Doppelbrechung in der Mitte der Platte daraus zu erhalten. Ich begnüge mich, das Resultat dieser Correctionsrechnung anzugeben. An Stelle der Werte 0,26 und 0,33 würde sich ergeben:

$$A_k = 0,24 \text{ bez. } 0,30,$$

daher:

$$A_k/a = 1,33 \text{ bez. } 1,30,$$

also im Mittel

$$A_k = 1,315 \times a$$

und

$$\frac{A_k}{A_b} = \frac{0,20}{\eta}.$$

Damit wäre eine noch weitere Annäherung zwischen dem beobachteten und dem berechneten Werte (0,19) erzielt.

Diese Ueberlegungen beruhen auf der Voraussetzung, dass die Doppelbrechung im Knoten nach dem durch Gleichung (28) ausgedrückten Gesetz innerhalb der Dicke der Platte veränderlich ist, und führen zu der Frage, ob sich diese Veränderlichkeit denn nicht unmittelbar in den Beobachtungen kundgegeben hat. Ich habe die Erscheinungen oben so beschrieben, wie sie sich mir ohne jede Voreingenommenheit dargestellt haben, und dabei war der Eindruck zunächst der, dass die Doppelbrechung im Knoten im wesentlichen constant wäre. Sieht man schärfer zu, so bemerkt man wohl einige Besonderheiten, welche darauf hindeuten, dass die von der Theorie geforderte Abnahme der Doppelbrechung nach den Rändern der Platte zu in der That vorhanden ist. So fällt es bei Aufnahmen wie Figg. 7 und 9 der Taf. I offenbar auf, dass die Ränder der Platte nicht als scharfe Begrenzungslinien des Bildes sichtbar sind, wie bei den Aufnahmen im Schwingungsbauche, nur natürlich in Form gerader Linien;

die hellen Streifen in Fig. 7 erscheinen vielmehr nach oben und unten hin verengt und verwaschen; ebenso erscheinen die Wellenlinien der hellen Interferenzstreifen in Fig. 9 nach den Rändern hin eigentümlich flach gedrückt. Entnimmt man endlich der Fig. 9 den Abstand der hellen Streifen und vergleicht ihn mit dem Abstand der ruhenden Streifen in Fig. 8, so findet man den letzteren grösser, um ungefähr soviel, wie die Theorie nach der angegebenen Gesetzmässigkeit verlangen würde.

Eine genauere Untersuchung dieses Punktes aber ist auf Grund des vorhandenen Beobachtungsmateriales nicht möglich. Die strenge Prüfung des durch Gleichung (28) ausgedrückten Gesetzes dürfte auch bei schwingenden Platten einige Schwierigkeiten bereiten wegen der sowieso schon recht verwickelten Versuchsanordnung. Dagegen treten Erscheinungen der gleichen Art auch bei statischer Verbiegung der Platte auf und lassen sich hier bequemer und mit aller wünschenswerten Genauigkeit verfolgen. Da eine Untersuchung über die durch scheinende Kräfte hervorgerufene Doppelbrechung in gekrümmten Glasplatten noch nicht vorzuliegen scheint, so werde ich in einer zweiten Abhandlung ausführlich auf die Verhältnisse bei statischer Verbiegung der Platten eingehen.

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung aber fasse ich folgendermaassen zusammen:

In transversal schwingenden Glasplatten treten zwei Arten von Doppelbrechung auf. In den Bäuchen ist nur die eine, in den Knoten nur die andere Art vorhanden; an den dazwischen liegenden Stellen sind beide gleichzeitig vorhanden.

Die in den Bäuchen auftretende Doppelbrechung entsteht durch die Krümmung der Platte und ist von der gleichen Art, wie die in bekannter Weise durch statische Verbiegung hervorgerufene. Ihre Axen liegen in der Längsrichtung der Platte und senkrecht dazu; ihre Stärke nimmt von der neutralen Mittellinie nach den Rändern hin, proportional dem Abstand von der Mittellinie, zu und die Grösse der spezifischen Doppelbrechung des Glases ergibt sich aus diesen Beobachtungen ebenso gross wie aus Beobachtungen statisch verbogener Platten.

Die in den Knoten auftretende Doppelbrechung rührt von den in der Platte bei ihrer Verbiegung entstehenden scheerenden Kräften her. Ihre Axen liegen unter 45° zur Längsrichtung der Platte; ihre Grösse ist gering; sie scheint, entsprechend der Theorie, in der Mitte der Platte am grössten zu sein und nach den Rändern hin abzunehmen. Ihr Verhältnis zur Schwingungsamplitude der Platte stimmt sehr nahe überein mit demjenigen Wert, der sich theoretisch dafür berechnen lässt, wenn man die von de Saint-Venant für die scheerenden Kräfte bei statischer Verbiegung gegebenen Ausdrücke auf die Verbiegung der schwingenden Platte überträgt.

Greifswald, October 1900.

(Eingegangen 26. October 1900.)
