VII. *Zur Theorie und erweiterten Kunde der
Zwillings-Stellungen, zunächst im regulären
Krystall-Systeme;
von Dr. Burhenne in Cassel.*

Bei dem jetzigen Standpunkte der Krystallographie scheint es mir kein undankbares Streben zu seyn, die gesetzmäßige Erklärung der regelmäfsig verwachsenen Individuen des Mineralreichs in den Principien der Krystallonomie aufzusuchen; dabei stütze ich mich theils auf bereits Anerkanntes, theils auf eigne Beobachtungen, die mich überzeugt haben, dafs in der Natur das Gebiet der streng gesetzlichen Krystall-Verwachsungen bei weitem umfassender erscheint, als es nach den seither beschriebenen Zwillingen zu schätzen wäre. An dem regulären Systeme, wie einem allgemeinen Beispiele, bezeichne ich im Folgenden die Hauptpunkte des Weges, den ich in sämtlichen Krystall-Systemen eingeschlagen habe.

Im sphäroëdrischen Systeme gehen wir am einfachsten von den drei zu einander senkrechten Grunddimensionen aus; betrachtet man deren je zwei als Seiten eines Parallelogramms, oder je drei als Kantenlinien eines Parallelepipeds, indem man zugleich ihr Längenverhältnifs, gemäß dem Grundcharakter des isometrischen Systems, rational setzt, dann ergeben sich unmittelbar in den Diagonalen und Eckdurchmessern neue Richtungen, die alle krystallonomisch *) sind, so wie gegenseits jede krystal-

*) Unter einer krystallonomischen Richtung verstehen wir zunächst die so construirte durch den Mittelpunkt des Systems gehende Linie, aber damit zugleich die zahllos vielen richtungsgleichen durch krystallonomische Punkte (Eckpunkte unserer Parallelegramme und Parallelepipede) gelegten Linien; an den Krystallformen erscheinen sie als Kanten, verrathen sich durch zwei in ihnen liegende Punkte (Eckpunkte der Gestalten), durch normale Flächen u. s. w.

lonomische Richtung aus einem gewissen rationalen Längenverhältniß jener Hauptrichtungen als mittlere abgeleitet werden kann. (Hierin liegt im Grunde, wie leicht einzusehen, nur ein anderer Ausdruck für das bereits anerkannte Gesetz der rationalen Coëfficienten in den Flächenzeichen.) Indem diese Deduction wegen der unerschöpflichen Mannigfaltigkeit von Längenverhältnissen in's Unbegränzte fortläuft, nähern wir uns stets mehr dem vollständigen Systeme der unzählbar vielen krystallonomischen Richtungen (oder Richtungen schlechthin) des regulären Typus, mit Ausschluss der unendlich vielen unkrystallonomischen, die aus irrationalen Längenverhältniß der Grundaxen hervorgehen würden.

Jenem rationalen Längenverhältniß zufolge tritt jede der Grundrichtungen stets mit einer Länge $= nS$ auf, wo n irgend eine — wenn man will, ganze — rationale Zahl bedeutet, S aber der Einfachheit halber $= 1$ gesetzt das gemeinschaftliche Längenmaafs abgiebt. Hieran schließt sich der allgemeine Grundsatz, daß jede krystallonomische Länge *) jeder krystallonomischen Richtung sich ausdrücken läßt im Verhältniß zu jener Längeneinheit durch ns , wo der Coëfficient n alle (rationalen) Zahlenwerthe erhalten kann, s aber für dieselbe Richtung dieselbe Gröfse bleibt; in sofern wir nun für dieses s einen einfachen Ausdruck wählen, nennen wir es das *Grundmaafs* der Richtung. Jeder Dimension kommt demnach ihr bestimmtes Grundmaafs zu, so daß jede in ihren unendlich vielen krystallonomisch möglichen Längen rationale Vielfache ihrer eigenthümlichen Grundlänge s darstellt; übrigens bedeutet hier Grundmaafs dasselbe was Grundzahl in Neumann's Beiträgen zur Krystallonomie, deren Studium bei jedem unbefangenen Mineralogen vorauszusetzen.

*) Krystallonomische Längen einer Richtung werden begränzt durch krystallonomische Punkte (in denen sich krystallonomische Linien schneiden). Ueberhaupt resultiren krystallonomische Formelemente aus dem Conflict anderer gegebener.

Im Allgemeinen ist das s einer Linie entweder $=1$ (der Grunddimensionen) oder eine Irrationalgröße, je nachdem diese Linie zu den Grundrichtungen in einem commensurabeln' oder incommensurabeln Längenverhältniß steht, so daß wir im erstern Falle für das bei jener Deduction sich darbietende Richtungszeichen *) $[m:n:r]$ den Längenausdruck $\sqrt{(m^2+n^2+r^2)}$ als einen rationalen, im letzteren Falle aber als einen irrationalen anerkennen; da nun m, n, r alle Rationalzahlen, auch bedingungsweise Null bedeuten, so giebt es unendlich viele irrationale Grundmaasse, denen allen die Eigenschaft gemein ist, Quadratwurzeln aus der Summe von zwei oder drei Quadratzahlen anzuzeigen. Vorzüglich interessirt uns hier die bis jetzt zum Nachtheil der Krystallonomie vernachlässigte Vergleichung der Richtungen, in wiefern sie gleiches Grundmaafs aufweisen, *gleichmaassig* (isometrisch) sind, oder im Gegentheile ungleichmaassig (anisometrisch); alle Linien nämlich, von deren Zeichen die Gleichung $\sqrt{(m^2+n^2+r^2)}=ps$ gilt, wo die Rationalzahl p sich ändern kann, s aber dieselbe Gröfse bleibt, sind gleichmaassig, ebenfalls zwei Linien $[m:n:r]$ und $[m':n':r']$, wenn $\frac{m^2+n^2+r^2}{m'^2+n'^2+r'^2}$ ein vollkommenes

Quadrat ausdrückt. Obgleich bei der unbeschränkten Anzahl von Grundmaassen unendlich viele Dimensionen verschiedenes Grundmaafs haben, so weisen doch auch unendlich viele dasselbe auf, so daß *jedes* Grundmaafs, es sey durch 1 oder durch eine Irrationalgröße ausdrückbar, *unzählbar vielen* Richtungen zugehört. — Es ist nicht schwer zu beweisen (z. B. mit Hülfe einiger Proportional-Sätze über Dreiecke), daß nicht nur aus den drei Hauptdimensionen die nach gegenseitiger Lage und Grundmaafs ihrer Linien bestimmte RichtungsGesamtheit des regulären Systems in bestimmter Stellung durch obige De-

**) Entsprechend dem bekannten Zeichen für Zonenachsen nach Weiss.

duction erzeugt werden kann, sondern in derselben Stellung auch aus irgend drei *) nicht in Einer Ebene gelegenen krystallonomischen Richtungen auf analoge Weise, indem man jede als rationalen Theil ihres eigenthümlichen Grundmaafses in's Seitenverhältniß der durch sie bestimmten Parallelogramme und Parallelepipede eingehen läßt; jede Dimension sammt ihrem Grundmaafse ist demnach aus drei beliebigen nach Lage und Grundlänge bekannten als mittlere ableitbar, und wenn diese mit zweien der gegebenen in Einer Ebene liegen soll, so genügen schon diese beiden, weil hier bei der Ableitung der mittlern die Ausdehnung der dritten $= 0$ zu setzen, auf welchem Wege sich alle unsere Richtungs-Parallelepipede in Richtungs-Parallelogramme auflösen lassen. Statt der Zahl drei darf man sogar jede andere Zahl setzen, oder mit andern Worten: man kann so viele und welche Dimensionen man will (wenn sie nur nicht alle Einer Ebene angehören) combiniren, damit aus ihren unendlich mannigfachen Längenverhältnissen, in denen sie als aliquote Theile ihrer Grundmaafse auftreten, alle andern Richtungen als ausgleichende resultiren, kurz, wir haben es zu thun mit einem Liniensystem im strengen Sinne des Wortes, als einem Ganzen sich wechselbestimmender Glieder.

Unter diesen zahllosen Modificationen behält freilich die Ableitung sämtlicher Richtungen aus den Grunddimensionen, d. i. aus einem *rechtwinkligen isometrischen Linienkreuze*, als die einfachste den Hauptrang; da nun aber, wie wir im Folgenden sehen werden, solcher isometrischen rechten Kreuze **) *unendlich viele* im regulä-

*) Vergl. Kupffer über die Krystallisation des Kupfervitriols etc, in diesen Annalen. J. 1826. St. 9. p. 67. ff. bes. p. 73.

**) Man könnte hier auch an rechte isometrische Kreuze dreier Linien denken, deren Grundmaafs nicht $= 1$, sondern irgend eine irrationale Quadratwurzel, wenn es nicht eine interessante Eigenschaft des regulären Richtsystems wäre, daß, sobald *eines*

ren Richtungssysteme sich auffinden lassen, so steht auf dieser Stufe der Betrachtung das Grundkreuz, von welchem wir ausgingen, als rechtes isometrisches Kreuz nicht mehr einzig da, ist als solches nicht vor den andern an sich ausgezeichnet, und wir brauchen nicht länger einseitig an ihm zu haften; diese *allgemeinste* *) Betrachtungsweise eines Richtungssystems, bestimmt in den Verhältnissen der Lage und Grundlänge seiner Glieder, ist seither verkannt. Indem wir so das Erscheinen der zahllos vielen rechten gleichmaafsigen Kreuze, deren jedes in derselben Beziehung zum Richtungsganzen steht, von deren jedem aus dieselbe Richtgesammtheit in derselben Stellung deducirt wird, anerkennen, und keinem einzelnen an sich einen Vorzug vor den andern zugestehen, betrachten wir das Richtsystem noch nicht in nächstem Bezug auf ein Krystallindividuum (was freilich gewöhnlich geschieht), denn ein solches bezieht sich immer auf *ein* rechtes isometrisches Kreuz als sein Grundachsenkreuz; nachdem wir zu diesem eins der unendlich vielen Kreuze ausgewählt haben, dann erst bestimmt sich dem Betrachtenden das Richtsystem weiter zum Richtsystem eines Individuums, indem vom Grundkreuz aus und in Bezug auf dasselbe die bestimmte, überschaubare Symmetrie sich einsetzt, wie sie in den Gestaltungen aller Individuen des regulären Systems uns entgegentritt. Nun kann die Unterscheidung des Gleichwerthigen vom Ungleichwerthigen vollständig eintreten, wobei sich die Gleichwerths-Zahlen (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48) als *endliche* ergeben;

rechten isometrischen Kreuzes Grundmaafs = 1 gesetzt wird, daraus für *alle* die unendlich vielen ihr $S=1$ folgt; den Beweis kann ich hier um so eher übergehen, da er sich an ein von Neumann dargelegtes krystallonomisches Gesetz (in seinen erwähnten Beiträgen, p. 52. ff. auch p. 76.) leicht anknüpfen läßt.

*) Sie ist, beiläufig bemerkt, besonders auch für diejenigen wichtig, welche aus dem regulären Krystall-Systeme, wie aus einer gemeinschaftlichen Mutter, sämtliche übrige auf eine gewisse Weise herzuleiten versuchen.

die zahllosen Dimensionen ordnen sich in unzählbare Gruppen *), deren jede eine *zählbare* Gesamtheit gleichwerthiger Dimensionen begreift. Die Richtungen werden nach den auf ihre *Seiten* sich beziehenden Gleichwerthszahlen, so wie nach dem Verhalten ihrer Abschnitte dieser- und jenseits des Systemmittelpunkts benannt, sie sind im Allgemeinen $n+2$ seitig, oder n seitig, $1+1$ endig, oder 2endig; nunmehr könnte man das Richtsystem mit bestimmtem *Seitenverhalten* seiner Linien benannt nennen, dagegen es auf der frühern Stufe der Betrachtung, wo diese symmetrische Seitenbezeichnung noch nicht eingetreten war, unbeenannt erscheint. Bekanntlich sind in Beziehung auf dasselbe Grundkreuz mehrere Arten von Bestimmungen der Seitenverhältnisse an den Richtungen, also mehrere Grade der Symmetrie zu unterscheiden: auf der höchsten Stufe steht der Seitencharakter des homoëdrischen Typus, man könnte ihn den ursprünglichen nennen, aus welchem die tetraëdrische und pyritoëdrische Symmetrie, Seitenbestimmung hervorgehen, indem in die ursprünglich gleichwerthigen Seiten der Richtungen einfacher (entzweigender, polarer) Gegensatz eintritt; auf die gedreht-leucitoëdrischen oder granatdioëdrischen und die pyritotetraëdrischen Formen nehmen wir keine Rücksicht, da wenig Hoffnung vorhanden ist, dieselben, besonders die letztern, wo jede Seite zweimal in die Differenzirung eingeht, je in der Natur zu finden.

Bekanntlich hat man bei jenen beiden Arten der Hemiedrie zwei sich wie $+$ und $-$ *entgegengesetzte* Seitenbestimmungen in Beziehung auf dieselben Hauptachsen zu unterscheiden; ferner kann von *jedem* der unendlich vielen rechten isometrischen Kreuze aus die Symmetrie, das Seitenverhalten sich einsetzen, *jedes* derselben kann

*) Ich brauche wohl kaum zu bemerken, daß man, freilich weniger einfach, von *jeder* Gruppe als von einem Träger der Symmetrie ausgehen kann, wobei aber immer schon ein bestimmtes Grundkreuz supponirt ist.

zum Grundachsenkreuz eines Krystalls werden; bleibt dabei das Richtsystem in *fester* Stellung, so ist natürlich weiter nichts geändert, als die Seitenbestimmung verrückt. Finden wir nun bei zwei oder mehreren regulären Individuen, daß ihre Liniensysteme parallel, d. i. in derselben Stellung sind, vermissen aber den Parallelismus gleichwerthiger Seiten, so anerkennen wir sie damit als Zwillinge, Drillinge, Vierlinge, kurz: als *sich krystallonomisch stellbedingende* Krystalle; beziehen wir solche parallele Liniensysteme auf einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, so fallen natürlich die Richtungen des einen Krystalls in die des andern, aber nicht mit gleichwerthigen Seiten, sonst hätte man es mit parallelen Krystallindividuen zu thun.

Nunmehr erklären wir (krystallonomisch) *stellbezugliche Krystalle* (*Zwillinge, Drillinge u. s. w.*) als parallele (nach Lage und Grundlänge identische) Richtsysteme mit versetztem Seitenverhalten. Man unterscheidet füglich *zwei* schon angedeutete *Hauptabtheilungen*:

1) stellbezugliche Krystalle mit *parallelen* Grundkreuzen, deren Seiten hemiedrisch auf eine wie $+$ und $-$ sich entgegengesetzte Weise bezeichnet sind; sie werden leichter aufgefaßt, als

2) stellbezugliche Krystalle mit *nicht parallelen* Grundachsen. Hat das Richtsystem irgend eine bestimmte Stellung, so ist dadurch nicht etwa nur *eine* Stellung des Krystallindividuums gegeben, wie man es gewöhnlich betrachtet, nicht von vorn herein die unendlich vielen rechten Kreuze von verschiedener Lage berücksichtigend, sondern in diesen sind uns *eben so viele* verschiedene Lagen des Grundkreuzes gegeben, so daß *eine* Stellung des Richtsystems *unendlich viele* (doch nicht als denkbare) bestimmte Stellungen des Individuums bedingt, deren je zwei eine Zwillings-, je drei eine Drillings-Stellung u. s. w. Tritt also bei derselben Stellung des Richtsystems die symmetrische Gestaltung nach mehr als *einem* Grund-

kreuz in: eben so vielen Individuen auf, so erscheinen diese als Zwillinge, Drillinge u. s. w. Gemäfs der unendlichen Anzahl rechter isometrischer Kreuze sind unendlich viele Arten von Zwillings-Stellungen gesetzlich möglich, von denen die Natur zwar in der Regel mehr die einfacheren Fälle aufweist, aber dessen ungeachtet ist das Erscheinen krystallonomisch stellbedingter Individuen bei weitem *häufiger*, als man seither glaubte, wie die oft mühsame Beobachtung lehrt.

So sind nun Zwillinge, Drillinge u. s. w. in echt krystallonomischer Stellungsabhängigkeit, und können die Formelemente des einen auf die des andern eben so wie auf die desselben Individuums krystallgesetzlich bezogen werden; sie bedingen sich dermafsen gegenseitig in ihrer Lage, dafs das eine Individuum thätig *alle* seine Richtungen (ohne Bezug auf Seitenbestimmung) mit ihren bestimmten Grundmafsen in's andere einsetzt, was auch dem oben angedeuteten Wesencharakter des Richtsystems, als eines Ganzen, dessen Glieder sich wechselseitig fordern, entspricht.

Betrachten wir zwei Individuen in Zwillingsstellung: Was als krystallonomische oder respective unkrystallonomische Fläche, Zonenebene, Kante, Zonenaxe auf das eine Grundkreuz kann bezogen werden, ist auch als solche mit demselben Grundverhältnifs *), Grundmafs auf das andere beziehbar. Da alle rechte isometrische Kreuze in demselben Lagenverhältnifs zum Richtungsganzen stehen, so haben auch je zwei derselben *gegenseitig gleiches* Stellungsverhältnifs zu einander **), also auch beide Individuen *a*, *b* eines Zwillings, indem die Richtungen des *a* auf *b* bezogen eben so erscheinen, wie die des *b*

*) Die Erklärung dieses Ausdrucks findet sich in Neumann's Beiträgen zur Krystallonomie, p. 20, 52, 76.

**) Nicht Linie gegen Linie betrachtet, sondern die eine gegen die andere Liniencombination.

auf a^*). Als Beispiel diene aus unserer zweiten Hauptabtheilung der so häufige Zwilling, dessen Individuen P und P' rhomboëdrisch gestellt sich dihexaëdrisch ergänzen, wie Mohsen's O , $\{\frac{0}{2}\}$; drücken wir die Richtungen in Bezug auf beide Grundkreuze aus, deren eines und somit auch das andere $s=1$ gesetzt wird, so ergibt sich: die drei Hauptaxen oder Würfelflächen-Normalen $[1:0:0]$ des einen sind parallel Pyramidenoctaëder-Normalen $[2:2:1]$ des andern, und *vice versa*, während $s=1$ bleibt; bei gemeinschaftlichem Mittelpunkt fallen drei Granatoëder-Normalen $[1:1:0]$ in $[1:1:0]$ des andern, sind also gleichlagig zu P und P' , die übrigen drei $[1:1:0]$ in Leucitoid-Normalen $[4:1:1]$ des andern, s bleibt $=\sqrt{2}$; drei Octaëder-Normalen $[1:1:1]$ des einen fallen in Leucitoid-Normalen $[5:1:1]$ des andern, die vierte $[1:1:1]$ in $[1:1:1]$, also gleichlagig, deren aller $s=\sqrt{3}$; drei $[2:1:1]$ in $[5:5:2]$, drei $[2:1:1]$ in $[2:1:1]$, die übrigen sechs $[2:1:1]$ in $[7:2:1]$, aller $s=\sqrt{6}$; drei $[3:3:1]$ in $[7:7:1]$, drei andere in $[7:5:5]$, die übrigen sechs $[3:3:1]$ in $[3:3:1]$, aller $s=\sqrt{11}$; drei $[3:2:2]$ in $[8:8:5]$, drei in $[11:4:4]$, die andern sechs in $[12:3:0]$, aller $s=\sqrt{17}$; sechs $[2:1:0]$ in $[2:1:0]$, sechs in $[5:4:2]$, $s=\sqrt{5}$; sechs $[3:1:0]$ in $[8:5:1]$, sechs in $[7:5:4]$, $s=\sqrt{10}$; sechs $[3:2:0]$ in $[10:4:1]$, sechs in $[8:7:2]$, $s=\sqrt{13}$; drei $[2:2:1]$ in $[7:4:4]$, drei in $[1:0:0]$, sechs in $[8:4:1]$, aller $s=1$; drei $[3:3:2]$ in $[10:7:7]$, drei in $[14:1:1]$, sechs in $[13:5:2]$, $m=\sqrt{22}$; sechs $[6:3:2]$ in $[16:13:4]$, sechs in $[20:5:4]$, sechs in $[19:8:4]$, sechs in $[16:11:8]$, aller $s=1$ u. s. w. Verwächst ein drittes Individuum P'' mit P eben so wie P' , nur nach einer andern Octaëder-Normale, z. B. Mohsen's O , $\{\frac{0}{2}\}$, so stehen P' und P'' ebenfalls in Zwillings-Stellung, indem eine Haupt-

*) Es lassen sich zwischen zwei congruenten regulären Körpern unendlich viele Stellungsverhältnisse bestimmen, wo dieß nicht stattfindet; es sind alle unkrystallonomische.

axe $[1:0:0]$ des einen in $[7:4:4]$ des andern, und die zwei übrigen $[1:0:0]$ in $[8:4:1]$, s bleibt $\equiv 1$; eine Granatoëder-Normale $[1:1:0]$ in $[1:1:0]$, zwei in $[4:1:1]$, zwei in $[11:5:4]$, die sechste in $[8:7:7]$, aller $m \equiv \sqrt{2}$; eine Octaëder-Normale $[1:1:1]$ in $[5:1:1]$, eine in $[11:11:1]$, die beiden andern in $[13:7:5]$, aller $m \equiv \sqrt{3}$ u. s. w. Man findet diese correspondirenden Zeichen entweder durch geometrische Construction, oder viel kürzer, indem die Richtung als Krafrichtung betrachtet nach den Formeln der Mechanik in die drei zu einander senkrechten Dimensionen des andern Grundkreuzes zerlegt wird. Von den Flächen und ihren Grundverhältnissen gilt dasselbe, was von ihren Normalen und deren Grundmaassen.

Es folgt aus dem Obigen gar leicht, dafs, wenn man von mehreren Individuen jedes in Zwillings-Stellung nur zu irgend einem der andern, man dadurch alle als stellbezüglich zu jedem beobachtet hat. Um nun zwei Individuen als Zwillinge zu erkennen, erinnern wir uns, dafs eine bestimmte Stellung des Richtsystems (ohne Bezug auf Seitenverhalten) durch die Lage von irgend drei krystallonomischen Richtungen mit bekannten Grundmaassen gegeben ist; wir haben also nur zu beweisen, dafs drei krystallonomische Linien des einen Krystalls drei krystallonomischen mit entsprechenden Grundmaassen im andern parallel sind, und in specie, wenn wir der Einfachheit halber uns wieder an's Grundkreuz halten, dafs dessen drei Linien in drei isometrische des andern fallen, von welchen aus die Richtgesammtheit in einer bestimmten Stellung, die also beiden Individuen gemeinschaftlich ist, construirt wird. Es ergeben sich demnach alle gesetzlich möglichen Zwillings-Stellungen, wenn man in einem Individuum die rechten isometrischen Kreuze aufsucht, und mit den einzelnen derselben das Grundkreuz eines andern in Parallelismus bringt. — Hier giebt es noch einen zweiten Hauptweg, der sich mehr an die ge-

wöhnliche Betrachtungsweise anschließt. Man stellt nämlich einen Krystall nach irgend drei zu einander senkrechten krystallonomischen Linien als Axen; erscheint sodann der Typus als ein *hemiëdrisch-* oder resp. *tetartoëdrisch-*regulärer, -viergliedriger, -zwei- und zweigliedriger, -sechsgliedriger, so giebt es in Bezug auf dasselbe Axenkreuz eine oder resp. drei andere Stellungen des Individuums, welche mit jener Stellung den *homoëdrisch-*regulären, -viergliedrigen u. s. w. Typus wieder erzeugen; es bleiben dabei drei Richtungen, und folglich die Richtungsgesamtheit in derselben Stellung, während die Lage der Individuen, die Seitenbestimmung verrückt wird, und die Bedingung der Zwillingsstellung ist erfüllt. Wie daher in unserer ersten Hauptabtheilung der hemiëdrisch-regulären Individuen zur homoëdrisch-regulären Symmetrie sich ausgleichen, so wird auch bei allen möglichen Zwillingen der andern Abtheilung die niedrigere Symmetriestufe der Individuen erhöht, sobald man diese in gewissen untergeordneten Stellungen betrachtet, welche eine Analogie zu dem viergliedrigen, zwei- und zweigliedrigen u. s. w. Krystallsysteme gewähren *); hieraus folgt,

*) Scheint sich in einaxigen Systemen zwei- und zweigliedriger Typus (Staurolith *gémînée rectangulaire H.*) oder gar zwei- und eingliedriger (Gotthardter Adular-Vierlinge) zum viergliedrigen zu steigern u. s. w., so liegt das in der Eigenthümlichkeit solcher Richtsysteme. Beim Staurolith ist in gewöhnlicher Stellung die verticale mit der längern horizontalen Axe isometrisch, daher bei aufrechter kürzerer Queraxe eine analoge Erscheinung wie beim Harmotom sich zeigt. — Beim Feldspath sind die Normalen von *P* und *M* isometrisch (die sich an den Bavenoer-Zwillingen vertauschen), weshalb bei verticaler Stellung dieser Flächen eine Beziehung zum viergliedrigen System eintritt; es hat übrigens mit der Stellung bei verticalem *P* und *T* dieselbe Bewandniß, auch diese Flächen haben gleiches Grundverhältniß, und vertauschen sich (bei gleichlagigem 0) an einem Zwillinge des gemeinen Feldspaths aus Thüringen, der sich in einer hiesigen Sammlung befindet. Uebrigens stimmt die Isometrie der Normalen von *P*, *M*, *T* des Feldspaths, eine interes-

dafs Zwillinge *wenigstens* die Symmetrie des zwei- und eingliedrigen Typus, nie den Symmetriemangel des eingliedrigen zeigen. Uebrigens überschaut man das Stellungen-Verhältniß zweier Individuen am leichtesten und allseitig dadurch, dafs man sich ihre Mittelpunkte in einanderfallend denkt, ob die Krystalle auch in der Natur durch-, oder an- einander gewachsen sind mit dieser oder jener Fläche u. s. w., das ist für das Stellungen-Verhältniß, wie es der Krystallograph betrachtet, unwesentlich, und erst bei Beschreibung specieller Fälle zu erwähnen.

Wir kehren auf unsern frühern Weg zurück, und suchen in einem Krystall das Wiedererscheinen der drei zu einander senkrechten isometrischen Linien des Grundkreuzes zu erkennen. Für die gegenseitige Rechtwinklichkeit dreier Linien $[m:n:r]$, $[m':n':r']$, $[m'':n'':r'']$ im regulären System giebt die analytische Geometrie die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m m' + n n' + r r' &= 0 \\ m m'' + n n'' + r r'' &= 0 \\ m' m'' + n' n'' + r' r'' &= 0. \end{aligned}$$

Damit sie auch gleiches Grundmaafs $= 1$ (sobald des Grundkreuzes $s = 1$ gesetzt wird, wie schon bemerkt) aufweisen, müssen die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \sqrt{(m^2 + n^2 + r^2)} \\ \sqrt{(m'^2 + n'^2 + r'^2)} \\ \sqrt{(m''^2 + n''^2 + r''^2)} \end{aligned}$$

rationale seyn. Diese Bedingungen erfüllen im Individuum:

sante Thatsache, völlig mit Angabe der Dimensionsverhältnisse nach Weils: $a : b : c = \sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt{1} : \sqrt{\frac{1}{15}}$, wo $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ und $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}}$ rationale Vielfache von b sind.

I. Die drei Linien des Grundkreuzes selbst

$$[1:0:0]$$

$$[0:1:0]$$

$$[0:0:1].$$

Liegen dieselben mit dem Grundkreuze eines zweiten Individuums von verschiedener Stellung parallel, so müssen die Formen hemiëdrisch seyn, wie in unserer ersten Hauptabtheilung, weil sonst die Individuen selbst in Parallelismus wären. Da es im regulären Systeme keine tetartoëdrischen Gestalten giebt, so genügen stets zwei polarisirte Krystalle, um durch ihr Stellungs-Verhältniß die höhere *homoëdrisch-reguläre* Symmetriestufe darzustellen, indem ihre wie + und — entgegenstehenden Seitenbestimmungen sich zu neutralisiren suchen; bei tetraëdrischen Individuen ist dieser Fall schon von Romé de l'Isle, bei pyritoëdrischen durch Weiss beschrieben.

II.

$$[2:2:-1]$$

$$[2:-1:2]$$

$$[-1:2:2].$$

Durch Veränderung der Vorzeichen erhält man noch drei diesem gleichwerthige Kreuze, welche zusammen die Normalen-Gruppe des gewöhnlichen Pyramidenoctaëders

$$\left[\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 1 \right]$$

bilden. Laufen einem solchen rechten isometrischen Kreuze im einen Individuum die Hauptaxen des andern parallel, so ergänzen sich beide in rhomboëdrischer Stellung zum *sechsgliedrigen* Typus des Zwillings, während eine Octaëdernormale zu beiden gleichlagig ist. Zur Wiedererzeugung der regulären Symmetrie müßten allen vier genannten Kreuzen eines Individuums die Grundkreuze von vier andern parallel seyn, was ich auch öfters beobachtet habe; diesen Fall kann man schnell und sicher schon aus den Zonen erkennen, wenn Würfel mit Octaëderflächen combinirt sind. Schon längst sind die hieher gehörigen Zwillinge bei homoëdrischen Formen beschrieben, auch bei tetraëdrischen von Haidinger, und bei

pyritoëdrischen von Wackernagel. So ungemein häufig diese Verwachsung bei den mannigfaltigsten regulären Formen beobachtet ist, so entgeht sie doch auch oft dem flüchtigen Blicke besonders dann, wenn sich die Individuen nicht in einer ebenen Zusammensetzungsfläche begränzen, und der symmetrische Typus dem Auge weniger ungesucht daliegt; diels letztere mag auch wohl eine von den Ursachen seyn, daß von den nun folgenden Zwillings-Stellungen in mineralogischen Schriften seither keine beschrieben ist. In Krystallgruppen, deren Individuen dem ersten Blick wie durch einander gerüttelt erscheinen, so daß eins das andere gleichsam theilweis verschlingt, entdeckt man strenggesetzliche Verwachsungen, ohne stets durch eine ebene Gränzfläche an das Wort — Hemitropie — erinnert zu werden; ein und dasselbe Stellungs-Verhältniß kann sich so auf mannigfaltige Art dem Auge darbieten, je nach der Richtung, in welcher die Mittelpunkte der Gestalten aus einander liegen. Um die Symmetrie des Zwillings und überhaupt das Lagen-Verhältniß seiner Individuen schnell und vollständig zu übersehen, sind Modelle mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt der Individuen, wie ich sie von den beobachteten Fällen zum Unterricht mir verfertigt habe, das beste Mittel.

$$\text{III. } \begin{bmatrix} (m+n)m:(m+n)n:-mn \\ (m+n)n:-mn:(m+n)m \\ -mn:(m+n)m:(m+n)n \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} (m+n)n:(m+n)m:-mn \\ -mn:(m+n)n:(m+n)m \\ (m+n)m:-mn:(m+n)n \end{bmatrix}$$

Durch Versetzung der Vorzeichen bekommt man noch sechs, also zusammen acht gleichwerthige Kreuze im Individuum, welche in Combination das Normalen-System eines Achtundvierzigflachs $\boxed{m+n:m:n}$ bilden. Fallen nun die Würfelnormale des einen Individuums in ein solches Kreuz des andern, so zeigt der Zwillings in Bezug auf eine zu beiden Krystallen gleichlagige Octaëdernormale *dreigliedrigen* Typus; stellt man die Indivi-
durch

duen auf eine gleichlagige Pyramidengranatoöder-fläche

$$\left[\frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{m+n} \right],$$

also eingliedrig (wobei eine Octaëdernormale eine Queraxe abgiebt), so ergänzen sie sich zum zwei- und eingliedrigen Typus. Da m und n alle ganze Rationalzahlen bedeuten, so sind hier gesetzlicherweise unendlich viele Fälle möglich, von denen ich mehrere beobachtet habe, bei welchen m und n einfache Werthe erhalten. Wird $m=n$, so kommt man zu II.

In die bis jetzt aufgestellten Formeln sind alle möglichen Zwillings-Stellungen eingeschlossen, bei denen die Hauptaxen des einen *drei unter sich gleichwerthigen* Richtungen des andern Individuums parallel sind. Wir gehen nun zu den Fällen, wo das Grundkreuz in *zwei gleichwerthige und eine zu beiden ungleichwerthige* Linien fällt.

$$\text{IV. } \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0:m^2-n^2:2mn \\ 0:-2mn:m^2-n^2 \end{array} \right] \left| \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ m^2-n^2:0:2mn \\ -2mn:0:m^2-n^2 \end{array} \right] \right| \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ m^2-n^2:2mn:0 \\ -2mn:m^2-n^2:0 \end{array} \right]$$

Durch Vertauschung der Vorzeichen erhält man noch drei diesen gleichwerthige Kreuze, deren jedes aus einer Würfel- und zwei Pyramidenwürfel-Normalen besteht. Bei den hieher gehörigen Zwillingen ist also beiden Grundkreuzen der Individuen eine Linie gemein, auf welche der Typus des Zwillings bezogen *viergliedrig* bleibt; stellt man die Individuen auf eine zu beiden gleichlagige Pyramidenwürfel-fläche, d. i. zwei- und zweigliedrig, so ergänzen sie sich zum zwei- und zweigliedrigen Typus. Hier habe ich weniger Fälle als unter No. III. beobachtet. Ist $m=n$, so hat man No. I.

$$\text{V. } \left[\begin{array}{ccc} 2mn:2mn:2m^2-n^2 \\ 2m^2:-n^2:-2mn \\ n^2:-2m^2:2mn \end{array} \right] \left| \left[\begin{array}{ccc} 2mn:2m^2-n^2:2mn \\ 2m^2:-2mn:-n^2 \\ n^2:2mn:2m^2 \end{array} \right] \right| \left[\begin{array}{ccc} 2m^2-n^2:2mn:2mn \\ -2mn:2m^2:-n^2 \\ 2mn:n^2:-2m^2 \end{array} \right]$$

Verändert man die Vorzeichen, so finden sich noch neun, also zusammen zwölf gleichwerthige rechte isometrische Kreuze im Individuum, die aus zwei Achtundvier-

zigflachs-Normalen und einer entweder Leucitoïd- oder Pyramidenoctaëder-Normale (je nachdem $2m^2 - n^2$ grösser oder kleiner als $2mn$) zusammengesetzt sind. Liegen einem solchen Kreuze die Hauptaxen eines andern Krystalls parallel, so ist zu beiden eine Granatoëder-Normale gleichlagig, auf welche der Typus des Zwillings bezogen *zwei- und zweigliedrig* bleibt. Stehen die Individuen auf einer zu beiden gleichlagigen Leucitoïd- oder Pyramidenoctaëder-fläche, also *zwei- und eingliedrig*, so erhöhen sie sich in ihrer Stellung zum *zwei- und zweigliedrigen* Typus. Diese Fälle kommen häufiger vor als unter IV. Ist $m=n$, so kommt No. II.

Bei der unendlichen Anzahl der noch übrigen gesetzlich möglichen Zwillings-Stellungen fällt das Grundkreuz des einen in drei unter sich *ungleichwerthige* Richtungen des andern; um zur Anschauung der *zwei- und eingliedrigen* Symmetrie solcher Zwillinge, von denen ich noch keinen mit Sicherheit beobachtet habe, zu gelangen, läßt sich die Hülfe von Modellen mit *einem* Mittelpunkt der Individuen kaum entbehren.

Noch möchte ich folgende einfache Vorstellungsweise nicht unerwähnt lassen. Man erhält nämlich alle möglichen Zwillings-Stellungen, und zwar die unter I., wenn zwei congruente tetraëdrische Formen mit sich *deckender* Würfelfläche *), und zwei pyritoëdrische mit sich *dekender* Granatoëderfläche **) an einander gelegt werden; eben so lasse man unter II. eine Octaëder- oder Leucitoïd-fläche, unter III. eine Pyramidengranatoëder-fläche, unter IV. eine Pyramidenwürfel-fläche, unter V. eine Leucitoïd- oder Pyramidenoctaëder-fläche bei zwei congruenten Gestalten sich gegenseitig decken; alle übrigen Zwillinge erhält man dadurch, daß man Krystalle mit so zusammenfallender Fläche eines Achtundvierzigflachs an einander bringt.

*) In Combination mit Tetraëder-flächen betrachtet.

**) In Combination mit Pyritoëder-flächen.

Individuen in solcher Verwachsung, daß ungleichmaäßige Linien in Parallelismus kommen, sind noch *nie* beobachtet, z. B. zwei Würfel in einer Stellung zu einander, daß eine Kante des einen einer Flächendiagonale oder Eckenaxe des andern parallel wäre, oder daß die eine Stellung aus der andern durch Umdrehung um 45° in einer Würfelnormale, oder um 90° in der Granatoëdernormale erhalten würde u. s. w.

Was hier mit wenigen Zügen angedeutet ist, werde ich in Kurzem ausführlich entwickeln, mit specieller Beschreibung der neu beobachteten krystallonomisch verwachsenen Individuen, und auf die übrigen Krystall-Systeme ausdehnen, in welchen das Auftreten krystallonomischer Stellungen-Verhältnisse, in sofern es über den *orthometrischen* Charakter von Mineralien entscheidet, noch nicht gehörig gewürdigt ist.

Zusatz. Indem man eines Krystalles Richtung $[m:n:r]$ von bestimmtem s auf die Grundkreuze zu jenem stellbezoglicher Krystalle bezieht, d. i. in diese Grundkreuze zerlegt ausdrückt, so ergeben sich für m, n, r in $\sqrt{m^2 + n^2 + r^2} = ps$ andere Zahlen; es läßt sich, sobald man den oben bezeichneten Charakter des Richtsystems aufgefaßt hat, die Aufgabe, für m, n, r allgemeine Werthe bei bestimmtem s zu finden, durch geometrische Construction lösen, wodurch dann eine Richtung, bezogen auf alle unendlich vielen rechten isometrischen Kreuze, ihr *allgemeinstes* Zeichen bekommt; so erhält ein ganzes System von Aufgaben aus der unbestimmten Analytik hier *naturhistorische* Bedeutung.