II. *Ueber innere Reibung von Flüssigkeiten;* *von Kurt Mützel.*

Einleitung.

Die Methoden, welche bisher angewendet worden sind, um die innere Reibung flüssiger Körper zu bestimmen, sind Beobachtungen oscillirender Schwingungen und Beobachtungen von Durchflusszeiten durch capillare Röhren. Zur ersten Classe gehört zunächst die ältere Coulomb'sche Methode, sodann die Abänderung derselben durch Maxwell. Sehr verwandt damit ist die Untersuchungsart, welche Piotrowski auf Vorschlag von Helmholtz anwandte, indem derselbe aus den Schwingungen einer die betreffende Flüssigkeit enthaltenden Hohlkugel die Reibung zu ermitteln suchte. Ebenfalls als eine Abänderung der ursprünglichen Coulomb'schen kann die von Hrn. Prof. O. E. Meyer herührende Methode bezeichnet werden, welche darin besteht, dass die Schwingungen eines Hohlcyinders beobachtet werden, welcher mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist. — Da dieselbe bis jetzt noch nirgends angewendet worden ist, jedoch mit Rücksicht auf die erreichbare Genauigkeit der theoretischen Behandlung grosse Vorzüge hat, so unternahm ich es, sie auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen. Als Untersuchungsstoff wählte ich dazu Salzlösungen und hatte als Ziel dabei zweierlei im Auge. Einmal wollte ich der Frage, welche bisher mit Ausnahme der Brückner'schen¹⁾ Versuche fast gar nicht beachtet worden war, näher treten, wie sich nämlich der Reibungscoefficient eines Lösungsgemisches zu den Coefficienten der Einzellösungen verhält, dann aber wollte ich untersuchen, in welcher Weise die Reibungsconstante einer Lösung von den Bestandtheilen derselben abhängig ist. — Die dazu nöthigen Beobachtungen führte ich im Wintersemester 1889/90 und im Sommersemester 1890 im physikalischen Institut der Universität Breslau aus.

1) Brückner, Ueber innere Reibung von Salzlösungen. Halle 1890.

Bei Abfassung meiner Arbeit hat mich mein hochverehrter Lehrer, Hr. Geh. Rath Prof. Dr. O. E. Meyer wiederholt aufs freundlichste unterstützt. Ich gestatte mir an dieser Stelle ihm hierfür, sowie für die Bereitwilligkeit, mit der er mir die Mittel des Institutes zur Verfügung stellte, meinen aufrichtigsten und herzlichsten Dank zu sagen.

§ 1. Beschreibung der Beobachtungsmethode und des Apparates.

Wie bereits erwähnt, war die Methode, welche ich bei meinen Versuchen anwandte, eine Abänderung der früheren Coulomb'schen mit schwingenden Scheiben, indem ich die logarithmischen Decremente der Schwingungsamplituden eines Hohlcyinders beobachtete, welcher vollständig mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt wurde. Es liegt dieser Methode die Anschauung zu Grunde, dass die innen befindliche Flüssigkeit vermöge ihrer grossen Trägheit bestrebt ist, ihren Platz im Raum unverändert beizubehalten, während der umgebende Cylinder in hin und her gehende Rotationsbewegungen gesetzt, der Flüssigkeit einen Theil seiner Bewegung mittheilt, wodurch er selbst allmählich in seiner eigenen Bewegung gehemmt wird. Je nach der Stärke der Geschwindigkeitsübertragung von einer Flüssigkeitsschicht zur nächstbenachbarten wird entweder die ganze Flüssigkeit oder nur ein Theil derselben von dem schwingenden Cylinder mitgeführt. Die von letzterem ausgeführten Schwingungsamplituden bilden eine fallende geometrische Reihe. Die Amplituden werden vermittelst der Spiegelablesung mit Fernrohr und Scala beobachtet, darnach wird der Logarithmus des Exponenten der Reihe, d. h. das logarithmische Decrement berechnet, welches alsdann zur Bestimmung des Reibungscoëfficienten dient.

Der Apparat, welcher bifilar an dünnen Messingdrähten aufgehängt wurde, bestand aus einem niedrigen Hohlcyinder, dessen Rand aus Messing gearbeitet war, während der Boden durch eine eingesetzte Spiegelglasscheibe gebildet wurde. Dies geschah, um zu jeder Zeit in das Innere des Apparates sehen zu können, was sowohl für das Füllen als für die Controle hinsichtlich etwaiger entstandener Luftbläschen

als durchaus nothwendig erschien. Den oberen Verschluss bildete eine Messingscheibe, welche mit vier Schrauben an den etwas breiteren, nach aussen überragenden oberen Cylinderrand angeschraubt wurde. In der Mitte hatte diese Deckschraube eine Oeffnung zum Einschrauben des an einer Axe befestigten Spiegels. Letzterer trug an seinem oberen Ende zwei Haken, mit denen der ganze Apparat an ein Aufhängestück gehängt wurde, in welchem die beiden Drähte festgeklemt waren; die oberen Enden der letzteren waren in einem Torsionskreis befestigt. Die Axe des Spiegels war durchbohrt und mit einem kleinen Hahne versehen, welcher beim Einschrauben des Spiegels in den gefüllten Cylinder zur Vermeidung von Druck geöffnet, während der Beobachtung jedoch geschlossen wurde.

Der innere Durchmesser des Hohlcyinders war = 19,79 cm
die Höhe desselben = 2,46 „

In einer Entfernung von 2,5 m vor dem Spiegel befand sich das Beobachtungsfernrohr mit einer in Millimeter getheilten Scala. Anfangs benutzte ich eine gerade Scala und musste demnach alle abgelesenen Tangenten mittelst einer zu diesem Zweck angelegten Correctionstabelle auf Bogen reduciren.

Später verwandte ich eine Kreisscala, deren Radius 2500 mm war, sodass die abgelesenen Scalentheile direct den Ausschlag angaben.

Bei allen Beobachtungen habe ich nur die ganzen Amplituden in dem Intervall von 900 mm und 150 mm verwendet, weil diese die Constanz des logarithmischen Decrementes am besten zeigten; ich machte jedesmal vier bis sechs Reihen von Beobachtungen, nahm in jeder den Mittelwerth der Decrementes und aus diesen Mittelwerthen den Hauptmittelwerth, den ich der weiteren Berechnung zu Grunde legte.

Gegen Luftströmungen wurde der Apparat dadurch geschützt, dass er seine Schwingungen in einem allseitig geschlossenen Glaskasten ausführte, aus welchem jedoch der Spiegel herausragte.

Eine elastische Nachwirkung der Drähte infolge der Torsion beim Schwingen war kaum vorhanden, was daran lag, dass die Drähte sehr dünn und die Ausschlagswinkel

nicht allzugross waren. Auch suchte ich es einzurichten, dass jedesmal die Anfangsamplituden gleich gross wurden, wie es Schmidt¹⁾ in seiner Dissertation über innere Reibung fester Körper verlangt. Um diese Forderung leicht und sicher zu erreichen, wurde der Apparat zum Schwingen mittelst eines Magnets gebracht, welcher einen unter dem Spiegel befestigten kleinen Eisenstift anzog.

§ 2. Bestimmung des Trägheitsmomentes des Reibungsapparates.

Bevor ich die beabsichtigten Versuche ausführte, musste ich das Trägheitsmoment des Apparates und zur Bestimmung dieses zunächst das Torsionsmoment der Drähte sowie das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung kennen lernen. Ich erreichte dies durch die von G. v. Piotrowski²⁾ angewandte Methode, indem ich ausser den Schwingungen des Reibungsapparates noch die eines Hilfsapparates bei unifilarer und bifilarer Aufhängung beobachtete. Der Hilfsapparat bestand aus einer horizontal aufzuhängenden flachen Messingstange, an welche senkrecht in ihrer Mitte eine den Spiegel tragende Axe angeschraubt war. Der Spiegel hatte zwei kleine Haken zur Befestigung an das Aufhängestück. Auf der Stange ragten in zwei verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte je zwei feine Stahlstifte hervor, welche die auf die Stange aufgesetzten, genau cylindrisch gearbeiteten Gewichte festhalten sollten. Letztere trugen in ihren Böden eine den Stiften entsprechende feine Bohrung, und zwar genau in der Mitte, sodass die Entfernung der Mitte der Stifte von der Mitte der Aufhängungsaxe auch die Entfernung der Schwerpunkte der aufgesetzten Gewichte von der Umdrehungsaxe des Apparates war. — Die Schwingungszeiten wurden mit Hilfe der Spiegelablesung bestimmt; indem ich die Beobachtungen über mehrere hundert Schwingungen ausdehnte, erhielt ich die Zeiten bis auf den 1000. Theil einer Secunde genau.

Die Theorie, nach welcher das Trägheitsmoment berech-

1) P. M. Schmidt, Ueber innere Reibung fester Körper. Inaug.-Diss. Breslau. 1877. — Wied. Ann. 2. p. 48, 241. 1877.

2) Helmholtz u. v. Piotrowski, Wien. Ber. 40. p. 616. 1860.

net wurde, ist folgende. Wenn die hin und hergehenden Schwingungen bei bifilarer Aufhängung stattfinden, so ist die Differentialgleichung dieser Bewegung:

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} = - \left(aG + \frac{2b}{L} \right) w.$$

Darin bedeutet:

M das Trägheitsmoment der schwingenden festen Theile,

w den Ablenkungswinkel von der Ruhelage,

t die Zeit,

a das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung,

G das Gewicht der aufgehängten festen Theile,

b das Torsionsmoment des Drahtes für die Längeneinheit,

L die Länge jedes der beiden Aufhängungsdrähte.

Bezeichnet T die Schwingungsdauer, so ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{aG + \frac{2b}{L}}}.$$

Für zwei verschiedene Entfernungen r' und r'' der Schwerpunkte der Hülfgewichte von der Umdrehungsaxe erhält man ein T' und T'' und daraus den Werth von $(aG + 2b/L)$, worin noch a und b einzeln zu bestimmen sind. Zunächst findet man b durch Schwingungen des Hilfsapparates bei unifilarer Aufhängung mittelst der Gleichung:

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} = - \frac{b}{l} w,$$

in welcher l die Länge des Drahtes ist, während die übrigen Buchstaben ihre frühere Bedeutung beibehalten. Die Schwingungszeit τ ist hier $\tau = \pi \sqrt{lM/b}$ und für zwei verschiedene Entfernungen r' und r'' erhält man ein τ' und τ'' , woraus sich b ergibt. Damit ist auch a bestimmt. Mit Hülfe dieser Werthe findet man das Trägheitsmoment bei bifilarer Aufhängung aus der Gleichung:

$$M = \left(aG + \frac{2b}{L} \right) \frac{T^2}{\pi^2},$$

worin jetzt unter G das Gewicht des Reibungsapparates zu verstehen ist und T aus Schwingungsversuchen mit diesem ermittelt werden muss, bei unifilarer Aufhängung aus der Gleichung $M = bT^2/l\pi^2$.

Die für die Berechnung nothwendigen Werthe in Bezug auf den Hilfsapparat und den Reibungsapparat sind folgende:

I. Hilfsapparat:

das Gewicht des Apparates incl. Spiegel	= 183,63	g
das Aufhängestück	= 5,22	"
jedes der Gewichte = 401,03 g, also 2 m	= 802,06	"
der ganze Hilfsapparat oder G	= 990,91	"
Entfernung der weiteren Stifte von der Umdrehungsaxe r' =	12,71	cm
" " näheren " " " " " r'' =	6,36	"
Drahtlänge bei unifilarer Aufhängung l	= 153,9	"
Schwingungszeit τ'	= 119,4058	sec.
Schwingungszeit τ''	= 65,5685	"
Drahtlänge bei bifilarer Aufhängung L	= 185,9	cm
Schwingungszeit T'	= 48,1008	sec.
Schwingungszeit T''	= 26,4261	"

II. Reibungsapparat:

das Gewicht incl. Spiegel	= 1248,77	g
das Aufhängestück	= 5,22	"
mithin das ganze Gewicht G	= 1258,99	"
die Schwingungsdauer bei unifilarer Aufhängung . .	= 88,1467	sec.
" " " bifilarer " . .	= 32,6478	"

Mit Hilfe dieser Werthe ergibt sich:

$$\begin{aligned} aG + 2b/L &= 593,92 \\ b &= 14821,9 \\ a &= 0,43844 \end{aligned}$$

Darnach erhalte ich aus der Formel $M = (aG + 2b/L)T^2/\pi^2$:

$$M = 76285$$

und aus der Formel $M = bT^2/l\pi^2$:

$$M = 75818.$$

Die Differenz beider Werthe beträgt 466, was einer Abweichung der Werthe von einander um 0,6 Proc. entspricht. Der Mittelwerth aus beiden M , welcher von denselben nur um 0,3 Proc. abweicht, und den ich den weiteren Berechnungen zu Grunde lege, ist:

$$M = 76052 \text{ (g-cm}^2\text{-sec)}.$$

§ 3. Bestimmung des Widerstandes beim Schwingen in der Luft.

Wenn der Reibungsapparat in Schwingungen gesetzt ist, so rührt die fortwährende Hemmung seiner Bewegungen

nicht allein von der Flüssigkeitsreibung im Inneren desselben her, sondern hat auch zum Theil ihren Grund in der inneren Reibung und dem Widerstande der äusseren Luft, sowie der inneren Reibung der Aufhängungsdrähte. Von den gefundenen logarithmischen Decrementen bei der Flüssigkeitsreibung ist daher ein Correctionsglied abzuziehen, welches die Grösse dieser letzteren Hemmungen angibt. Um dieses zu ermitteln, liess ich den Apparat leer schwingen und bestimmte das logarithmische Decrement der aufeinander folgenden Amplituden. Da hierbei die Schwingungen nur sehr langsam abnahmen, verzeichnete ich die Umkehrpunkte des Fadenkreuzes nur immer nach 10 Schwingungen, sodass jede Amplitude von der vorhergehenden um $10T$ entfernt war. Dieses Verfahren setzte ich durch 300 Schwingungen fort und erhielt daraus als Hauptmittel sämmtlicher logarithmischer Decremente (in Brigg'schen Logarithmen) den Werth:

$$\epsilon_0 = 0,000\,968.$$

Man könnte nun sagen, dass man diesen Werth nicht von den für die Flüssigkeitsreibung gefundenen logarithmischen Decrementen abziehen dürfe, weil darin noch der Widerstand stecke, welcher von der inneren Reibung der im Hohlcyylinder befindlichen Luft herrühre. Jedoch diese eingeschlossene Luft übt nicht den geringsten Einfluss auf die Bewegung des Cylinders aus, da sie von demselben vollständig mitgeführt wird und ihre Trägheit viel zu schwach ist, um dem schweren Cylinder irgend ein Bewegungshinderniss entgegensetzen zu können. Dass die innen befindliche Luft vollständig mitgeführt wird, konnte ich mit einem anderen Apparat nachweisen, welcher ähnlich wie der beschriebene gebaut war; er war etwa 10 cm hoch und hatte im Inneren vier verstellbare Scheiben.

§ 4. Die auf die Temperatur bezügliche Correction und Bestimmung der Wasserreibung.

Da es nicht möglich war, in allen Fällen bei genau derselben Temperatur zu beobachten, weil sich die Zimmertemperatur nicht immer auf constanter Höhe erhalten liess, so mussten die Decremente, welche bei einer etwas höheren

oder niedrigeren Temperatur gefunden waren, auf die beabsichtigte Temperatur reducirt werden. Für diesen Zweck brauchte ich eine Correctionstabelle, welche für jedes Zehntel eines Temperaturgrades die anzubringende Correction angab. Da nun bei den Reibungen der später zu erwähnenden Salzlösungen die Wasserreibung bei weitem den grössten Einfluss hat, so genügte es, für die Wasserreibung eine genaue Correctionstabelle aufzustellen, die dann auch für die Salzlösungen verwendet werden konnte. Diese Verwendung bedingt keinen merklichen Fehler, weil nach den Untersuchungen von Sprung über das Verhalten der Reibung von Salzlösungen zur Temperatur die Vergrösserung oder Verminderung der Reibung des reinen Wassers für 1° oder 2° Unterschied nur sehr wenig verschieden ist von der Aenderung der Reibung einer Salzlösung. Ueber 2° betrug aber bei meinen Beobachtungen niemals die Abweichung von der Versuchstemperatur, für welche ich 20,0° C. wählte. Ich berechnete also nach mehrfachen Versuchen mit destillirtem Wasser zwischen 18° und 22° eine Correctionstabelle, welche ich dann auch für die Salzlösungen benutzte.

Die Schwingungszeit für Wasser bei 20° C. betrug 28,570 Sec., das logarithmische Decrement in Brigg'schen Logarithmen war:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = 0,068\,812 - 0,000\,968 = 0,067\,844.$$

§ 5. Reibungsversuche mit Salzlösungen.

Zu den Versuchen mit Salzlösungen benutzte ich möglichst reine Salze aus der chemischen Fabrik von Trommsdorf in Erfurt, zum Theil wasserfrei, zum Theil mit Krystallwassergehalt, und zwar: NaCl , KCl , $\text{BaCl}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$, $\text{SrCl}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$, $\text{CaCl}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$, $\text{MgCl}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$; NaNO_3 , KNO_3 , $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$, $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$, $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2 + 4\text{H}_2\text{O}$, $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 + 6\text{H}_2\text{O}$.

Von diesen Salzen untersuchte ich ganze, halbe, viertel, achtel und von einigen auch sechzehntel Normallösungen. Ich stellte die Normallösungen in der Weise dar, dass ich die Moleculargewichte der Salze in Grammen auf 1000 g Lösung nahm. Diejenigen Salze, welche luftbeständig sind, wurden mehrere Stunden unter der Luftpumpe getrocknet

und dann in berechneter Menge abgewogen. Von den anderen Salzen löste ich zunächst eine solche Quantität, dass das specifische Gewicht der Lösung jedenfalls grösser war, als das specifische Gewicht der $\frac{1}{2}$ Normallösung betragen sollte. Mit Hülfe der Gerlach'schen Tabellen der specifischen Gewichte bestimmte ich den Procentgehalt dieser Lösung und berechnete darnach, wieviel Wasser noch zugesetzt werden musste, um die vorläufige Lösung zur $\frac{1}{2}$ Normallösung zu verdünnen. Die Bestimmung des specifischen Gewichtes der so gewonnenen Normallösung bot dann immer eine Controle für die Richtigkeit des Verfahrens. Ich fand die specifischen Gewichte mit Hülfe einer in die Lösung eintauchenden Glas-kugel durch Bestimmung des Gewichtsverlustes.

Vor der Bestimmung des logarithmischen Decrementes, sowie nach derselben maass ich die Temperatur der jedesmaligen Lösung durch längeres Eintauchen eines für diesen Zweck angefertigten Thermometers in den gefüllten Cylinder.

Nachdem ich die innere Reibung einfacher Salzlösungen untersucht hatte, stellte ich zunächst aus je zweien derselben Mischungen her, dann mischte ich drei und zuletzt vier Lösungen miteinander. Die specifischen Gewichte der Mischungen waren nicht immer genau gleich dem Mittel aus den specifischen Gewichten der Bestandtheile, da auch beim Vermischen wässriger Salzlösungen miteinander nach Kremers¹⁾ eine Contraction eintritt. Jedoch sind die von mir gefundenen Abweichungen stets sehr geringfügig gewesen.

§ 6. Berechnung der Reibungscoëfficienten.

Um aus den beobachteten logarithmischen Decrementen der Schwingungsamplituden den Reibungscoëfficienten zu berechnen, dient die Endformel einer Theorie, welche mein hochverehrter Lehrer, Hr. Prof. Dr. O. E. Meyer, entwickelt hat.²⁾ Diese Formel lautet:

$$\eta = \frac{1}{\varrho T} \left[\frac{2 M \lambda}{R^4 \sqrt{\frac{1}{4} (\pi - \lambda)^{3/4} + K \delta R^3}} \right]^2.$$

1) Kremers, Pogg. Ann. 98. p. 115. 1856.

2) O. Meyer, Wied. Ann. 43. p. 14. 1891.

Darin bedeutet:

M das Trägheitsmoment des Apparates,

R den Halbmesser des Hohlcyinders,

δ die Höhe desselben,

λ das in natürlichen Logarithmen ausgedrückte logarithmische Decrement der Schwingungsamplituden,

T die Schwingungszeit des gefüllten Apparates,

ρ das specifische Gewicht der betreffenden Lösung,

K eine Grösse, die gegeben ist durch die Gleichungen:

$$K = \sum \left(\frac{4}{2n-1} \right)^2 \frac{(\pi^2 - 3\lambda h^2 T)w - \pi(2\lambda + h^2 T)v}{(v^2 + w^2)^2},$$

$$v^2 - w^2 = h^2 T - \lambda, \quad 2vw = \pi, \quad h = (2n-1) \frac{\pi}{\delta} \sqrt{\frac{\eta}{\rho}}.$$

n bezeichnet eine ganze Zahl und Σ eine Summe nach den Werthen $n = 1, 2, 3$ u. s. f.

Es ist also K eine unendliche Reihe, deren Glieder ziemlich stark abnehmen, sodass es nur nöthig wird, etwa sechs derselben zu berechnen. Für Wasser beobachtete ich $\lambda = 0,15622$ und fand daraus:

$$K = 4,2399 - 0,3292 - 0,0475 - 0,0097 - 0,0024 - 0,0,8 - \dots = 3,8503.$$

Für den grössten Werth des logarithmischen Decrementes in natürlichen Logarithmen $\lambda = 0,19255$, welcher der $\frac{1}{2}$ Normallösung von BaCl_2 zukommt, wird:

$$K = 4,14070 - 0,34046 - 0,04965 - 0,00976 - 0,00251 - 0,0,86 - \dots = 3,7375.$$

Durch mehrfache Versuche überzeugte ich mich, dass der Werth der Reihe für K fast ausschliesslich mit der kleinen Grösse λ , deren höhere Potenzen in der Theorie vernachlässigt worden sind, sich ändert, wobei v und w für verschiedene λ beinahe gleiche Werthe annehmen. Um nun zu sehen, ob ich die zu den anderen Lösungen gehörigen K gleich einer linearen Function der jedesmaligen Werthe von λ setzen könnte, bestimmte ich für das λ von $\frac{1}{2} \text{BaCl}_2$, welches zwischen den Werthen von λ für Wasser und für $\frac{1}{2} \text{BaCl}_2$ ungefähr in der Mitte liegt und somit von beiden so weit als möglich entfernt ist, das zugehörige K . Ich fand:

$$K = 4,19346 - 0,33291 - 0,04958 - 0,00974 - 0,00251 - 0,0,86 - \dots = 3,7978.$$

Da der Unterschied von λ für $\frac{1}{2} \text{BaCl}_2$ und von λ für Wasser 0,03633 und der Unterschied der zugehörigen K

gleich $-0,1128$ ist, sodass durchschnittlich einem Unterschiede von $0,0_31$ in den Grössen λ ein Unterschied von $-0,0_33105$ in den Grössen K entspricht, so musste demnach für $\lambda = 0,17344$ von $\frac{1}{2}\text{BaCl}_2$ $K = 3,7968$ sein. Dieser Werth unterscheidet sich aber von dem vorhin berechneten um eine 1 in der dritten Decimalstelle, d. h. die Abweichung beträgt nur $\frac{1}{38}$ Proc. Die Abweichungen aller anderen Werthe von K , welche auf dieselbe Weise interpolirt werden, werden also noch viel geringer sein, sodass es gerechtfertigt ist, die Werthe von K für alle übrigen Lösungen auf dem Wege der Interpolation zu berechnen.

In den folgenden Tabellen gebe ich nun die Resultate meiner Beobachtungen; es bezeichnet darin:

C die Concentration in Bezug auf Normallösungen,

P den Procentgehalt,

ρ das specifische Gewicht (bezogen auf die Dichtigkeit des Wassers bei der Beobachtungstemperatur als Einheit),

η den Reibungscoëfficienten.

Als Temperatur gilt für alle η $20,0^\circ \text{C}$.

Salz	C	P	ρ	η
Wasser.				
—	—	—	1,000	0,010 141
Chlornatrium.				
NaCl	$\frac{1}{1}$	5,850	1,042	0,011 225
"	$\frac{1}{2}$	2,925	1,020	0,010 620
"	$\frac{1}{3}$	1,463	1,009	0,010 385
"	$\frac{1}{4}$	0,731	1,004	0,010 261
"	$\frac{1}{10}$	0,366	1,002	0,010 201
Chlorkalium.				
KCl	$\frac{1}{1}$	7,459	1,047	0,010 095
"	$\frac{1}{2}$	3,730	1,023	0,010 116
"	$\frac{1}{3}$	1,865	1,012	0,010 135
"	$\frac{1}{4}$	0,932	1,006	0,010 138
"	$\frac{1}{10}$	0,466	1,003	0,010 140
Chlorbaryum.				
BaCl ₂	$\frac{1}{1}$	20,764	1,2159	0,013 156
"	$\frac{1}{2}$	10,382	1,099	0,011 530
"	$\frac{1}{3}$	5,191	1,048	0,010 800
"	$\frac{1}{4}$	2,596	1,024	0,010 467
"	$\frac{1}{10}$	1,298	1,012	0,010 310

Salz	C	P	ρ	η
Chlorstrontium.				
SrCl ₂	$\frac{1}{1}$	15,804	1,1531	0,013 300
"	$\frac{1}{2}$	7,902	1,0725	0,011 628
"	$\frac{1}{3}$	3,951	1,035	0,010 831
"	$\frac{1}{4}$	1,976	1,017	0,010 481
Chlorcalcium.				
CaCl ₂	$\frac{1}{1}$	11,065	1,0968	0,013 320
"	$\frac{1}{2}$	5,533	1,047	0,011 660
"	$\frac{1}{3}$	2,766	1,023	0,010 843
"	$\frac{1}{4}$	1,383	1,011	0,010 500
Chlormagnesium.				
MgCl ₂	$\frac{1}{1}$	9,468	1,0812	0,013 503
"	$\frac{1}{2}$	4,734	1,0394	0,011 785
"	$\frac{1}{3}$	2,367	1,019	0,010 925
"	$\frac{1}{4}$	1,184	1,009	0,010 530
Natriumnitrat.				
NaNO ₃	$\frac{1}{1}$	8,489	1,0574	0,011 200
"	$\frac{1}{2}$	4,245	1,026	0,010 583
"	$\frac{1}{3}$	2,122	1,012	0,010 334
"	$\frac{1}{4}$	1,061	1,005	0,010 226

Salz	C	P	q	η
Kaliumnitrat.				
KNO ₃	$\frac{1}{4}$	10,092	1,065	0,010 056
"	$\frac{1}{2}$	5,046	1,032	0,010 104
"	$\frac{3}{4}$	2,523	1,016	0,010 127
"	1	1,262	1,008	0,010 130
Baryumnitrat.				
Ba(NO ₃) ₂	$\frac{1}{4}$	6,517	1,055	0,010 661
"	$\frac{1}{2}$	3,258	1,027	0,010 388
Strontiumnitrat.				
Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{4}$	21,108	1,193	0,012 876
"	$\frac{1}{2}$	10,554	1,090	0,011 389
"	$\frac{3}{4}$	5,277	1,043	0,010 740
"	1	2,638	1,021	0,010 400

Salz	C	P	q	η
Calciumnitrat.				
Ca(NO ₃) ₂	$\frac{1}{4}$	16,369	1,141	0,013 062
"	$\frac{1}{2}$	8,185	1,070	0,011 536
"	$\frac{3}{4}$	4,092	1,034	0,010 786
"	1	2,046	1,015	0,010 402
Magnesiumnitrat.				
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{4}$	14,772	1,113	0,013 896
"	$\frac{1}{2}$	7,386	1,054	0,011 910
"	$\frac{3}{4}$	3,693	1,026	0,011 016
"	1	1,846	1,013	0,010 588

Mischungen von Salzlösungen.

a) Mischungen aus zwei Lösungen.

Salz	C	P	q	η
Chlornatrium und Chlorbaryum.				
NaCl	$\frac{1}{4}$	2,925	1,1290	0,012 104
BaCl ₂	$\frac{1}{4}$	10,382		
NaCl	$\frac{1}{2}$	1,463	1,0590	0,011 042
BaCl ₂	$\frac{1}{2}$	5,191		
NaCl	$\frac{3}{4}$	0,731	1,0280	0,010 526
BaCl ₂	1	2,596		

Chlornatrium und Chlorstrontium.

NaCl	$\frac{1}{4}$	2,925	1,0950	0,012 208
SrCl ₂	$\frac{1}{4}$	7,902		
NaCl	$\frac{1}{2}$	1,463	1,0450	0,011 123
SrCl ₂	$\frac{1}{2}$	3,951		
NaCl	$\frac{3}{4}$	0,731	1,0220	0,010 578
SrCl ₂	1	1,976		

Chlornatrium und Chlorealcium.

NaCl	$\frac{1}{4}$	2,925	1,0694	0,012 331
CaCl ₂	$\frac{1}{4}$	5,538		
NaCl	$\frac{1}{2}$	1,463	1,0345	0,011 206
CaCl ₂	$\frac{1}{2}$	2,766		
NaCl	$\frac{3}{4}$	0,731	1,0171	0,010 710
CaCl ₂	1	1,383		

Natriumnitrat und Strontiumnitrat.

NaNO ₃	$\frac{1}{4}$	4,245	1,1218	0,011 732
Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{4}$	10,554		
NaNO ₃	$\frac{1}{2}$	2,122	1,0584	0,010 914
Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	5,277		
NaNO ₃	$\frac{3}{4}$	1,061	1,0293	0,010 503
Sr(NO ₃) ₂	1	2,638		

Salz	C	P	q	η
Natriumnitrat und Calciumnitrat.				
NaNO ₃	$\frac{1}{4}$	4,245	1,0976	0,011 881
Ca(NO ₃) ₂	$\frac{1}{4}$	8,185		
NaNO ₃	$\frac{1}{2}$	2,122	1,0460	0,010 971
Ca(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	4,092		
NaNO ₃	$\frac{3}{4}$	1,061	1,0230	0,010 550
Ca(NO ₃) ₂	1	2,046		

Kaliumnitrat und Magnesiumnitrat.

KNO ₃	$\frac{1}{4}$	5,046	1,0885	0,011 403
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{4}$	7,386		
KNO ₃	$\frac{1}{2}$	2,523	1,0430	0,010 706
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	3,693		
KNO ₃	$\frac{3}{4}$	1,262	1,0210	0,010 408
Mg(NO ₃) ₂	1	1,846		

Chlornatrium und Magnesiumnitrat.

NaCl	$\frac{1}{4}$	2,925	1,0476	0,011 327
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{4}$	3,693		
NaCl	$\frac{1}{2}$	1,463	1,0232	0,010 719
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	1,846		

Natriumnitrat und Chlormagnesium.

NaNO ₃	$\frac{1}{4}$	4,245	1,0489	0,011 354
MgCl ₂	$\frac{1}{4}$	2,367		
NaNO ₃	$\frac{1}{2}$	2,122	1,0245	0,010 724
MgCl ₂	$\frac{1}{2}$	1,184		

Salz	C	P	ρ	η
Kaliumnitrat und Chlorstrontium.				
KNO ₃	$\frac{1}{2}$	5,046	1,0686	0,010 785
SrCl ₂	$\frac{1}{2}$	3,951		
KNO ₃	$\frac{1}{2}$	2,523	1,0332	0,010 331
SrCl ₂	$\frac{1}{2}$	1,976		

Salz	C	P	ρ	η
Chlorkalium und Strontiumnitrat.				
KCl	$\frac{1}{2}$	3,730	1,0682	0,010 700
Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	5,277		
KCl	$\frac{1}{2}$	1,865	1,0327	0,010 316
Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	2,638		

b) Mischungen aus drei Lösungen.

Chlormagnesium, Strontiumnitrat, Baryumnitrat.				
MgCl ₂	$\frac{1}{2}$	3,156	1,0757	0,011 760
Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	3,518		
Ba(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	2,172	1,0365	0,010 865
MgCl ₂	$\frac{1}{2}$	1,578		
Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	1,759	1,086	
Ba(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	1,086		

Calciumnitrat, Chlornatrium, Magnesiumnitrat.				
Ca(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	2,728	1,0750	0,011 855
NaCl	$\frac{1}{2}$	1,950		
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	4,924	1,0359	0,010 790
Ca(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	1,364		
NaCl	$\frac{1}{2}$	0,975	2,462	
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	2,462		

c) Mischungen aus vier Lösungen.

Kaliumnitrat, Magnesiumnitrat, Strontiumnitrat, Chlorkalium.				
KNO ₃	$\frac{1}{2}$	2,523	1,0782	0,011 175
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	3,693		
Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	2,638	1,865	
KCl	$\frac{1}{2}$	1,865		
KNO ₃	$\frac{1}{2}$	1,261	1,0380	0,010 506
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	1,846		
Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	1,319	0,932	
KCl	$\frac{1}{2}$	0,932		

Chlornatrium, Chlorstrontium, Kaliumnitrat, Magnesiumnitrat.				
NaCl	$\frac{1}{2}$	0,731	1,0457	0,010 745
SrCl ₂	$\frac{1}{2}$	1,976		
KNO ₃	$\frac{1}{2}$	2,523	0,923	
Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2}$	0,923		

Natriumnitrat, Chlormagnesium, Chlorstrontium, Chlorkalium.				
NaNO ₃	$\frac{1}{2}$	2,122	1,0565	0,011 527
MgCl ₂	$\frac{1}{2}$	1,184		
SrCl ₂	$\frac{1}{2}$	0,988	2,766	
CaCl ₂	$\frac{1}{2}$	2,766		

Es ergibt sich aus dieser Tabelle, dass die Reibung der Chloride stets grösser ist als die der entsprechenden Nitrate. Nur die Magnesiumsalze machen bei meinen Versuchen eine Ausnahme. Ferner ist die Reihenfolge der zweiwerthigen Metalle hinsichtlich ihrer Reibungsgrösse: Ba, Sr, Ca, Mg, also umgekehrt wie die Reihenfolge ihrer Moleculargewichte.

Nachdem ich meine Resultate mitgetheilt habe, sei es mir gestattet, eine Vergleichung derselben mit den Beobachtungen anderer zu geben, um zu zeigen, dass auch vermittelst der von mir angewandten Methode sich genaue Werthe für die Reibungscoëfficienten ergeben.

Reibungscoefficienten von Wasser.

Temperatur	Beobachter	η
21,6°	O. E. Meyer	0,010 200
20,1	Stefan	0,010 241
20,0	Poiseuille	0,010 080
20,0	Sprung	0,010 210
20,0	Brückner	0,010 086
20,0	Mützel	0,010 141

Reibungscoefficienten von Salzlösungen bei 20° C.

(Unter der Rubrik Beobachter bezeichnet B. = Brückner, S. = Sprung, M. = Mützel.)

Proc.	Beobacht.	η	Proc.	Beobacht.	η
Chlornatrium.			Chorkalium.		
2,708	B.	0,010 482	1,865	M.	0,010 134
2,925	M.	0,010 620	3,462	B.	0,009 990
5,480	B.	0,010 982	3,730	M.	0,010 116
5,850	M.	0,011 225	6,996	B.	0,009 952
8,094	B.	0,011 513	7,459	M.	0,010 085
			10,319	B.	0,009 923
Natriumnitrat.			Kaliumnitrat.		
4,245	M.	0,010 583			
7,25	S.	0,010 745	5,046	M.	0,010 104
8,489	M.	0,011 200	6,316	S.	0,010 072
12,35	S.	0,011 468	10,092	M.	0,010 056
Chlorbaryum.			12,19	S.	0,009 918
2,596	M.	0,010 467	Chlorstrontium.		
4,88	B.	0,010 645	7,18	S.	0,011 530
5,191	M.	0,010 800	7,902	M.	0,011 628
7,605	S.	0,011 142	12,53	S.	0,012 947
9,40	B.	0,011 285	15,804	M.	0,013 300
10,382	M.	0,011 530			
13,586	B.	0,011 967			
15,402	S.	0,012 396			
17,43	B.	0,012 722			
20,764	M.	0,013 156			
21,18	B.	0,013 615			

Die von Wagner¹⁾ beobachteten Werthe konnte ich leider nicht zur Vergleichung verwerthen, weil sie auf eine andere Einheit bezogen sind und für eine andere Temperatur gelten.

§ 7. Zusammenhang zwischen dem Reibungscoefficienten einer Lösung und der Concentration.

Es gewährt unstreitig ein Interesse, den Zusammenhang kennen zu lernen, welcher zwischen dem Procentgehalt einer Lösung und deren Reibungscoefficienten besteht, zumal man durch die Kenntniss dieses Zusammenhanges befähigt wäre, die Reibungsconstanten einer jeden beliebigen Lösung im

1) J. Wagner, Ostwald's Zeitschr. f. phys. Chem. 5. p. 31. 1890.

voraus zu berechnen. Bisher sind zwei Versuche gemacht worden, diese Frage zu lösen, indem zuerst O. E. Meyer¹⁾ den Reibungscoefficienten durch eine gebrochene Function zweiten Grades, dann Arrhenius²⁾ durch eine Exponentialfunction darstellten.

Ich habe mich ebenfalls mit dieser Frage beschäftigt und Formeln aufgestellt, bei deren Ableitung ich mich von folgender Ueberlegung leiten liess.

Die Reibung einer Lösung setzt sich zusammen aus der Reibung der Molecüle des darin vorhandenen Lösungsmittels gegen einander, der Reibung von Molecülen des Lösungsmittels gegen Molecüle des gelösten Körpers und der Reibung der Molecüle des gelösten Körpers gegen einander. Liegt also eine Salzlösung vor, und ist das Lösungsmittel Wasser, so wird, wenn ich durch η den Reibungscoefficienten der Lösung, durch η_w den des Wassers, η_{ws} den des Wassers gegen Salz und η_s den des Salzes bezeichne:

$$\eta = a\eta_w + b\eta_{ws} + c\eta_s.$$

Darin bedeuten a , b und c Factoren, die für jede einzelne Lösung besonders zu bestimmen sind.

Bei der Bestimmung des Factors a muss die Reibung von Salz-molecülen gegen Wasser und gegeneinander vollständig ausser acht gelassen werden; es kommt nur darauf an, in welcher Weise bei abnehmender Anzahl der Wassermolecüle ihre gegenseitige Reibung sich ändert. Sind in 1 ccm bei einer Lösung n , bei einer stärkeren Lösung n' Wassermolecüle vorhanden, so wird der Reibungscoefficient zunächst im Verhältniss von $n':n$ vermindert werden, d. h. es wird η_w jetzt zu $(n'/n)\eta_w$. Es ist aber nicht nur die Anzahl der Molecüle, sondern auch die Stärke der Reibung kleiner geworden, da sich jetzt bei der Vorüberbewegung einer Schicht an einer benachbarten jedes Molecül nicht mehr so oft an anderen reibt, als vorher. Wenn sich nun auch die Häufigkeit des Zusammentreffens der Molecüle wegen der Unbestimmtheit ihrer genauen Anzahl nicht feststellen lässt, so ist doch das Verhältniss der Häufigkeiten zu

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 113. p. 405. 1861 u. Wied. Ann. 32. p. 655. 1887.

2) S. Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chem. 1. p. 287. 1887.

ermitteln, da es gleich dem Verhältniss der mittleren Wahrscheinlichkeiten ist, dass ein Molecül der einen Schicht mit solchen der benachbarten zusammentrifft. Dieses Verhältniss ist aber gleich n'/n . Mithin wird dadurch η_w zu $(n'/n)^2 \eta_w$. Die Gesamtzahlen der Molecüle verhalten sich aber zu einander wie ihre Gewichte. Bezeichnet p den Procentgehalt, so sind in 1000 g Lösung $10p$ g Salz und $(1000 - 10p)$ g Wasser enthalten; in einem Volumen von 1000 ccm dagegen sind 1000ρ g Lösung, also $10p\rho$ g Salz und $(1000 - 10p)\rho$ g Wasser vorhanden, wobei ρ das specifische Gewicht der betreffenden Lösung ist. Von reinem Wasser sind jedoch in 1000 ccm 1000 g enthalten, sodass das Verhältniss der Gewichte der Wassermengen in einer Lösung und bei Versuchen mit unvermischem Wasser $(1000 - 10p)\rho/1000$ oder $(100 - p)\rho/100$ ist. Dieser Werth ist an Stelle von n'/n zu setzen.

Entsprechend der Bedeutung von η_w und η_s als der Reibungsgrössen einer Anzahl von Wasser- oder Salzmolecülen an der gleichen Anzahl von Wasser- oder Salzmolecülen wäre es wünschenswerth, auch η_{ws} als die Reibungsgrösse einer Anzahl von Salzmolecülen an einer gleichen Anzahl von Wassermolecülen zu bestimmen. Jedoch kommt bei dieser Fassung in dem zugehörigen Factor b das specifische Gewicht einer solchen Lösung vor, in welcher ebenso viel Molecüle Wasser als Salz enthalten sind. Da nun die Löslichkeit der Salze meist nicht so weit reicht, um thatsächlich eine derartige Lösung darzustellen, so lässt sich auch nicht das zugehörige ρ genau bestimmen. Daher definire ich am zweckmässigsten η_{ws} als die Reibungsgrösse der Salzmolecüle in der $\frac{1}{2}$ Normallösung des betreffenden Salzes. Der Factor b bestimmt sich hiernach folgendermaassen: Sind wieder in 1 ccm bei der $\frac{1}{2}$ Normallösung n und bei einer anderen Lösung n' Salzmolecüle vorhanden, so ändert sich η_{ws} zunächst um den Factor n'/n . Während jedoch die Anzahl der Salzmolecüle fällt, vermehrt sich die Anzahl der Wassermolecüle, sodass eine geringere Anzahl von Salzmolecülen öfter Gelegenheit hat sich an Wassermolecülen zu reiben als vorher. Die Anzahl der Wassermolecüle in 1 ccm bei der $\frac{1}{2}$ Normallösung sei n_1 , bei einer anderen Lösung n_1' ,

so ist das Verhältniss der Häufigkeit des Zusammentreffens oder der Stärke der Reibung jeder einzelnen oder ebenso aller Salzmoecüle an den Wassermoecülen der $\frac{1}{2}$ Normallösung und an denen einer anderen Lösung wie vorhin gleich n_1'/n_1 . Durch den Einfluss dieser beiden Factoren wird also jetzt die Reibungsgrösse des Salzes an Wasser zu $n'/n \cdot n_1'/n_1 \cdot \eta_{ws}$. Die Anzahlen verhalten sich aber wieder wie die Gewichte. Im Fall der $\frac{1}{2}$ Normallösung sind in 1000 ccm 1000 ρ_1 g Lösung, also 10 $p_1 \rho_1$ g Salz und $(1000 - 10 p_1) \rho_1$ g Wasser, wo ρ_1 das specifische Gewicht und p_1 der Procentgehalt der $\frac{1}{2}$ Normallösung ist. Bei einer beliebigen anderen Lösung sind 10 $p \rho$ g Salz und $(1000 - 10 p) \rho$ g Wasser in 1000 ccm vorhanden. Es ist also n proportional mit 10 $p_1 \rho_1$ und n' mit 10 $p \rho$ zu setzen, ebenso n_1 proportional mit $(1000 - 10 p_1) \rho_1$ und n_1' mit $(1000 - 10 p) \rho$. Daraus ergibt sich endlich als Reibungsgrösse für die Reibung der Salzmoecüle an den Wassermoecülen:

$$\left[\frac{10 p \rho}{10 p_1 \rho_1} \cdot \frac{(1000 - 10 p) \rho}{(1000 - 10 p_1) \rho_1} \right] \eta_{ws} \text{ oder } \left(\frac{p}{p_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^2 \frac{100 - p}{100 - p_1} \right) \eta_{ws}.$$

In gleicher Weise wie der Factor a wird auch c bestimmt. Da es sich statt um Wassermoecüle hier um Salzmoecüle handelt, so ist statt $(n'/n)^2 \eta_w$ zu schreiben $(n'/n)^2 \eta_s$ und für n'/n das Verhältniss der Gewichte der Salz mengen zu setzen, welche vorhanden sind, wenn 1000 ccm einmal nur mit Salzmoecülen, das andere mal mit einer beliebigen Lösung gefüllt sind. Im ersteren Falle beträgt das Gewicht des Salzes 1000 s g, wobei unter s das specifische Gewicht des Salzes zu verstehen ist, im anderen Falle 10 $p \rho$ g. Es wird also dadurch die Reibungsgrösse der Salzmoecüle aneinander zu $(p \rho / 100 s)^2 \eta_s$.

Durch Einsetzung der gefundenen Werthe für a , b und c erhalte ich für den Reibungscoefficienten η die Gleichung:

$$(I_a) \quad \eta = \left(\frac{100 - p}{100} \rho \right)^2 \eta_w + \left(\frac{p}{p_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^2 \frac{100 - p}{100 - p_1} \right) \eta_{ws} + \left(\frac{p \rho}{100 s} \right)^2 \eta_s.$$

Die in den Klammern befindlichen Grössen lassen sich sämmtlich bestimmen, η und η_w sind durch die Berechnung der Beobachtungen bekannt, sodass sich aus zwei solchen Gleichungen für zwei verschiedene Lösungen desselben Salzes

η_{ws} und η_s finden lassen, die dann weiterhin zur Bestimmung des η einer beliebigen Lösung dienen können.

Durch Zusammenfassung der beiden letzten Glieder zu einem einzigen, welches die Reibung des Salzes an Wasser und an Salz ausdrückt, erhalte ich eine bedeutend kürzere und für die Anwendung bequemere Formel, da der empirisch bestimmte Factor dieses Gliedes sehr einfach ausfällt. Es wird nämlich:

$$(I_b) \quad \eta = \left(\frac{100-p}{100} \rho \right)^2 \eta_w + \frac{p \rho}{p_1 \rho_1} \eta_{ws,s},$$

$\eta_{ws,s}$ bedeutet hierin die Reibung, welche die Salzmoecüle in der $\frac{1}{2}$ Normallösung des betreffenden Salzes auf sich selbst und auf die Wassermoecüle ausüben, und kann in sehr einfacher Weise aus den η_{ws} und η_s der ausführlichen Formel zusammengesetzt werden.

Da sich sowohl η_{ws} als auch $\eta_{ws,s}$ auf $\frac{1}{2}$ Normallösungen beziehen, so kommt es darauf an, was man unter einer solchen Lösung versteht. Ich habe überall die $\frac{1}{2}$ Normallösung so gefasst, dass das Moleculargewicht des Salzes in Grammen in 1000 g der Lösung enthalten ist. Versteht man darunter jedoch die Lösung derselben Salzmenge in 1000 ccm, so ist natürlich ein anderes p_1 , ρ_1 , η_{ws} und $\eta_{ws,s}$ zu setzen, als es in meinen Berechnungen geschehen ist. — Die grössere Formel (I_a) habe ich auf meine NaCl, NaNO₃, KCl und KNO₃ haltigen Lösungen angewandt, die Formel (I_b) auf eben dieselben und die übrigen einfachen Lösungen. Nach der Formel:

$$\eta = \left(\frac{100-p}{100} \rho \right)^2 \eta_w + \left(\frac{p}{p_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^2 \frac{100-p}{100-p_1} \right) \eta_{ws} + \left(\frac{p \rho}{100 s} \right)^2 \eta_s$$

sind zunächst aus den verschiedenen Beobachtungen die Werthe für η_{ws} und η_s zu berechnen; ich habe folgende für die NaCl, NaNO₃, KCl, KNO₃ enthaltenden Lösungen gefunden:

für NaCl	$\eta_{ws} = 0,001\,282,$	$\eta_s = 0,239\,00$
„ NaNO ₃	„ = 0,001\,523,	„ = 0,119\,08
„ KCl	„ = 0,000\,548\,3,	„ = 0,014\,43
„ KNO ₃	„ = 0,000\,724\,9,	„ = 0,010\,562

Setze ich diese Zahlen in die Formel ein, so erhalte ich folgende unter „berechnet“ zusammengestellte Werthe für die Reibungscoefficienten:

C	η ber.	η beob.	Δ	C	η ber.	η beob.	Δ
Chlornatrium.				Chlorkalium.			
$\frac{1}{t}$	0,011 225	0,011 225	± 0	$\frac{1}{t}$	0,010 091	0,010 095	-4
$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	0,010 620	0,010 620	± 0	$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	0,010 114	0,010 116	-2
$\frac{1}{\frac{1}{3}}$	0,010 349	0,010 385	-36	$\frac{1}{\frac{1}{3}}$	0,010 139	0,010 135	+4
$\frac{1}{\frac{1}{4}}$	0,010 233	0,010 261	-28	$\frac{1}{\frac{1}{4}}$	0,010 140	0,010 188	+2
$\frac{1}{\frac{1}{5}}$	0,010 186	0,010 201	-15	$\frac{1}{\frac{1}{5}}$	0,010 140	0,010 140	± 0
Natriumnitrat.				Kaliumnitrat.			
$\frac{1}{t}$	0,011 210	0,011 200	+10	$\frac{1}{t}$	0,010 051	0,010 056	-5
$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	0,010 583	0,010 583	± 0	$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	0,010 104	0,010 104	± 0
$\frac{1}{\frac{1}{3}}$	0,010 384	0,010 334	± 0	$\frac{1}{\frac{1}{3}}$	0,010 126	0,010 127	-1
$\frac{1}{\frac{1}{4}}$	0,010 216	0,010 226	-10	$\frac{1}{\frac{1}{4}}$	0,010 134	0,010 130	+4

Wenn man die abgekürzte Formel (I_b) auf die Beobachtungen anwenden will und die betreffenden η_{ws} und η_s bereits nach (I_a) berechnet hat, so braucht man das $\eta_{ws,s}$ der Formel (I_b) nicht erst besonders zu bestimmen, sondern kann es durch eine einfache Addition aus den η_{ws} und η_s zusammensetzen. Es ist nämlich $\eta_{ws,s}$ als die Reibungsgrösse zwischen Wasser an Salz und Salz an Salz in der $\frac{1}{2}$ Normallösung gleich η_{ws} und dem der $\frac{1}{2}$ Normallösung zukommenden Theile von η_s .

Ich erhalte also

für NaCl	$\eta_{ws,s} = 1,0000$	$\eta_{ws} + 0,000 767 7$	$\eta_s = 0,001 465$
„ NaNO ₃	„ = 1,0000	„ + 0,001 600 0	„ = 0,001 714
„ KCl	„ = 1,0000	„ + 0,001 560 4	„ = 0,000 570 8
„ KNO ₃	„ = 1,0000	„ + 0,002 640 0	„ = 0,000 752 8

Durch Einsetzen der Werthe in die Formel:

$$\eta = \left(\frac{100 - p}{100} \varrho \right)^2 \eta_{ws} + \frac{p}{p_1} \frac{\varrho}{\varrho_1} \eta_{ws,s}$$

ergeben sich folgende η :

C	η ber.	η beob.	Δ	C	η ber.	η beob.	Δ
Chlornatrium.				Chlorkalium.			
$\frac{1}{t}$	0,011 225	0,011 225	± 0	$\frac{1}{t}$	0,010 091	0,010 095	-4
$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	0,010 660	0,010 620	+40	$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	0,010 115	0,010 116	-1
$\frac{1}{\frac{1}{3}}$	0,010 378	0,010 385	-7	$\frac{1}{\frac{1}{3}}$	0,010 140	0,010 135	+5
$\frac{1}{\frac{1}{4}}$	0,010 249	0,010 261	-12	$\frac{1}{\frac{1}{4}}$	0,010 140	0,010 138	+2
$\frac{1}{\frac{1}{5}}$	0,010 195	0,010 201	-6	$\frac{1}{\frac{1}{5}}$	0,010 140	0,010 140	± 0
Natriumnitrat.				Kaliumnitrat.			
$\frac{1}{t}$	0,011 210	0,011 200	+10	$\frac{1}{t}$	0,010 051	0,010 056	-5
$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	0,010 620	0,010 583	+37	$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	0,010 103	0,010 104	-1
$\frac{1}{\frac{1}{3}}$	0,010 360	0,010 334	+26	$\frac{1}{\frac{1}{3}}$	0,010 126	0,010 127	-1
$\frac{1}{\frac{1}{4}}$	0,010 231	0,010 226	+5	$\frac{1}{\frac{1}{4}}$	0,010 134	0,010 130	+4

Durch Anwendung der abgekürzten Formel auf die übrigen Beobachtungen mit einfachen Lösungen erhalte ich:

C	η ber.	η beob.	Δ	C	η ber.	η beob.	Δ
Chlorbaryum.				Chlorstrontium.			
$\frac{1}{1}$	0,013 153	0,013 156	— 3	$\frac{1}{1}$	0,013 279	0,013 300	— 21
$\frac{1}{2}$	0,011 527	0,011 530	— 3	$\frac{1}{2}$	0,011 624	0,011 628	— 4
$\frac{1}{3}$	0,010 818	0,010 800	+ 18	$\frac{1}{3}$	0,010 857	0,010 831	+ 26
$\frac{1}{4}$	0,010 483	0,010 467	+ 16	$\frac{1}{4}$	0,010 488	0,010 481	+ 7
$\frac{1}{5}$	0,010 313	0,010 310	+ 3	Strontiumnitrat.			
Baryumnitrat.				$\frac{1}{1}$	0,012 853	0,012 876	— 23
$\frac{1}{2}$	0,010 656	0,010 661	— 5	$\frac{1}{2}$	0,011 408	0,011 389	+ 19
$\frac{1}{3}$	0,010 396	0,010 388	+ 8	$\frac{1}{3}$	0,010 744	0,010 740	+ 4
Chlorcalcium.				$\frac{1}{4}$	0,010 435	0,010 400	+ 35
$\frac{1}{1}$	0,013 319	0,013 320	— 1	Chlormagnesium.			
$\frac{1}{2}$	0,011 672	0,011 660	+ 12	$\frac{1}{1}$	0,013 516	0,013 508	+ 13
$\frac{1}{3}$	0,010 828	0,010 843	— 15	$\frac{1}{2}$	0,011 769	0,011 785	— 16
$\frac{1}{4}$	0,010 504	0,010 500	+ 4	$\frac{1}{3}$	0,010 982	0,010 925	+ 7
Calciumnitrat.				$\frac{1}{4}$	0,010 524	0,010 530	— 6
$\frac{1}{1}$	0,013 024	0,013 062	— 38	Magnesiumnitrat.			
$\frac{1}{2}$	0,011 565	0,011 536	+ 29	$\frac{1}{1}$	0,013 905	0,013 896	+ 9
$\frac{1}{3}$	0,010 832	0,010 796	+ 36	$\frac{1}{2}$	0,011 926	0,011 910	+ 16
$\frac{1}{4}$	0,010 406	0,010 402	+ 4	$\frac{1}{3}$	0,011 004	0,011 016	— 12
				$\frac{1}{4}$	0,010 570	0,010 588	— 18

Wie aus dem Vorstehenden ersichtlich ist, erreichen die Abweichungen nirgends den Werth von 0,4 Proc. sodass die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werthen von η eine gute zu nennen ist.

Es war mir sehr erwünscht, meine Formeln auch auf die Beobachtungen von Brückner, die ebenfalls bei 20° ausgeführt sind, prüfen zu können, zumal derselbe auch Lösungen bedeutend stärkerer Concentration untersucht hat. Durch Anwendung der Formel (I_a) erhalte ich aus den Brückner'schen Werthen für η von Chlorbaryum zunächst $\eta_{ws} = 0,003 062$ und $\eta_s = 0,26009$, mithin durch Einsetzen dieser Zahlen in die Formel:

	η ber.	η beob.	Δ
1.	0,010 643	0,010 645	— 2
2.	0,011 276	0,011 285	— 9
3.	0,011 990	0,011 967	+ 23
4.	0,012 764	0,012 722	+ 42
5.	0,013 653	0,013 615	+ 38
6.	0,014 621	0,014 688	— 67 (0,5 Proc.)

Für η_w ist hier nicht der aus meinen Beobachtungen gefundene, sondern der von Brückner angegebene Werth gesetzt, also $\eta_w = 0,010 086$, ebenso in den folgenden Berechnungen der NaCl-Lösungen.

Aus den Brückner'schen Beobachtungen mit NaCl-Lösungen erhalte ich zunächst mittelst der Formel (I_a) die Gleichungen:

1. $0,010\,482 = 0,9841\,\eta_w + 0,4590\,\eta_{ws} + 0,000\,157\,5\,\eta_s$
2. $0,010\,962 = 0,9659\,\eta_w + 0,9384\,\eta_{ws} + 0,000\,870\,9\,\eta_s$
3. $0,011\,513 = 0,9476\,\eta_w + 1,398\,\eta_{ws} + 0,001\,519\,\eta_s$
4. $0,012\,147 = 0,9274\,\eta_w + 1,874\,\eta_{ws} + 0,002\,788\,\eta_s$
5. $0,012\,878 = 0,9082\,\eta_w + 2,306\,\eta_{ws} + 0,004\,303\,\eta_s$
6. $0,013\,745 = 0,8878\,\eta_w + 2,743\,\eta_{ws} + 0,006\,237\,\eta_s$
7. $0,014\,682 = 0,8676\,\eta_w + 3,166\,\eta_{ws} + 0,008\,504\,\eta_s$
8. $0,015\,839 = 0,8466\,\eta_w + 3,582\,\eta_{ws} + 0,011\,151\,\eta_s$
9. $0,017\,089 = 0,8264\,\eta_w + 3,978\,\eta_{ws} + 0,014\,091\,\eta_s$
10. $0,018\,673 = 0,8052\,\eta_w + 4,366\,\eta_{ws} + 0,017\,417\,\eta_s$

Berechne ich aus den ersten Gleichungen die Werthe für η_{ws} und η_s , so wird $\eta_{ws} = 0,001\,111$ und $\eta_s = 0,26386$. Trage ich diese Werthe ein, so erhalte ich für die ersten fünf η (Lösungen bis zu zweifach normaler Concentration) folgende ebenfalls mit den beobachteten η sehr gut übereinstimmende Zahlen:

	η ber.	η beob.	Diff.
1.	0,010 477	0,010 482	— 5
2.	0,010 962	0,010 962	± 0
3.	0,011 513	0,011 513	± 0
4.	0,012 173	0,012 147	+ 26
5.	0,012 859	0,012 878	— 19

Für die η der Gleichungen 6 bis 10 jedoch ergeben sich Werthe, welche um einen allmählich immer grösser werdenden Betrag hinter den beobachteten Werthen zurückbleiben und zwar der Reihe nach um — 96, — 168, — 378, — 615, — 1103. Der Grund dieser Erscheinung liegt in Folgendem:

Die innere Reibung eines flüssigen Körpers setzt sich streng genommen aus zwei Bewegungswiderständen zusammen, von denen der erste die Reibung ist, welche die einzelnen Molecüle durch den gegenseitigen Anstoss wirklich erleiden, und die ich die innere Reibung im engeren Sinne nennen möchte, während der zweite von der Attraction der Molecüle herrührt; denn je mehr jedes Theilchen von den anderen angezogen wird, desto schwerer ist es, eine Schicht an einer anderen vorüber zu bewegen, desto zäher ist sozusagen die ganze Masse. Da nun diese Attraction umgekehrt proportional ist einer sehr hohen Potenz der Entfernung der Molecüle voneinander, wahrscheinlich auch der fünften, wie

es Maxwell für Gase will, so wird bei schwachen Lösungen der von der Anziehung der Salzmoecüle herrührende Bewegungswiderstand verschwindend klein oder Null sein, da sich bei grösserer Verdünnung die Wirkungssphären der Salzmoecüle nicht mehr durchschneiden oder berühren. Wird der Procentgehalt grösser, so rücken die Salzmoecüle immer näher aneinander, ihre gegenseitige Anziehung wächst immer stärker, sodass bei Vernachlässigung dieses Factors die nach der Formel berechneten Werthe immer mehr hinter den beobachteten zurückbleiben müssen; denn in der Formel ist vorläufig nur die Aenderung des von dem Anstoss der Moecüle herrührenden Bewegungswiderstandes beachtet. Was von den Salzmoecülen gesagt ist, gilt natürlich in gleicher Weise auch von den Wassermoecülen. Hier liegen bei schwachen Lösungen die Moecüle sehr nahe aneinander und werden auch bis zu Concentrationen von einem gewissen Grade (vielleicht zweifach normal) nicht sonderlich in ihrer Entfernung geändert, sodass ihre Anziehung in der Salzlösung fast dieselbe Grösse beibehalten wird, wie in reinem Wasser. Wächst jedoch der Procentgehalt weiter, so rücken die Wassermoecüle immer merklicher auseinander, ihre Anziehung wird in immer stärkerem Maasse geringer und das von der Wasserreibung herrührende Glied muss immer kleiner werden. Soll daher eine Formel den Zusammenhang zwischen dem Procentgehalt und der Gesamtreibung genau ausdrücken, so muss auch die Attraction berücksichtigt werden, das Glied mit η_w muss bei steigendem Salzgehalt noch kleiner, das Glied mit η_s dagegen immer noch grösser werden, als es bereits durch die Formel (I₁) geschieht. Das η_{ws} enthaltende Glied wird sich wenig ändern, weil ja die Wassermoecüle stets mit den Salzmoecülen in engster Berührung bleiben und für den Fall einer stärkeren Concentration die Anziehung einer grösseren Anzahl von Salzmoecülen und einer desto kleineren Anzahl von Wassermoecülen in Betracht kommt. η_w und η_s zerfallen dann in zwei Theile, von denen der eine nur von dem Anstoss der Moecüle, der zweite nur von der gegenseitigen Attraction abhängt. Beide müssen so beschaffen sein, dass ihre Summe gleich ist dem η_w , welches bei der reinen Was-

serreibung gefunden wird, und gleich dem η_s , welches einer bloß aus Salzmoecülen bestehenden Flüssigkeit zukäme. Letzteres ist natürlich unbekannt; denn das η_s , welches aus schwachen Lösungen durch die Formel gefunden wird, hängt kaum von der Attraction ab und gibt somit nur den Betrag der Reibung im engeren Sinne an. Ich habe zwar eine Formel, welche die Anziehung der Moecüle mit berücksichtigt, aufgestellt, jedoch da sie für den Gebrauch zu umständlich wird, nicht geprüft, und es vorgezogen, meine Formeln (I_a) und (I_b) mit einem entsprechenden Correctionsgliede zu versehen. Die Correction, welche sämmtliche von der Anziehung herrührende Aenderungen umfasst, habe ich zu dem Factor von η_s resp. $\eta_{ws,s}$ gefügt, weil dieser verhältnissmässig den grössten Einfluss auf die Aenderung der Gesamtreibung ausübt. Die auf diese Weise verallgemeinerten Formeln lauten:

$$(II_a) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta &= \left(\frac{100-p}{100} \rho \right)^2 \eta_{iw} + \left(\frac{p}{p_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^2 \frac{100-p}{100-p_1} \right) \eta_{ws} \\ &\quad + \left[\left(\frac{p\rho}{100s} \right)^2 + 0,0001 \left(\frac{p}{p_1} - 1 \right)^3 \right] \eta_s, \end{aligned} \right.$$

$$(II_b) \quad \eta = \left(\frac{100-p}{100} \rho \right)^2 \eta_{iw} + \frac{p}{p_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^5 \eta_{ws,s}.$$

Berechne ich damit die Reibungscoefficienten der Brückner'schen NaCl-Lösungen, so erhalte ich mit den vorigen Werthen für η_{iw} , η_{ws} und η_s und mit $\eta_{ws,s}=0,0012817$, das aus allen 10 Beobachtungen bestimmt ist:

	η ber. nach (II _a)	Diff.	η beob.	Diff.	η ber. nach (II _b)
1.	0,010 477	— 5	0,010 482	— 24	0,010 458
2.	0,010 962	± 0	0,010 962	— 30	0,010 932
3.	0,011 514	+ 1	0,011 513	— 26	0,011 487
4.	0,012 189	+ 42	0,012 147	+ 23	0,012 170
5.	0,012 910	+ 32	0,012 878	+ 25	0,012 903
6.	0,013 762	+ 17	0,013 745	+ 26	0,013 771
7.	0,014 744	+ 62 (0,4%)	0,014 682	+ 72 (0,5%)	0,014 754
8.	0,015 847	+ 8	0,015 839	+ 23	0,015 862
9.	0,017 063	— 26	0,017 089	— 1	0,017 088
10.	0,018 418	— 255	0,018 673	— 221	0,018 452

Wie aus dieser Zusammenstellung ersichtlich ist, erreichen die Abweichungen mit Ausnahme von Nr. 10 höchstens den Werth von 0,5 Proc. Ausserdem zeigt sich die Eigenthümlichkeit, dass sich nach beiden Formeln, die doch ab-

gesehen vom ersten Gliede kaum etwas miteinander gemeinsam haben, die grösste positive Abweichung bei Nr. 7, die grösste negative bei Nr. 10 ergibt. Ich möchte daher zu der Annahme neigen, dass dort Beobachtungsfehler die Veranlassung sind.

Nach der Formel (II_a) habe ich auch noch die η für zwei stark concentrirte NaCl-Lösungen von Sprung berechnet, dazu das von Sprung gefundene $\eta_w = 0,010214$ benutzt, jedoch für η_{ws} und η_s die aus den Brückner'schen Zahlen sich ergebenden Werthen $\eta_{ws} = 0,001111$ und $\eta_s = 0,26386$. Es ist:

1) für $p = 14,31$ Proc. und $\varrho = 1,1055$:

$$\eta = 0,009166 + 0,002786 + 0,001509 = 0,013461 \quad (0,013520) - 59,$$

2) für $p = 23,22$ Proc. und $\varrho = 1,1774$:

$$\eta = 0,008348 + 0,004595 + 0,004957 = 0,017900 \quad (0,017931) - 31.$$

Ebenso wie das η_w von Sprung grösser ist als das von Brückner, so würde voraussichtlich auch η_{ws} oder η_s nach jenem grösser ausfallen; in diesem Falle würden die berechneten Werthe für η noch besser mit den beobachteten übereinstimmen.

Während die Formeln (II_a) und (II_b) für alle Lösungen gültig sein sollen, genügen die Formeln (I_a) und (I_b) vollständig zur Berechnung der Reibungscoëfficienten, wenn die Concentration nicht stärker als zweifach normal wird.

§ 8. Aufstellung einer Formel für Lösungsgemische.

Wenn man eine Beziehung zwischen dem Reibungscoëfficienten einer Mischung aus zwei Salzlösungen und dem Salzgehalt herstellen will, so erhält man ausser dem Gliede mit η_w und den Gliedern mit η_{ws} und η_s für jedes der beiden Salze noch ein fünftes, welches die Reibung des einen Salzes am anderen angibt, sodass eine solche Formel bereits sehr complicirt wird. Wenn ich mit den Indices ' und '' das eine oder das andere Salz bezeichne und mit M' und M'' die Moleculargewichte, so lautet die Formel folgendermaassen:

$$\begin{aligned} \eta = & \left(\frac{100 - \frac{p' + p''}{2}}{100} - q \right) \eta_{1w} + \left(\frac{1}{2} \frac{p'}{p_1'} \left(\frac{q}{q_1'} \right)^2 \frac{100 - \frac{p' + p''}{2}}{100 - p_1'} \right) \eta_{ws'} \\ & + \left[\left(\frac{\frac{p' q}{2}}{100 s'} \right)^2 + 0,031 \left(\frac{p'}{p_1'} - 1 \right)^3 \right] \eta_{s'} + \left(\frac{1}{2} \frac{p''}{p_1''} \left(\frac{q}{q_1''} \right)^2 \frac{100 - \frac{p' + p''}{2}}{100 - p_1''} \right) \eta_{ws''} \\ & + \left[\left(\frac{\frac{p'' q}{2}}{100 s''} \right)^2 + 0,031 \left(\frac{p''}{p_1''} - 1 \right)^3 \right] \eta_{s''} \\ & + \left[\left(\frac{\frac{p' + p''}{2} \cdot \frac{M' + M''}{2}}{M' s' + M'' s''} - \frac{q}{100} \right)^2 + 0,031 \left(\frac{p' + p''}{\frac{1}{2}(p_1' + p_1'')} - 1 \right)^3 \right] \eta_{s' s''}. \end{aligned}$$

Ich habe nach dieser Formel drei Beobachtungen von Brückner mit Mischungen von NaCl und BaCl₂ berechnet, dabei die nach Formel (I_a) gefundenen Werthe von η_{ws} und η_s für NaCl und BaCl₂ benutzt und als angenäherten Werth für das unbekannte $\eta_{s' s''}$ den arithmetischen Mittelwerth aus den $\eta_{s'}$ und $\eta_{s''}$ gesetzt. Es ist:

$$\begin{array}{ll} p_1' = 5,85, & q_1' = 1,0420 \\ p_1'' = 20,76, & q_1'' = 1,2159 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ s' = 2,20, \\ s'' = 3,85, \end{array} \right\} \text{nach meiner Definition der } \frac{1}{2} \text{ Normal-} \\ \begin{array}{ll} M' = 58,5, \\ M'' = 207,6, \end{array} & \text{lösung.} \\ \eta_{ws'} = 0,001111, & \eta_{s'} = 0,26386, \\ \eta_{ws''} = 0,003062, & \eta_{s''} = 0,26009, \quad \eta_{s' s''} = 0,26197, \quad \eta_w = 0,010086. \end{array}$$

Es ergibt sich somit für

1) 5,48 Proc. NaCl + 24,64 Proc. BaCl₂, $q = 1,1540$:

$$\eta = 0,0096910 + 0,035760 + 0,04545 + 0,0017540 + 0,03547 + 0,032155 \\ = 0,012646 \text{ (0,012617) } + 29;$$

2) 10,76 Proc. NaCl + 24,64 Proc. BaCl₂, $q = 1,1730$:

$$\eta = 0,009400 + 0,0011323 + 0,032327 + 0,0017562 + 0,033665 + 0,033521 \\ = 0,013240 \text{ (0,013345) } - 105;$$

3) 15,57 Proc. NaCl + 24,64 Proc. BaCl₂, $q = 1,1911$:

$$\eta = 0,0091352 + 0,0016400 + 0,05817 + 0,0017580 + 0,033779 + 0,055254 \\ = 0,014018 \text{ (0,014200) } - 182.$$

Man ersieht leicht, dass für einen grösseren Werth von $\eta_{s' s''}$ das erste η eine noch etwas grössere Differenz, das zweite eine kleinere und das dritte eine noch viel kleinere

zeigen würde, sodass bei einem gewissen Werth von $\eta_{s',s'}$ die Abweichungen kaum 0,5 Proc. betragen würden.

Ich habe auch versucht, die eben genannten Mischungen nach einer abgekürzten Formel zu berechnen, welche alle vom Salzgehalt herrührenden Glieder zu einem einzigen vereinigt. Das $\eta_{ws's''}$ dieses Gliedes muss sich ebenfalls durch einfache Addition aus den η_{ws} und $\eta_{s'}$, sowie dem $\eta_{s',s'}$ zusammensetzen lassen. Die Formel, der ich übrigens keine allgemeine Gültigkeit zuschreiben will, obgleich sie möglicher Weise eine solche hat, lautet:

$$\eta = \left(\frac{100 - \frac{p' + p''}{2}}{100} \varrho \right)^2 \eta_{ws} + \left(\frac{p' + p''}{p_1 + p_1''} \frac{\varrho}{\varrho_1} \right)^{1/2} \eta_{ws's''} \cdot 1)$$

$\eta_{ws's''}$ berechnet sich nach der Gleichung:

$$b' \eta_{ws'} + c' \eta_{s'} + b'' \eta_{ws''} + c'' \eta_{s''} + d_{1,s's''} = b \eta_{ws's''}.$$

Wähle ich zur Bestimmung den ersten der oben genannten drei Fälle, so erhalte ich:

$$\eta_{ws's''} = 0,002\,318.$$

Setze ich diesen Werth ein, so ergeben sich für die drei Fälle von Mischungen die Gleichungen:

1. $\eta = 0,009\,691 + 0,002\,955 = 0,012\,646$ (0,012 617) + 29
2. $\eta = 0,009\,400 + 0,003\,975 = 0,013\,375$ (0,013 345) + 30
3. $\eta = 0,009\,135 + 0,005\,042 = 0,014\,177$ (0,014 200) - 23

Die Uebereinstimmung zwischen berechneten und beobachteten Werthen ist hier sogar noch besser als nach der ausführlichen Formel.

§ 9. Die Reibung einer Mischung verglichen mit der Reibung der Bestandtheile derselben.

Bei den Mischungen von Salzlösungen zeigt sich die Eigenthümlichkeit, dass das arithmetische Mittel aus den Reibungscoëfficienten der Einzellösungen grösser ist, als der Reibungscoëfficient der Mischung. Brückner hat dies für

1) ϱ_1 bezeichnet das spezifische Gewicht der als † normal aufgefassten Mischung. Ich verstehe darunter eine solche, welche aus † normalen Einzellösungen zusammengesetzt ist. Hier ist $\varrho_1 = 1,1290$.

die Salze NaCl, KCl, BaCl₂ und NH₄Cl nachgewiesen; ich kann es hier für einige andere zeigen. Bei meinen Beobachtungen machen nur die Mischungen von NaCl + CaCl₂ eine Ausnahme. Im allgemeinen werden die Differenzen mit fallendem Salzgehalt kleiner; das Umgekehrte ist der Fall bei denjenigen Mischungen, welche K enthalten, indem hier die Differenzen wachsen. Eine Analogie für diese Erscheinung finden wir bei der Mischung einer Lösung mit Wasser, und der Grund davon liegt darin, dass bei graphischer Darstellung die Curve der Salzlösungen nach unten convex ist. Warum die aufeinander folgenden Reibungscoefficienten aber gerade eine Curve dieser Form und nicht etwa eine gerade Linie bilden, ist nicht erklärt. Wenn die für den Zusammenhang zwischen Salzgehalt und Reibungscoefficient aufgestellten Formeln richtig sind, dann dürfte in ihnen das gesetzmässige Fortschreiten der Reibungscoefficienten ausgedrückt und somit die Erklärung für das Verhalten der Einzellösungen und der Mischungen gegeben sein.

Die folgende Tabelle enthält die Zusammenstellung der arithmetischen Mittel der einzelnen η und die beobachteten η der Mischungen.

Salze	C	Arithm. Mittel der η	Beob. η der Mischung	Diff.
NaCl + BaCl ₂	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	0,012 190	0,012 104	+ 86
„ „	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$	0,011 075	0,011 042	+ 33
„ „	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$	0,010 592	0,010 526	+ 66
NaCl + SrCl ₂	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	0,012 262	0,012 208	+ 54
„ „	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$	0,011 124	0,011 123	+ 1
„ „	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$	0,010 608	0,010 578	+ 30
NaCl + CaCl ₂	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	0,012 272	0,012 331	- 59
„ „	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$	0,011 140	0,011 206	- 66
„ „	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$	0,010 614	0,010 710	- 96
NaNO ₃ + Sr(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	0,012 038	0,011 732	+ 306
„ „	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$	0,010 986	0,010 914	+ 72
„ „	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$	0,010 537	0,010 503	+ 34
NaNO ₃ + Ca(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	0,012 131	0,011 881	+ 250
„ „	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$	0,011 059	0,010 971	+ 88
„ „	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$	0,010 560	0,010 550	+ 10
KNO ₃ + Mg(NO ₃) ₂	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	0,011 976	0,011 403	+ 573
„ „	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$	0,011 007	0,010 706	+ 301
„ „	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$	0,010 571	0,010 408	+ 163

Mischungen von Lösungen verschiedener Concentration.

Salze	C	Arithm. Mittel der η	Beob. η der Mischung	Diff.
$\text{NaNO}_3 + \text{MgCl}_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,011 492	0,011 354	+ 138
" "	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 754	0,010 724	+ 30
$\text{NaCl} + \text{Mg}(\text{NO}_3)_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,011 567	0,011 327	+ 240
" "	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 818	0,010 719	+ 99
$\text{KNO}_3 + \text{SrCl}_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 842	0,010 785	+ 57
" "	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 467	0,010 331	+ 136
$\text{KCl} + \text{Sr}(\text{NO}_3)_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 742	0,010 700	+ 42
" "	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 428	0,010 316	+ 112
$\text{MgCl}_2 + \text{Sr}(\text{NO}_3)_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,011 851	0,011 760	+ 91
+ $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 971	0,010 865	+ 106
$\text{Ca}(\text{NO}_3)_2 + \text{NaCl}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,012 219	0,011 855	+ 364
+ $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,011 105	0,010 790	+ 315
$\text{KCl} + \text{KNO}_3 + \text{Mg}(\text{NO}_3)_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,011 357	0,011 175	+ 182
+ $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 718	0,010 506	+ 212
$\text{NaCl} + \text{SrCl}_2 + \text{KNO}_3$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 830	0,010 745	+ 85
+ $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,010 830	0,010 745	+ 85
$\text{CaCl}_2 + \text{MgCl}_2 + \text{SrCl}_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,011 784	0,011 527	+ 257
+ NaNO_3	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$	0,011 784	0,011 527	+ 257

§ 10. Schluss.

Wenn ich nun zum Schluss die Resultate vorstehender Arbeit noch einmal zusammenfassen soll, so ist Folgendes gezeigt worden:

1. Die Beobachtungsmethode vermitteltst eines oscillirenden Hohlcyinders kann eben so gut zur Ermittlung der inneren Reibung flüssiger Körper dienen, wie die anderen bisher gebräuchlichen Methoden.

2. Die Reihenfolge der zweiwerthigen Metalle hinsichtlich der von ihnen ausgeübten Reibung ist umgekehrt wie die Reihenfolge ihrer Atomgewichte.

3. Bei Mischungen ist das arithmetische Mittel aus den Reibungscoefficienten der Einzellösungen grösser als der Reibungscoefficient der Mischung.

4. Es ist eine Beziehung gegeben worden zwischen dem Procentgehalt einer Lösung und der ihr zukommenden Reibungsconstanten.