

3.

Über eine merkwürdige Formel in der Theorie der elliptischen Transcendenten, und eine Ableitung des Fundamentaltheorems.

(Von Herrn Dr. *Richelot*, prof. ord. an der Universität zu Königsberg in Preussen.)

An mehreren Stellen hat *Jacobi* einzelne elliptische Functionen in Partialbrüche zerlegt und auf die sehr große Wichtigkeit dieser Entwicklungen für die ganze Theorie jener Functionen die Aufmerksamkeit der Geometer hingelenkt. In der That kann man von der Definition der unendlichen Producte, wie sie im (§. 61.) der „Fundamenta“ definiert sind, ausgehend, mittels der Zerlegung ihrer Verhältnisse und der Producte von ihren Verhältnissen in Partialbrüche, nicht nur die Fundamental-Eigenschaften der elliptischen Transcendenten und Functionen auf eine sehr leichte und evidente Weise finden, sondern dieselben auch bis in ihre tiefen Beziehungen verfolgen, und namentlich ihre Entwicklung in Reihen, welche nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen fortschreiten, wie sie in den Anwendungen der Theorie auf mechanische Probleme gebraucht werden, daraus ableiten. Ich habe diesen Weg in einer meiner Vorlesungen verfolgt, deren Bekanntmachung vielleicht nicht ohne Nutzen sein dürfte. Wenn dieselbe aber überhaupt erfolgen sollte, so darf Dies doch nicht früher geschehen, als bis die nach dem Tode *Jacobi's* beschlossene Edition seiner größten Vorlesung über elliptische Transcendenten, worin seine Principien und Methoden in dieser Theorie enthalten sind, ausgeführt sein wird.

In dieser letztern hat der große Meister auch seine Principien in Bezug auf die Zerlegung solcher Brüche, deren Zähler und Nenner Producte der ϑ -Functionen sind, in Partialbrüche angegeben, ohne die zahlreichen Folgerungen, welche daraus fließen, weiter zu entwickeln. Nun habe ich seit längerer Zeit diese Untersuchungen weiter verfolgt, und unter andern eine Formel gefunden, deren überraschende Allgemeinheit und Einfachheit auf das Interesse der Mathematiker einen solchen Anspruch zu haben scheint, daß ich sie nicht länger zurückhalten mag.

§. I.

Ich bezeichne durch φx diejenige Function von x , welche in der angeführten Stelle der Fundamente durch

$$(1-q)(1-q^3)\cdots \frac{H \cdot 2kx}{\vartheta 0}$$

auszudrücken ist, d. h. ich setze:

$$\varphi x = 2q^{\frac{1}{2}} \sin x (1 - 2q^2 \cos 2x + q^4)(1 - 2q^4 \cos 2x + q^8) \dots$$

Sind nun $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ sonst beliebige n Größen, nur von der Art, daß die n letzten unter einander verschieden sind, und setzt man der Kürze wegen

$$\frac{\varphi(x-x_1) \cdot \varphi(x-x_2) \dots \varphi(x-x_n)}{\varphi(x-y_1) \cdot \varphi(x-y_2) \dots \varphi(x-y_n)} = \Pi x,$$

so daß man auch die Formel:

$$\Pi 0 = \frac{\varphi x_1 \cdot \varphi x_2 \dots \varphi x_n}{\varphi y_1 \cdot \varphi y_2 \dots \varphi y_n}$$

hat, so findet man durch Zerlegung dieses Bruchs in Partialbrüche, und nachheriger geeigneter Summation der letztern, folgende Formel:

$$\Pi 0 = \frac{1}{\varphi(\Delta)} \sum_1^n \overset{\cdot}{\Pi} y_k \cdot \frac{\varphi(y_k - \Delta)}{\varphi y_k},$$

in welcher der Kürze wegen

$$\Delta = y_1 + y_2 \dots + y_n - x_1 - x_2 \dots - x_n$$

gesetzt ist, durch den Punct über dem Multiplicationszeichen Π angezeigt werden soll, daß der Factor $\varphi(x - y_k)$ im Nenner des betreffenden Products auszulassen sei, und das Summenzeichen seine gewöhnliche Bedeutung hat, wonach

$$(1.) \quad \sum_1^n f x_k = f x_1 + f x_2 + \dots + f x_n \text{ ist.}$$

Aus dieser wichtigen Gleichung (1.) lassen sich schon die zahlreichsten Folgerungen ziehen und die brauchbarsten Entwicklungen bei den Anwendungen der elliptischen Functionen machen, weil in ihr die sämtlichen Reihenentwicklungen obengenannter Art concentrirt sind. Deshalb habe ich auch einen meiner ausgezeichnetesten Schüler, den Herrn Dr. *Dumas*, auf solche Entwicklungen aufmerksam gemacht, als er sich mit der Anwendung der *elliptischen Transcendenten* auf verschiedene *mechanische Probleme*, in der

Art wie *Jacobi* das Problem der Rotation eines Körpers um seinen Schwerpunkt behandelt hat, beschäftigte. Es ist ihm gelungen, jene Gleichung auf selbständige Weise zu finden, und er hat sie in seiner schönen Abhandlung *über die Bewegung des Raumpendels mit Berücksichtigung des Einflusses der Umdrehung der Erde um ihre Axe*, welche in ganz Kurzem publicirt werden wird, zu den interessantesten Anwendungen benutzt.

In dem Falle, welcher oben ausgeschlossen wurde, daß die Gröfsen

$$y_1, y_2, \dots y_n$$

nicht alle unter sich verschieden sind, kann man nach der in solchen Fällen üblichen Methode verfahren, indem man diese Gröfsen zuerst nur um unendlich wenig von einander verschieden annimmt, und nachher zur Grenze der Gleichheit übergeht.

Wenn z. B. die Gröfsen

$$y_1, y_2, \dots y_m,$$

unter einander gleich werden sollen, so kann man

$$(2.) \quad y_1 = y', \quad y_2 = y' + \varepsilon, \quad \dots \quad y_m = y' + (m-1)\varepsilon$$

setzen und diese Werthe in demjenigen Theil der Summe auf der rechten Seite der Gleichung (1.) substituiren, welcher sich auf diese m ersten Werthe erstreckt, also in dem Ausdrücke

$$(3.) \quad \frac{1}{\varphi \Delta} \sum_1^m \dot{\Pi} y_k \frac{\varphi(y_k - \Delta)}{\varphi y_k},$$

und dann die Grenze dieses Ausdrucks

$$\frac{1}{\varphi \Delta} \sum_1^m \dot{\Pi}(y' + (k-1)\varepsilon) \frac{\varphi(y' + (k-1)\varepsilon - \Delta)}{\varphi(y' + (k-1)\varepsilon)}$$

für $\varepsilon = 0$ suchen. Setzt man diesen Grenzwert an Stelle des Ausdrucks (3.) in der obigen Gleichung (1.), und in ihren übrigen Theilen:

$$y_1 = y_2 \dots = y_m = y',$$

so erhält man wieder eine richtige Gleichung. In dieser letztern kann man mit einer zweiten Gruppe von Werthen

$$y_{m+1} = y_{m+2} \dots = y_{m+m'} = y''$$

eben so verfahren, und auf solche Weise fortfahren, bis alle n Werthe

$$y_1, y_2, \dots y_n$$

erschöpft sind.

Die Anwendung dieser Methode auf die Gleichung (1.) giebt, wenn man sie geschickt ausführt, folgendes äußerst einfache und elegante Theorem:

„Das Product $\Pi O = \frac{\varphi x_1 \cdot \varphi x_2 \cdots \varphi x_n}{\varphi y_1 \cdot \varphi y_2 \cdots \varphi y_n}$ ist mit dem Aggregat

$$\frac{\varphi' 0}{\varphi \Delta} \sum_1^{n'} \left[\Pi(y^{(k)} + h) \frac{\varphi(y^{(k)} + h - \Delta)}{\varphi(y^{(k)} + h)} \right]_{h^{-1}}$$

übereinstimmend; wo n' die Anzahl der Gruppen von gleichen Größen ist, deren Werthe respective $y', y'', \dots y^{n'}$ sind, und wobei ich mich des Zeichens

$$[F'h]_{h^n}$$

für den Coefficienten von h^n in der Entwicklung der Function $F'h$ nach aufsteigenden ganzen Potenzen von h und der Bezeichnung

$$\frac{\varphi(x-x_1) \cdot \varphi(x-x_2) \cdots \varphi(x-x_n)}{\varphi(x-y_1) \cdot \varphi(x-y_2) \cdots \varphi(x-y_n)} = \Pi x$$

bediene. Man kann auch kürzer sich so ausdrücken, dafs das Summenzeichen sich nur auf die untereinander verschiedenen Werthe unter den Größen

$$y_1, y_2, \dots y_n$$

beziehen soll, so dafs man unter dieser Voraussetzung die Gleichung

$$(4.) \quad \Pi O = \frac{\varphi' 0}{\varphi \Delta} \sum^k \left[\Pi(y_k + h) \frac{\varphi(y_k + h - \Delta)}{\varphi(y_k + h)} \right]_{h^{-1}}$$

erhält.“

Um Dies zu beweisen, setze ich der Kürze wegen den Werth des Ausdrucks

$$(5.) \quad \frac{\varphi(x-x_1) \cdot \varphi(x-x_2) \cdots \varphi(x-x_n)}{\varphi(x-y_1) \cdot \varphi(x-y_2) \cdots \varphi(x-y_n)} \cdot (\varphi' 0)^m \cdot (x-y_1)(x-y_2) \cdots (x-y_m) \cdot \frac{\varphi(x-\Delta)}{\varphi x},$$

nach der Substitution der Werthe (2.), für $\varepsilon = 0$,

$$= P_m x,$$

und erhalte dann, wenn ich die in (2.) angegebenen Substitutionen in den oben bezeichneten Theil der Summe einführe, dessen Werth für $\varepsilon = 0$, welchen ich durch Y' bezeichne, nemlich:

$$Y' = (\text{Lim. für } \varepsilon = 0) \frac{1}{\varphi \Delta} \sum_1^n \left(\frac{(-1)^{m-k} P_m(y' + (k-1)\varepsilon)}{1 \cdot 2 \cdots (m-k) \cdot 1 \cdot 2 \cdots k-1} \right) \frac{1}{\varepsilon^{m-1} (\varphi' 0)^{m-1}},$$

oder was, wie man sieht, Dasselbe ist

$$Y' = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)} \frac{1}{\varphi \Delta} \frac{1}{(\varphi' 0)^{m-1}} \sum_1^m (-1)^{m-k} \frac{(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k-1} \frac{P(y' + (k-1)\varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}},$$

wenn man rechts den Grenzwert für $\varepsilon = 0$ nimmt.

Der unter dem Summenzeichen stehende Grenz-Ausdruck ist aber der Differentialquotient der Function $P y'$ nach y' , und man erhält daher den einfachen Ausdruck:

$$Y' = \frac{1}{\varphi \Delta} \frac{1}{(\varphi' 0)^{m-1}} [P(y' + h)]_{h^{-1}}.$$

Setzt man endlich den aus (5.) hervorgehenden Werth von

$$P(y' + h) = (\varphi' 0)^{m-1} h^m \Pi(y' + h) \frac{\varphi(y' + h - \Delta)}{\varphi(y' + h)}$$

in diese Formel, so ergibt sich die viel einfachere:

$$Y' = \frac{\varphi' 0}{\varphi \Delta} \left[\Pi(y' + h) \frac{\varphi(y' + h - \Delta)}{\varphi(y' + h)} \right]_{h^{-1}}.$$

Eben so erhält man aus der zweiten Gruppe gleicher Werthe, mit analoger Bezeichnung:

$$Y'' = \frac{\varphi' 0}{\varphi \Delta} \left[\Pi(y'' + h) \frac{\varphi(y'' + h - \Delta)}{\varphi(y'' + h)} \right]_{h^{-1}}$$

u. s. w., so dafs sich endlich durch Substitution dieser Ausdrücke in die aus der Bezeichnung sich ergebende Gleichung

$$\Pi 0 = Y' + Y'' \dots + Y^n$$

die obige Formel (4.) findet.

Wenn gleich die Ableitung, deren ich mich hier bedient habe, sehr einfach und elementar ist, so wird doch ihr Zusammenhang mit etwas allgemeineren Betrachtungen nicht überflüssig sein.

Zu dem Ende bemerke ich, dafs sie die einfache Folge aus folgendem, auch bei vielen andern Gelegenheiten nützlichen Theorem ist.

Wenn $f x$ eine sonst beliebige, aber nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$ entwickelbare Function von x ist, und φx eine andere, nach solchen Potenzen von x entwickelbare Function bedeutet, welche den Factor x , und zwar nur einmal enthält, so ist der Werth des Ausdrucks

$$\frac{f y_1}{\varphi(y_1 - y_2) \cdot \varphi(y_1 - y_3) \dots \varphi(y_1 - y_m)} + \frac{f y_2}{\varphi(y_2 + y_3) \cdot \varphi(y_2 - y_4) \dots \varphi(y_2 - y_1)} + \dots$$

$$\dots + \frac{f y_m}{\varphi(y_m - y_1) \cdot \varphi(y_m - y_2) \dots \varphi(y_m - y_{m-1})}$$

für den Fall, dafs man

$$y_1 = y, \quad y_2 = y + \varepsilon, \quad \dots \quad y_m = y + (m - 1) \varepsilon$$

setzt und die Grenze für $\varepsilon = 0$ nimmt:

$$(7.) = \left[\frac{f y + h}{(\varphi h)^m} \right]_{h^{-1}}.$$

Der Beweis dieses Theorems, welches in dem Falle, dafs $f x$ eine ganze rationale Function von x , und $\varphi x = x$ ist, wohl zuerst von *Lagrange* (*Mémoires de l'académie de Berlin 1792 — 93 p. 256*) mutatis mutandis ausgesprochen ist, folgt auf leichte Art aus der einfachen Bemerkung, dafs man diese Functionen, weil sie in convergirende Reihen genannter Art entwickelbar sind, als *ganze* Functionen ansehen kann.

Man betrachte nämlich das Aggregat der Partialbrüche des Ausdrucks

$$\frac{(\varphi'0)^m f x}{\varphi(x-y_1) \cdot \varphi(x-y_2) \dots \varphi(x-y_m)},$$

welcher von den Nennern $x-y_1, x-y_2, \dots, x-y_m$ abhängt, in doppelter Beziehung, sowohl wenn die Gröfsen y_1, y_2, \dots, y_m noch untereinander verschieden sind, als auch wenn sie alle der Gröfse y gleich gesetzt werden.

Setzt man, der bessern Bezeichnung wegen, für den Augenblick

$$\varphi x = x \varphi'0 \cdot \psi x,$$

so dafs $\psi 0 = 1$ ist, so wird das genannte Aggregat im ersten Fall:

$$(8.) \quad \frac{1}{(\varphi'0)^{m-1}} \left\{ \frac{f y_1}{\varphi(y_1-y_2) \cdot (y_1-y_3) \dots (y_1-y_m)} \cdot \frac{1}{x-a_1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{f y_m}{\varphi(y_m-y_1) \cdot (y_m-y_2) \dots (y_m-y_{m-1})} \cdot \frac{1}{x-y_m} \right\},$$

und im zweiten Fall, weil der obige Bruch die Form

$$\frac{f x}{(\varphi'0)^m (x-y)^m (\psi(x-y))^m}$$

annimmt:

$$\left[\frac{f y + h}{(\psi h)^m} \right]_{h^0} \frac{1}{(x-y)^m} + \left[\frac{f y + h}{(\psi h)^m} \right]_{h^1} \frac{1}{(x-y)^{m-1}} \dots + \left[\frac{f y + h}{(\psi h)^m} \right]_{h^{m-1}} \frac{1}{x-y}.$$

Dieser Ausdruck ist aber *identisch* mit folgendem:

$$(9.) \quad = \left[\frac{f y + h}{h^m (\psi h)^m} \cdot \frac{1}{x-y-h} \right]_{h^{-1}} = (\varphi'0)^m \left[\frac{f y + h}{(\varphi h)^m} \cdot \frac{1}{x-a-h} \right]_{h^{-1}}.$$

Setzt man nun in den beiden, für den Fall dafs man die Substitution (2.) in (8.) einführt und die Grenze für $\varepsilon = 0$ nimmt, einander gleichen Ausdrücken (8. u. 9.) die Coëfficienten von x^{-1} in ihren Entwicklungen nach fallenden Potenzen von x einander gleich, so hat man das vorstehende Theorem.

Setzt man hierin

$$f x = \Pi x \cdot \varphi(x-y_{m+1}) \dots \varphi(x-y_n),$$

so erfüllt diese Function, eben so wie die Function φx , welche oben definiert

wurde, die vorgeschriebenen Bedingungen des Theorems, und die wiederholte gehörige Anwendung des letztern führt dann ebenfalls auf die Gleichung (4.).

§. II.

Unter den unzähligen Anwendungen der Gleichung (4.) erlaube ich mir nur eine der einfachsten hier hervorzuheben und auszuführen; aber gerade diejenige, wodurch ihre große Bedeutung in der ganzen Theorie der elliptischen Functionen von selbst Jedem in die Augen fallen wird. Ich meine, daß die äußerst einfache Ableitung der Grund-Eigenschaften der elliptischen Transcendenten, und namentlich des Fundamentaltheorems aus ihr, es zugleich erklärlich macht, weshalb sie auch in den übrigen Theilen dieser Theorie eine wichtige Rolle spielt.

In der That: geht man von der obigen Definition der Function φx als unendliches Product aus, so folgen das Fundamentaltheorem, so wie die Hauptgrundformeln der Functionen $\vartheta\vartheta$ für zwei Argumente, aus dem einfachen Falle der Gleichung (4.), wenn nur zwei, und einander gleiche Werthe y_1 und y_2 darin stehen.

Um jedoch nicht später den Gang der Rechnung zu unterbrechen, werde ich aus dem, nur in etwas anderer Form geschriebenen Ausdruck für φx , nämlich:

$$\varphi x = 2q^{\frac{1}{4}} \sin x, \quad P(1 - q^{2h} e^{2ix})(1 - q^{2h} e^{-2ix}),$$

wobei ich mich des Zeichens

$$P(fq^h) \quad \text{für} \quad fq, fq^2, fq^3, \dots$$

bediene, folgende vier Grundformen dieser Function, so wie sie *Jacobi* eingeführt und bezeichnet hat, ableiten. Es folgen nämlich daraus die Formeln:

$$(10.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi x = 2q^{\frac{1}{4}} \sin x \cdot \Pi(1 - 2q^{2h} \cos 2x + q^{4h}), \\ \varphi(x + \frac{1}{2}\pi) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos x \cdot \Pi(1 + 2q^{2h} \cos 2x + q^{4h}), \\ \varphi(x + \frac{1}{2}i\log q) = -iq^{\frac{1}{4}} e^{ix} \cdot \Pi(1 - 2q^{2h-1} \cos 2x + q^{4h-2}), \\ \varphi(x + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i\log q) = -q^{\frac{1}{4}} e^{ix} \cdot \Pi(1 + 2q^{2h-1} \cos 2x + q^{4h-2}), \end{array} \right.$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist und $\log q$ den natürlichen Logarithmus der Größe q bedeutet. Setzt man nun ferner:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 x &= \varphi x \cdot \Pi(1 - q^{2h}), \\ \vartheta_2 x &= \varphi(x + \frac{1}{2}\pi) \cdot \Pi(1 - q^{2h}), \\ \vartheta_3 x &= iq^{\frac{1}{4}} e^{-ix} \varphi(x + \frac{1}{2}i\log q) \cdot \Pi(1 - q^{2h}), \\ \vartheta_4 x &= q^{\frac{1}{4}} e^{-ix} \varphi(x + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i\log q) \cdot \Pi(1 - q^{2h}), \end{aligned}$$

so ergeben sich aus den obigen Definitionen folgende bekannte Grundformeln:

$$(11.) \quad \begin{cases} \vartheta_1(x + \frac{1}{2}\pi) & = \vartheta_2 x, \\ \vartheta_1(x + \frac{1}{2}i\lg) & = -iq^{-\frac{1}{4}}e^{ix}\vartheta x, \\ \vartheta_1(x + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i\lg) & = q^{-\frac{1}{4}}e^{ix}\vartheta_3 x. \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung (4.)

$$\Pi x = \frac{\varphi(x-x_1)\varphi(x-x_2)}{(\varphi x - y)^2},$$

und für x_1, x_2, y , respective die drei Ausdrücke

$$y + x_1, \quad y + x_2, \quad y + \frac{1}{2}i\lg,$$

so geht dieselbe nach leichten, aus den Formeln (11.) abzuleitenden Reductionen in folgende über:

$$(12.) \quad \frac{\vartheta_1(y+x_1)\vartheta_1(y+x_2)}{(\vartheta y)^2} \\ = -\frac{1}{\vartheta'_1 0 \vartheta_1(x_1+x_2)} \left[\frac{\vartheta(x_1-h)\vartheta(x_2-h)\vartheta(y+x_1+x_2+h)}{\vartheta y + h} \right]_{h'};$$

woraus alle folgenden Formeln folgen.

Setzt man nämlich zuerst in dieser Gleichung $x_1 = x, x_2 = k - x$ und nimmt auf beiden Seiten den Coefficienten von k' in der Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von k , so erhält man, mit Benutzung der analogen Bezeichnung:

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)}{(\vartheta y)^2} = - \left[\frac{\vartheta(x-h)\vartheta(x-k+h)\vartheta(y+k+h)}{\vartheta'_1 0 \vartheta'_1 0 \vartheta y + h} \right]_{h'k'}.$$

Keht man hier die Reihenfolge der Entwicklungen um, so erhält man die Formel

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)}{(\vartheta y)^2} = - \left[\frac{\vartheta(x-h)}{(\vartheta'_1 0)^2} \frac{\vartheta(x+h)\vartheta'(y+h) - \vartheta(y+h)\vartheta'(x+h)}{\vartheta(y+h)} \right]_{h'},$$

oder endlich, nach Ausführung der angedeuteten Operation und nach leichter Reduction, folgende:

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)}{(\vartheta y)^2 (\vartheta x)^2} (\vartheta'_1 0)^2 = \frac{d\vartheta'x}{dx} - \frac{d\vartheta'y}{dy}.$$

Setzt man $E'x$ für $\frac{\vartheta'x}{\vartheta x}$, wie es *Jacobi* eingeführt hat, so geht die vorige Gleichung in

$$(13.) \quad \frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)}{(\vartheta y)^2 (\vartheta x)^2} (\vartheta'_1 0)^2 = E'x - E'y$$

über.

In derselben der Reihe nach für x ,

$$x = 0, \quad x = \frac{1}{2}\pi, \quad x = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i lq$$

gesetzt, ergeben sich die drei wichtigen Formeln:

$$(14.) \quad \begin{cases} \left(\frac{\vartheta'_0 0}{\vartheta_0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_y}\right)^2 = + E'0 - E'y, \\ \left(\frac{\vartheta'_0 0}{\vartheta_3 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta_y}\right)^2 = - E'\frac{1}{2}\pi + E'y, \\ \left(\frac{\vartheta'_0 0}{\vartheta_2 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta_y}\right)^2 = - E'(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i lq) + E'y. \end{cases}$$

Aus denselben folgen dadurch, dafs man die erste zu jeder der beiden letztern addirt, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vartheta'_1 0}{\vartheta_0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_y}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta'_1 0}{\vartheta_3 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta_y}\right)^2 &= E'0 - E'\frac{1}{2}\pi, \\ \left(\frac{\vartheta'_1 0}{\vartheta_0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_y}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta'_1 0}{\vartheta_2 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta_y}\right)^2 &= E'0 - E'(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i lq). \end{aligned}$$

Ohne (was übrigens keine Schwierigkeit macht) die einzelnen drei Werthe $E'0$, $E'\frac{1}{2}\pi$, $E'(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i lq)$ selbst zu bestimmen, kann man durch Einsetzung des besondern Werths $y = 0$, die Gleichungen in folgende umformen:

$$(15.) \quad \begin{cases} \left(\frac{\vartheta_3 0}{\vartheta_2 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_y}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta_y}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{\vartheta_2 0}{\vartheta_3 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_y}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta_y}\right)^2 = 1; \end{cases}$$

wodurch die bekannten lineären Relationen zwischen den Quadraten der drei Functionen

$$\left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_y}\right), \quad \left(\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta_y}\right), \quad \left(\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta_y}\right)$$

gefunden sind.

Substituirt man die Werthe von $E'y$ und $E'x$, welche sich aus der Gleichung (14.) ergeben, in die Formel (13.), so erhält man folgende Grundformeln für die Functionen ϑ_1 und ϑ :

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)(\vartheta'_0)^2}{(\vartheta_y)^2(\vartheta_x)^2} = \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_y}\right)^2 - \left(\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta_x}\right)^2,$$

und wenn man $y + \frac{1}{2}i lq$ statt y setzt:

$$(16.) \quad \frac{\vartheta(y+x)\vartheta(y-x)(\vartheta'_0)^2}{(\vartheta_y)^2(\vartheta_x)^2} = 1 - \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_y}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta_x}\right)^2.$$

Ferner substituirt man in der Gleichung (12.) für x_1 und x_2 die beiden Werthe

$$x \text{ und } \frac{1}{2}i\eta - x.$$

Dann erhält man, nach leichter Reduction, die Formel

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta(y-x)}{(\vartheta y)^2} \vartheta_0 \vartheta'_0 = \left[\frac{\vartheta(x-h)\vartheta_1(x+h)\vartheta_1(y+h)}{\vartheta(y-h)} \right]_h,$$

oder, nach Bestimmung des Entwicklungscoefficienten:

$$(17.) \quad \frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta(y-x)}{(\vartheta y)^2(\vartheta x)^2} \vartheta_0 \vartheta'_0 = \frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y} \frac{d\left(\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}\right)}{dx} + \frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x} \frac{d\left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)}{dy}.$$

Setzt man hierin zuerst $y = x$, und dann $x = \frac{1}{2}\pi$, so erhält man, da $\vartheta_1 \pi = 0$ ist, auch

$$\frac{d\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}}{dx} = 0,$$

wenn darin $x = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt wird. Setzt man daher in derselben Gleichung (17.) $x = \frac{1}{2}\pi$, so erhält man die sehr wichtige Gleichung

$$(18.) \quad \frac{d\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}}{dy} = \frac{\vartheta'_0 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_3} \cdot \frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y} \cdot \frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y},$$

welche den Differentialquotienten der Function $\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}$ als ein Product der beiden Functionen $\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}$ und $\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}$ und einer Constante darstellt.

Wenn man endlich die beiden Seiten der Gleichung (17.) durch die respectiven Glieder der Gleichung (16.) dividirt, nachdem man in jener rechts die Differentialquotienten:

$$\frac{d\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}}{dx}, \quad \frac{d\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}}{dy},$$

mittels der Formel (18.) durch die Functionen $\frac{\vartheta_2 x}{\vartheta x}$, $\frac{\vartheta_3 x}{\vartheta x}$, $\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}$, $\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}$ ausgedrückt hat, so gelangt man zu der Formel

$$\frac{\vartheta_2 \cdot \vartheta_3}{\vartheta_0 \cdot \vartheta'_0} \frac{\vartheta_1(y+x)}{\vartheta(y+x)} = \frac{\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y} \frac{\vartheta_2 x}{\vartheta x} \frac{\vartheta_3 x}{\vartheta x} + \frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x} \frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y} \frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}}{1 - \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}\right)^2},$$

welche das gesuchte Additionstheorem für die Function $\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}$ in sich schließt

und auf folgende Art in die, in den „Fundamenten“ (§. 18.) zuerst gegebene Form übergeht.

Die Gleichungen (15. u. 18.), verbunden mit der Natur der Function $\vartheta_1 y$ gestatten, dafs man:

$$\frac{\vartheta_3 0}{\vartheta_0} \frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x} = \sin \operatorname{am} \frac{2h'x}{\pi},$$

$$\frac{\vartheta 0}{\vartheta_2 0} \frac{\vartheta_2 x}{\vartheta x} = \cos \operatorname{am} \frac{2h'x}{\pi},$$

$$\frac{\vartheta 0}{\vartheta_3 0} \frac{\vartheta_3 x}{\vartheta x} = \mathcal{A} \operatorname{am} \frac{2h'x}{\pi}$$

setzt, wenn $\frac{\vartheta_2 0}{\vartheta_3 0} = \sqrt{k}$ und $\frac{\vartheta_3 0 \vartheta_1' 0}{\vartheta 0 \vartheta_2 0} = \frac{2h'}{\pi}$ angenommen wird. Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichung, so geht dieselbe unmittelbar in die erste Formel des (§. 18.) der „Fundamente“ über.

Die Idee, aus den Eigenschaften der Functionen $\vartheta\vartheta$ zu dem Additionstheorem der elliptischen Functionen zu gelangen, ist bekanntlich auch zuerst von *Jacobi* aufgestellt, und zwar aus den Reihen-Entwickelungen der einzelnen vier Functionen selbst, durch die einfachsten Betrachtungen abgeleitet worden. In der Folge haben verschiedene Mathematiker diesen Weg zur Begründung der Theorie benutzt; doch glaube ich, dafs die Herleitung jenes Fundamentaltheorems aus der Gleichung (4.), oder einer ihr ähnlichen, bisher nicht gemacht ist, und bemerke nur noch, dafs ich mich jeder nähern und weitem Ausführung enthalten habe, da mein Zweck hier nur war, zu zeigen, wie im beinahe einfachsten Fall der Gleichung (5.) dies wichtige Theorem enthalten ist.

Königsberg, im August 1854.