Dr. M. Foster und Dew-Smith¹⁾ sagen in ihrer Arbeit folgendes: „As in *Sepia*, so in *Aplysia*, no nerve could be found, stimulation of which would cause direct inhibition of the heart“. In meiner Arbeit über „Muskeln und Nerven des Herzens bei einigen Mollusken“ steht folgendes: „Reizt man mit dem Inductionsstrom das Branchialganglion, das bei *Aplysia* in der Nähe des Herzens liegt, so tritt eine Beschleunigung der Herzcontractionen ein; ein gleich starker Inductionsstrom an die Vorhöfe applicirt, hat Herzstillstand in der Diastole zur Folge“.

Was endlich die Wirkung verschiedener Stromstärken auf das Herz anlangt, so ist mir dieser Umstand sehr wohl bekannt und werde ich darauf in meiner Arbeit über die nächsten Ursachen der rhythmischen Herzcontraction näher eingehen.

Zum Schluss muss ich bei der von mir ausgesprochenen Ansicht über die Structur und Function des Molluskenherzens bleiben, da die Einwürfe von M. Foster und Dew-Smith nichts Neues bieten, bin aber gerne bereit, meine Ansicht aufzugeben, wenn die geehrten Collegen mich eines besseren belehren.

Zur höheren Geweblehre.

Von

G. Valentin.

Erste Abtheilung.

Wie die Sternkunde aus einem niederen beschreibenden Theile, der Uronagraphie, und einem höheren, der theoretischen oder mathematischen Astronomie oder der Anwendung des Schwere-

1) On the Behaviour of the Hearts of Mollusks under the Influence of Electric currents, by Dr. M. Foster and G. Dew-Smith (From the Proceedings of the Royal Society, No. 160. 1875).

gesetzes auf dem Weltall besteht, so wird sich etwas Aehnliches früher oder später für die übrigen Zweige der Naturwissenschaften, also auch für die Lehre von den Pflanzen- und den Thiergeweben wiederholen. Obgleich mehr als ein Jahrzehent verflossen, seitdem ich einige elementare und daher auch unvollkommene Sätze der höheren Geweblehre veröffentlichte¹⁾, so hat sich doch bis jetzt, so viel ich weiss, kein Nachfolger, der den Gegenstand weiter führte, gefunden. Man darf sich auch keinen trügerischen Hoffnungen auf diesem Gebiete hingeben. Die z. Thl. den höchsten Zweigen der angewandten Mathematik angehörenden Leistungen von Thomas Young, Navier, Poisson, Cauchy, Fr. Neumann und dessen Schülern, wie Waldemar Voigt und G. Baumgarten, die von Lamé, St. Venant, Kirchhoff, O. L. Meyer und dessen Schülern, wie K. Lasswitz und P. Schmidt, endlich die von Sohneke über Cohäsion und Adhäsion, über Elasticität und Krystallisation, so wie die einzelne dieser Arbeiten in neuer Form wiedergebenden und sie z. Thl. fortsetzenden Abhandlungen von Holtzmann und Wand haben es noch nicht möglich gemacht, die verschiedenen Arten der in der Natur vorkommenden Körpergestalten aus erfahrungsgemäss gegebenen oder theoretisch wahrscheinlichen Grund- und hinzutretenden Nebenbedingungen mathematisch herzuleiten. Jene Forscher wählten übrigens häufig verschiedene Ausgangspunkte für eine und dieselbe Erscheinung. Sie wandten in der Regel Integrationen, also Summationen unendlich vieler, stetig sich ändernder unendlich kleiner Grössen statt der Summirung unstätiger Werthe an, ohne desshalb die Vorstellung geschiedener, durch leere Zwischenräume getrennter Atome oder Molecüle fallen zu lassen²⁾, oder sie setzten umgekehrt eine Stätigkeit der Massentheilchen voraus, aus der sich andere, gleichzeitig auftretende physikalische Erscheinungen nicht erklären.

1) Die physikalische Untersuchung der Gewebe. Leipzig und Heidelberg. 1867. 8. S. 66—166.

2) Siehe z. B. die Bemerkungen von Poisson in seinem *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*. *Mémoires de l'Institut de France*. Tome VIII. Paris 1828. 4. p. 359. 400. Die Ansicht, dass eine solche Integration nur zulässig sei, wenn das Molecül vier regelmässig gestellte Atome enthalte, suchte W. Gosiewski in Schlömilch und Cantor's Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. XXI. Leipzig. 1876. S. 116—125 zu erhärten.

Die Versuche, die Arbeitsleistungen der chemischen Thätigkeit der Wahlverwandschaft und deren thermische Wirkungen näher zu begründen¹⁾, die Bemühungen von Cayley und H. Schiff²⁾, die Anzahl der möglichen organischen Verbindungen der Grundkörper durch anatyisch-combinatorische Schlüsse festzustellen, wie es dieser nennt, eine chemische Statistik zu liefern, können nur als die erfreulichen Vorläufer einer künftigen, tieferen Auffassung der chemischen Thätigkeiten angesehen werden. Eine wahrhaft höhere Begründung derselben ist zur Zeit nicht möglich.

Nur derjenige Theil der Naturerkenntniss, dessen Erfahrungsergebnisse aus gewissen wahrscheinlichen Grundannahmen mittelst der mathematischen Zeichensprache vollständig hergeleitet werden können, entspricht dem Endziele, das sich der Forschergeist stellen muss. Sollte es einst gelingen, die Anziehungs- und Druckerscheinungen, aus denen die mannigfachen Formelemente der organischen Gewebe hervorgehen, in dieser Weise aufzufassen, so wird sich auch auf die Bedingungen, die ihre zeitlichen Veränderungen herbeiführen, ihre Beständigkeit trotz des Wechsels der äusseren Einflüsse möglich machen oder ihren Zerfall und ihren endlichen Untergang zur Folge haben, zurück schliessen lassen. Man könnte aber dann auch eine Anzahl der feinsten Fragen der Theorien der Entwicklung und der Ernährung unmittelbar beantworten. Die höhere Geweblehre wäre auf diese Art nicht bloss eine morphologische Wissenschaft im erhabensten Sinne, sondern auch ein wesentliches Glied der physiologischen Erkenntniss.

Da unsere Sinne und unsere Untersuchungsmittel nur bis zu einer gewissen Grenze reichen, so kann es sich ereignen, dass unser geistiges Auge Eigenschaften und Beziehungen mit Sicherheit erkennt, die unser körperliches weder unmittelbar, noch von physikalischen oder chemischen Hilfsmitteln unterstützt wahrzunehmen im Stande ist. Wir werden schon in dem ersten Abschnitte dieser Arbeit einem Beispiele der Art begegnen.

1) Siehe z. B. A. Naumann, Grundzüge der Thermochemie. Braunschweig. 1869. 8. S. 81—150. Vgl. auch W. Stille, Ueber die Bestimmungsart von Arbeitsleistungen chemischer Kräfte. Göttingen 1865. 8. S. 25—32. Ueber die Theorie von A. Walter, s. Korteweg in der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. XXII. 1877. S. 93—106.

2) H. Schiff in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. 1875. S. 1542—1547.

Die Unvollkommenheit unserer Sinneswerkzeuge führt uns nicht selten zu sachlich irrthümlichen, wenn auch erfahrungsmässig richtigen Beobachtungen. Der allgemeinste Fall der Doppelbrechung z. B. entsteht dadurch, dass die Theilchen in ungleichen gegenseitigen Entfernungen nach drei Hauptrichtungen des Raumes liegen. Wir wollen ein Individuum diejenige Anhäufung derselben nennen, in welcher die benachbarten Gruppen so gleichartig gelagert sind, dass jede der beiden hieraus sich ergebenden Achsen einfacher Brechung oder eine jede der zwei optischen Achsen in einer und derselben geraden Linie verläuft. Besteht ein Gewebe aus solchen Individuen von makroskopischer oder zwar mikroskopischer, aber immer noch mit Hilfe von Vergrösserungen kenntlicher Grösse, so werden wir eine Doppelbrechung unmittelbar oder durch einzelne, leicht zu findende Kunstgriffe erkennen, es mögen alle optischen Achsen paarweise in derselben geradlinigen Fortsetzung verlaufen oder nicht. Sind aber die einzelnen Individuen so klein, dass die Gesichtswinkel ihrer Durchmesser unter der Grösse des selbst mit Hilfe von Mikroskopen herzustellenden kleinsten Winkels der Art liegen und befinden sich ihre optischen Achsen auf das Mannigfachste gegen einander verworfen, so werden wir das Ganze für einfach brechend halten, obgleich es in Wahrheit doppelt brechend ist. Wir können daher z. B. nur sagen, dass uns die Blutkörperchen und die Ganglienkugeln eine einfache Brechung zeigen, nicht aber dass sie es wahrhaft sind. Bedenken wir, dass die Ganglienkugeln des centralen Nervensystems die höchsten und am Feinsten abgestuften Thätigkeiten des thierischen Körpers vermitteln, so wäre die Annahme nicht ganz unwahrscheinlich, dass ihre einfache Brechung nur eine scheinbare sei, weil eben ihre Theilchen bis auf das Einzelste verschieden ausgearbeitet und daher auf das Mannigfachste gestellt sind, weil die Vielseitigkeit der Orientirung derselben bis zu Individuen, die längst unter dem Werthe unseres selbst künstlich vergrösserten Gesichtswinkels liegen, hinabgeht. Die scheinbare einfache Brechung wäre dann ein Zeichen der höchsten Ausbildung und keine Unvollkommenheit in Vergleich zu den meisten übrigen Gewebtheilen.

Solche Erscheinungen können uns auch bei Erklärungsversuchen stören. Wenn z. B. die Chromsäure die Doppelbrechung der Gewebe häufig aufhebt, wenn auch bisweilen quergestreifte Muskelfasern einfach brechend erscheinen, nachdem sie Jahre lang

in Glycerin gelegen, so bleibt es immer unentschieden, ob man hier den Uebergang zu einer nach allen Raumesrichtungen gleichartigen Anordnung der Theilchen hat oder nur eine scheinbare einfache Brechung durch Verwerfung der optischen Achsen aller, wegen allzugrosser Kleinheit des Gesichtswinkels nicht mehr gesondert kenntlichen Individuen hergestellt worden.

Die einzelnen Nummern dieser Abhandlungen werden einiges Neue liefern, das z. Thl. auf mathematischen Herleitungen beruht. Ich lasse aber diese, wo es irgend möglich ist, hinweg und gebe nur die in Worten ausdrückbaren Ergebnisse, um allgemeiner verständlich zu bleiben.

1. Doppelbrechung unendlich dünner Oberflächenschichten.

Segner, Monge und Thomas Young¹⁾ schlossen aus theoretischen Gründen, dass die oberflächlichste Schicht einer in einem Haarrohre gehobenen oder gesenkten Flüssigkeit eine andere Spannung, als die übrige Masse der tropfbar flüssigen Säule besitzt. Poisson²⁾ hielt die Dichtigkeitsänderung jener Lage, so weit sie der nur in unendlich kleiner Entfernung merklichen, in jeder endlichen dagegen verschwindenden Molecularwirkung entspricht, für so wesentlich, dass er die von Laplace und Gauss aufgestellten Theorien der Haarröhrchenanziehung für ungenügend erklärte, weil in ihnen jener veränderte Dichtigkeitszustand der Oberflächenschicht nicht beachtet worden. Obgleich er sie aber bei seinen Herleitungen berücksichtigte, so kam er doch schliesslich zu ähnlichen, ja im Wesentlichen zu denselben Formeln, wie jene beiden Mathematiker. Holtzmann³⁾ und Lamarle⁴⁾, suchten später ebenfalls jene Dichtigkeitsänderung auf verschiedenen Wegen

1) Th. Young, Philosophical Transactions for the Year 1805. P. I. London 1805. 4. p. 65. 66.

2) S. D. Poisson, Nouvelle Théorie de l'action capillaire. Paris. 1831. 4. p. 26—45.

3) K. Holtzmann, Ueber die Theorie der Erscheinungen der Capillarität. Stuttgart. 1861. 4. S. 4 und 8.

4) E. Lamarle, Sur la stabilité des systèmes liquides des lames minces. Mémoires de l'académie du Bruxelles. Tome XXXV. Bruxelles. 1865. 4. p. 18. 19.

theoretisch zu begründen. Bède¹⁾ dagegen bemühte sich, nachzuweisen, dass sie nicht den bedeutenden Einfluss auf die Erscheinungen der Haarröhrchenwirkung ausübe, den man ihr zugeschrieben, und dass die Darstellungen von Laplace und Gauss der von Poisson vorzuziehen seien.

Dieser letztere Geometer²⁾ nahm an, dass jede in dem Inneren einer gleichartigen Flüssigkeit befindliche Schicht in demselben Maasse von den ihr benachbarten Lagen und zwar von der unteren von unten nach oben und von der oberen von oben nach unten gedrückt werde. Befindet sie sich aber der Oberfläche so nahe, dass die Entfernung von dieser innerhalb der Grenzen der nur bis zu einem unmerklichen Abstände thätigen Molecularkräfte reicht, so ist der von oben nach unten wirkende Druck schwächer, als der in entgegengesetzter Richtung arbeitende. Die Dichtigkeit nimmt daher innerhalb dieser äussert dünnen Lage nach einem unbekannten Gesetze ab und erreicht ihren kleinsten Werth in der Oberfläche selbst. Sie wechselt noch ausserdem in der Nähe der Haarröhrchenwand, so weit der merkliche Einfluss der Anziehung oder der Abstossung der festen Masse von dieser auf die Flüssigkeit wirkt.

Obgleich man³⁾ die Dichtigkeitsabnahme als eine selbstverständliche Folge der Cohäsionskräfte ansuchen suchte, so liesse es sich doch auch denken, dass diese das Entgegengesetzte unter bestimmten Nebenbedingungen herbeiführten. Beschreiben wir eine Kugel um ein als Mittelpunkt dienendes, tief im Innern der einfach brechenden Flüssigkeit liegendes Theilchen mit einem beliebigen Halbmesser, jedoch so, dass sie nicht nur die Flüssigkeit nicht überschreitet, sondern sogar die Oberflächenschicht von der Dicke der Molecularwirkung nicht erreicht, so steht jedes der Theilchen von dem benachbarten um gleich viel ab, weil die Grössen der wechselseitigen Anziehung und Abstossung in der radialen Richtung eines jeden Halbmessers und der tangentiellen einer jeden concentrischen Lage, einer jeden Niveauschicht, einer jeden Lage gleichen Druckes und gleichen Potentials dieselben sind. Grenzt aber die

1) E. Bède, Recherches sur la Capillarité. Mémoires couronnés de l'Académie du Bruxelles. Tome XXX. 1858—61. Bruxelles. 1861. 4. p. 47.

2) Poisson a. a. O. p. 5. 6.

3) V. v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik. Dritte Abtheil. Braunschweig. 1873. 8. S. 471.

Flüssigkeit an einen Körper, der ihren Zusammenhang nicht zu stören sucht, also an einen solchen geringerer Anziehung, so müsste eine Verdichtung an der Oberflächenschicht eintreten, weil eine grössere Anziehung nach innen als nach aussen thätig wäre. Nur ein gleich starkes Wachsthum der Abstossung könnte dieses beseitigen. Young¹⁾ nimmt an, dass diese überhaupt in einer geringeren Entfernung, als die Anziehung Null werde, dass also die Letztere einen grösseren Wirkungskreis besitze. Wäre dieses der Fall, so hätte man in der Nähe der Oberfläche Theilchen, die sich nur anzögen und daher die Masse verdichteten, während diese Wirkung in der Tiefe durch die Gleichheit der allseitigen Einflüsse aufgehoben würde.

Dem sei, wie ihm wolle, so würde die negative oder die positive Dichtigkeitsänderung keine Doppelbrechung erzeugen, wenn die Ab- oder die Zunahme der gegenseitigen Entfernungen der Theilchen nach allen Raumesrichtungen hin gleich wäre. Dieses findet aber in unserem Falle nicht Statt, weil die ursprüngliche ungehinderte Wirkung senkrecht oder radial dahingeht, die tangentiellen Beziehungen dagegen wegen der gleichartigen Beeinflussung von Theilchen auf Theilchen entweder unverändert bleiben, oder in anderer Weise, als die radiale wechseln. Hieraus folgt, dass sich eine negative oder positive Doppelbrechung herstellen wird, je nachdem sich die Theilchen radial mehr oder weniger gegenseitig entfernen, als tangentiell. Dieser Schluss gilt nicht bloss für die Oberfläche einer in einem Haarröhrchen enthaltenen Flüssigkeit, sondern auch für jeden scharf begrenzten Körper überhaupt²⁾. Wir gelangen daher zu dem Satze:

Wird eine einfach brechende Masse von einer anderen, ihr ungleichen umgeben und begrenzt, so besitzt die der unendlich kleinen Dicke der Moleculwirkung entsprechende Oberflächenschicht eine den Bedingungen der Doppelbrechung entsprechende Anordnung der Theilchen, wenn die Verschiedenheit der radialen und der tangentiellen Abstossungs- und Anziehungswirkungen jede Ausgleichung zu allseitig gleichen Stellungsentfernungen hindert.

1) Young a. a. O. p. 203.

2) Poisson (*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés. Mémoires de l'Institut. Tome XVIII. Paris. 1842. 4. p. 15*) sagt schon mit Recht: *Tous les corps sont terminés par une couche d'épaisseur insensible ou la densité varie très rapidement et suivant des lois inconnues dans le sens de cette épaisseur.*

Die doppelt brechende Lage ist natürlich unendlich dünn. Sie besteht aus einer Anzahl von Schichten, deren Dichtigkeitsänderung von aussen nach innen abnimmt, und gehört zu denjenigen oben erwähnten Gebilden, die nur das geistige Auge erkennt, das körperliche hingegen nie wird wahrzunehmen im Stande sein. Denn würden auch unsere Hilfsmittel, die Doppelbrechung zu erkennen, noch so sehr vervollkommen, so werden sie doch immer für eine Lage, deren Dicke die Grenze des unendlich Kleinen nicht überschreitet, unzureichend bleiben. Bedenkt man überdies, wie schwach äussere Druckkräfte auf die Dichtigkeit tropfbarer Flüssigkeiten wirken, und wie sie noch viel weniger die festen Körper beeinflussen, so lässt sich eine nur sehr geringe Stellungsänderung der Theilchen, also eine überaus schwache Doppelbrechung erwarten. Man muss sich aber hüten, die Farbenringe, welche Luftblasen und Tropfen von Oel oder anderen Flüssigkeiten auf dem schwarzen und vorzüglich auf dem gefärbten Grunde des Polarisationsmikroskops zeigen, mit dem hier behandelten Gegenstande in Beziehung zu bringen, da sie aus Interferenzen hervorgehen, die mit der betrachteten Dichtigkeitsänderung Nichts zu thun haben.

2. Isoperimetrische Gestalten.

Fermat¹⁾ führte schon die Brechung des Lichtes auf eine Maximum-Minimumaufgabe zurück, indem er von der Annahme ausging, dass ein in dem einfallenden Strahle gelegenes Theilchen zu einem in dem gebrochenen befindlichen Orte auf kürzester Bahn und daher auch bei gleichförmiger Geschwindigkeit in kürzester Zeit gelangt. Denn, fügt er hinzu²⁾, nach meinem Principe wandelt die Natur immer durch die kürzesten Wege. Euler³⁾ behauptete seiner teleologischen Naturanschauung gemäss, dass sich eine jede der mathematischen Analyse zugängliche Aufgabe der Naturwissenschaften auf zweierlei Arten werde lösen lassen, unmittelbar, indem man die wahren Ursachen als Ausgangspunkt nimmt, dann aber auch vermöge der Allem zum Grunde liegenden

1) *Varia opera mathematica* D. Petri de Fermat. Tolosae. 1679. fol. p. 158—160.

2) *Ebendas.* p. 158.

3) L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.* Lausannae et Genevae. 1744. 4. p. 295. 296.

Zweckmässigkeit mittelst entsprechender Maximum- oder Minimumgleichungen. Können wir auch nicht mehr diese letztere Ursache dem gegenwärtigen Standpunkte der Naturwissenschaften nach als richtig betrachten, so ist es doch im höchsten Grade wahrscheinlich, dass jeder Uebergang aus einem Zustande in den andern, also jede physikalische oder chemische Veränderung auf möglichst kürzestem Wege, unter möglichst kleiner Ablenkung, also mit grösstmöglicher Ausnutzung der gegebenen Nebenbedingungen erfolgt. Das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges, das man auch für die Lösung einer Reihe mechanischer Aufgaben benutzt hat¹⁾, obgleich es nicht gerade auf die kürzeste Weise zum Ziele führt, dürfte nur einen untergeordneten Einzelfall jener allgemeinen Grundbeziehung aussprechen. Man wird daher auch in der organischen Welt Thätigkeiten und Thätigkeitserzeugnisse finden, deren mathematische Behandlung in das Gebiet der gewöhnlichen Grössten und Kleinsten oder in das der Variationsrechnung gehört. Die unter diesen Verhältnissen erzeugten Formen werden bisweilen isoperimetrischen Gestalten im engeren oder weiteren Sinne entsprechen.

Die Kugel als derjenige Körper, der einen grössten Rauminhalt unter kleinster Oberfläche einschliesst²⁾ und sich auch als annehmbare oder als unpassende Lösung vieler isoperimetrischer Aufgaben ergibt und die Bewegungen in Schraubenlinien als der kürzesten, doppelt gekrümmten Bahn zwischen zwei von einander abstehenden Punkten, bilden wahrscheinlich nicht die einzigen Folgen solcher unter jenem Gesichtspunkte aufzufassenden Wirkungen. Coordinatenmessungen der Gewebelemente nach drei Hauptrichtungen des Raums³⁾ werden wahrscheinlich noch viele andere hierher gehörende Gestaltbeziehungen kennen lehren. Wir wollen uns zunächst auf die Kugel beschränken und nur einiges Andere als Ergänzung hinzufügen.

Centralkräfte erzeugen eine nach einer bestimmten, als Mittelpunkt anzunehmenden Stelle gerichtete Beschleunigung, die

1) A. Buckendahl, Ueber das Princip des kleinsten Zwanges von Gauss. Göttingen 1873. 8. 38—81.

2) Eine elementare Herleitung dieser Eigenschaft der Kugel, siehe z. B. bei K. H. Schellbach, mathematische Lehrstunden. Berlin 1860. 8. S. 153.

3) Die physikalische Untersuchung der Gewebe. S. 73.

eine Funktion des Abstandes eines jeden thätigen Theilchens von diesem Mittelpunkt, also eine solche der den Mittelpunkt zum Anfangspunkte habenden geradlinigten und rechtwinkligen Coordinanten bildet. Eine vollkommene, daher von aller inneren und äusseren Adhäsion und jeder inneren Reibung freie Flüssigkeit, wie sie höchstens annähernd in der Wirklichkeit vorkommt, erfüllt jene Bedingungen vermöge der Cohäsionskräfte. Dieses führt aber zu einer einfachen mathematischen Herleitung¹⁾, nach welcher eine solche im Gleichgewichte ihrer Molecularkräfte befindliche Flüssigkeit eine Kugelgestalt im Freien annimmt, wenn keine anderen Kräfte auf sie wirken. Ihr Gleichgewicht ist stabil. Dasselbe wiederholt sich für den Fall, dass sie einen kugelförmigen festen Kern von grösserer Dichtigkeit, als die ihrige, allseitig bedeckt und von ihrer eigenen Anziehung und der der festen Masse bestimmt wird²⁾. Wir haben aber eben gesehen, dass die Kugel, die schon von Pappus angegebene Eigenschaft besitzt, eine in sich geschlossene Oberfläche als Umdrehungsfläche darzubieten, die ein Kleinstes im Verhältniss zu dem von ihr umfassten Rauminhalte darstellt³⁾, für welche also dieser ein Grösstes ist. Sie selbst oder wenigstens ihr nahe stehende Formen kommen unter den organischen Gewebtheilen häufig vor. Hier gilt also der allgemeine Satz:

Ein jedes kugelhähnliche Gewebe besitzt eine im Verhältniss

1) Siehe z. B. L. Euler. Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper. Uebersetzt von H. W. Brandes. Leipzig 1806. 8. S. 69. 70. H. W. Brandes: Lehrbuch der Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung freier und flüssiger Körper. Thl. I. Leipzig 1817 8. S. 244. A. Kunzeck: Studien aus der höheren Physik. Wien 1836. 8. S. 255. 256. H. Resal, Théorie élémentaire de Mécanique citeste. 1865. 8. p. 190. (wenn $k = 0$.)

2) A. Giesen, Ueber die Stabilität des Gleichgewichts einer nur der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit. Bonn 1873. 4. Andere Fälle siehe Giesen, Zeitschrift für Physik und Mathematik. Jahrgang 21. Leipzig 1876. 8. S. 471—72. Jahrg. 22. 1877. 311—324 und 332—335. J. Hagen, ebendas. 5. 65—86. L. Matthiessen, Jahrg. 16. 1871. S. 290—323.

3) Anschauliche Zahlenbeispiele in Vergleich zu dem Tetraëder, der Kugel, dem Würfel, dem Octaëder, dem archimedischen Cylinder, dem Dodekaëder, der kugelförmigen Spindel und dem Ikosaëder, siehe bei S. Lhuillier, De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometricae consideratae sive de maximis et minimis. Pars. I. Varsaviae 1782. 4. p. 172.

zu seiner Masse um so kleinere, nur von den Raumbeziehungen abhängige Oberflächenthätigkeit, je mehr es sich der mathematischen Kugelgestalt nähert. Dasselbe gilt auch für einen von einer Kreisfläche begrenzten Kugelabschnitt¹⁾.

Wir werden später sehen, dass sich besondere Begünstigungsmittel der Oberflächenvergrösserung in den abgeplatteten rothen Blutkörperchen geltend machen. Ihnen gegenüber befinden sich die weissen Körperchen oder die Lymphkörperchen des Blutes und die cytoiden Körperchen überhaupt in dieser Hinsicht im Nachtheil. Sie erreichen aber nicht die möglich ungünstigste Beziehung ihrer Oberfläche, wenn diese Unebenheiten darbietet, also grösser als die der mathematischen Kugel gleichen Durchmessers ausfüllt. Gehen im Embryo des Menschen und der Säugethiere die allerersten kugelähnlichen Blutkörperchen in platte gefärbte über, so vergrössert dieses zugleich ihre Oberfläche im Verhältniss zu ihrem Rauminhalte und macht sie daher zum Gasaustausche geeigneter, insofern dieser nur von geometrischen Beziehungen abhängt. Verwandeln sich die ursprünglich kugelähnlichen Anlagen der Hornzellen allmählich in polyedrische Zellen, so gewinnen sie eine verhältnissmässig grössere Oberfläche die eine innigere, weil ausgedehntere Verbindung durch einen Kitt möglich macht. Dasselbe gilt noch mehr für die Umwandlung der ursprünglichen runden Bildungszellen des Haarschaftes in Rindenblättchen oder der des Nagels in Nagelzellen, weil hier die grosse Verdünnung der Gewebetheile die verhältnissmässige Oberfläche in höherem Grade vergrössert.

Man kann sich die Stärke der Anziehung, welche eine kugelförmige, gleichartige oder aus gleichartigen Kugelschichten desselben Mittelpunktes bestehende Masse nach aussen hin ausübt, als in ihrem Mittelpunkte vereinigt denken. Es ist daher gestattet, den Fall, in welchem ein solches Gebilde umgebende Massen zu sich führt, demjenigen gleichstellen, in welchem die anziehende Kraft von einem mathematischen Punkte oder einem als unendlich klein anzusehenden Körper ausgeht. Ist sie, so wie der ihr entgegengesetzte Widerstand nach allen Raumesrichtungen gleich, so wird das durch die Massenvergrösserung erzeugte neue Gebilde

1) Lhuillier, De relatione mutua capacitatis et terminorum Figurarum sive de Maximis et Minimis. Pars prior. Varsaviae 1782. 4. p. 177.

die Kugelform annehmen. Erzeugt sich hingegen eine andere Gestalt, so werden wir schliessen, dass die Resultante der Anziehung und des Widerstandes in der Richtung des kürzesten Durchmessers ein Grösstes und in der des längsten ein Kleinstes war. Wir müssen diesen Massstab der Beurtheilung immer zum Grunde legen, wenn sich pflanzliche oder thierische Zellen nach einer Richtung mehr, als nach der anderen durch Massenwachsthum vergrössern, sich also z. B. das pflanzliche Merenchym in elliptisches Zellgewebe oder thierische Bildungszellen in Zellenfasern durch die Aufnahme neuer Substanz und nicht durch Ausdehnung der schon vorhandenen verwandeln. Man darf aber nicht allgemein schliessen, dass die Eigenthümlichkeit, eine im Verhältniss zum Rauminhalte kleinste Oberfläche darzubieten, in diesem Falle nothwendiger Weise verloren geht. Wir werden sehen, dass es denkbar bleibt, dass Gestalten, welche diese Eigenschaft besitzen, aus jener Umwandlung hervorgehen. Die Erfahrung scheint aber anzudeuten, dass dieses streng genommen nie der Fall ist. Wir können deshalb auch den Satz aussprechen:

Die Umwandlung eines ursprünglich kugeligen Gewebtheiles in einen anders gestalteten zieht wahrscheinlich immer eine verhältnissmässige Vergrösserung der Oberflächenthätigkeit, so weit diese nur von den geometrischen Beziehungen abhängt, nach sich.

Die Dottertheilung des Eies, deren Erzeugnisse den Druckfiguren, wie ich schon an einem anderen Orte erläuterte¹⁾, ähnlich sind, lässt sich als Folge solcher Anziehungserscheinungen, also unter einem anderen Gesichtspunkte, als es bisher geschah, auffassen. Man pflegte bis jetzt die Furchenbildung als das Ursprüngliche, als den Ausgangspunkt der ganzen Veränderung anzusehen. Sie dürfte aber nur eine Folgenwirkung von Anziehungserscheinungen darstellen.

Die neueren, besonders an wirbellosen Geschöpfen z. B. den Echinodermen angestellten Untersuchungen²⁾ führen zu dem Wahrscheinlichkeitsschlusse, dass das Eindringen und die Verschmelzung eines oder mehrerer Spermatozoiden mit dem Eikerne zu dem Furchungskern eine Reihe von Ortsveränderungen der umgebenden

1) Die physikalische Untersuchung der Gewebe. S. 145.

2) Vgl. z. B. E. Selenka, Beobachtungen über die Befruchtung und Theilung des Eis von *Toxopneustes variegatus*. Erlangen 1877. 8. S. 5. 6.

Bestandtheile, also auch einen Formenwechsel der Eigebilde herbeiführt, der sich als die Folge unmittelbar sichtbar werdender Anziehungen wenigstens hypothetisch erklären lässt. Die Strahlenfigur um den Kopf des Spermatozoides und das hierdurch begünstigte Herausrücken des Eikernes zu jenem kann in ähnlicher Weise gedeutet werden. Ist einmal der aus der Verschmelzung mit dem Spermakern hervorgegangene Furchungskern zur Ruhe gekommen, so lassen sich die ferneren bis zur Dottertheilung fortschreitenden Veränderungen als die Folgen von Anziehungserscheinungen auffassen.

Wir wollen die Betrachtung dadurch vereinfachen, dass wir uns die Gesamtgrösse der Anziehungskräfte des kugeligen Furchungskernes in dessen Mittelpunkt vereinigt denken. Eine gesonderte Furchungskugel würde in Folge dessen erzeugt werden, wenn die Stärke der auf die Dottermasse geübten centralen Anziehung und der ihr entgegenstehenden Widerstände, also die Resultanten beider nach allen Raumesrichtungen gleich wären und die Wirkung keines anderen Furchungskernes verändernd eingriffe. Ein an dem Rande der Furchungsstelle gelegener Kern¹⁾ könnte in dieser Weise nicht wirken. Interferiren hingegen zwei nahezu gleichgrosse Anziehungen zweier Furchungskerne der erwähnten Art, so wird sich eine Interferenzebene da herstellen, wo die beiderseitigen Einflüsse gleich und entgegengesetzt sind, in denen also die Dottertheilchen keine Ortsveränderung erleiden. Die Ebene fordert aber, dass sich die mit der Entfernung wechselnde Anziehungsgrösse so gestalte, dass immer die von dem einen Mittelpunkte nach einem Punkte der Ebene gezogene Gerade mit dem Cosinus des Winkels vervielfältigt, den diese Linie mit der von dem Mittelpunkte auf die Ebene gefällten Senkrechten bildet, eben dieser Senkrechten gleicht. Die Werthe, die nach der Seite des einen Anziehungsmittelpunktes als positiv anzusehen sind, tragen den negativen Charakter auf der andern Seite. Finden jene Bedingungen nicht statt, so wird auch die Interferenzfläche nicht eben, sondern gekrümmt sein.

Die Interferenzwirkung nimmt von dieser Fläche an nach beiden Seiten hin ab, bis sie endlich da den Nullwerth erreicht,

1) Siehe z. B. für den Nahrungsdotter E. Selenka, Die Anlage der Keimblätter bei *Purpura Lapillus*. Harlem und Leipzig 1872. 4. Fig. 1. N.

wo der Anziehungseinfluss der einen Kugel auf die Elemente der andern verschwindend klein ist.

Die sichtbare Folge dieser Erscheinungen besteht darin, dass die beiden Furchungskugeln in der Interferenzfläche verbunden bleiben und hier äusserlich eine Einschnürung auftritt, deren Fortsetzung nach innen der Interferenzfläche entspricht. Nimmt später die Kernanziehung zu, so dass sich deshalb die Dottermasse um jenen Kern enger zusammenballt, so wird natürlich die Interferenzfläche immer kleiner und zuletzt Null, so dass sich beide Kugeln von einander vollständig trennen¹⁾.

Besitzt der Furchungskern keine Kugelgestalt oder sind die Anziehungskräfte oder die Widerstände nicht nach allen Raumesrichtungen gleich, so wird auch die Form der Furchungabtheilung von der der Kugel entsprechend abweichen. Man kann dann z. B. Umdrehungs- oder auch dreiachsige Ellipsoide erhalten.

Vergrössert sich später die Anzahl der Zerklüftungsstücke in höherem Grade und drängen sie sich enger zusammen, so kann der gegenseitige Druck Polyëder aus den rundlichen Gebilden nach denselben mechanischen Gesetzen erzeugen, die das Parenchym der Pflanzen aus Merenchym hervorgehen lassen und die uns in einer späteren Nummer dieser Abhandlungen ausführlich beschäftigen werden.

Die Länge der Linie, welche von dem Mittelpunkte der Anziehung zu einem Punkte des Randes der Interferenzebene gezogen wird, lässt sich als ein Maass der Anziehungsgrösse jederseits ansehen. Man kann sie auch durch den Quotienten ausdrücken, der jene Linie zum Nenner und die von dem Mittelpunkte auf die Interferenzebene gefällte Senkrechte zum Zähler hat. Dieser Bruch entspricht dem Cosinus des von beiden eingeschlossenen Winkels. Er selbst nimmt innerhalb der Grenzen eines Rechten um so mehr zu, sein Cosinus also um so mehr ab, je grösser die Interferenzebene, je ausgedehnter also die Nullwirkung der beiderseitigen Interferenz ist.

Es versteht sich nach dem Früheren von selbst, dass jede Furchungabtheilung um so mehr eine grösste Menge von Dottermasse in kleinster Begrenzungsfläche einschliessen wird, je ähn-

1) Siehe z. B. die schönen Abbildungen bei Alexander Agassiz, *North American Starfishes*. Cambridge 1877 4. Pl. I. Fig. 5--24.

licher sie der Kugel ist. Die Annäherung an eine solche Beziehung wird daher im Laufe der Theilung bis zu möglichst vollständiger Sonderung der Kugel immer mehr erreicht. Die Kugel bildet die einfachste Form eines dreiachsigen Ellipsoids, dessen drei Hauptachsen unter einander gleich sind und als Polachse und als die beiden, in der Aequatorebene gelegenen senkrechten Achsen in beliebigen Richtungen angenommen werden können. Die anderen ellipsoidischen Formen werden im allgemeinen verhältnissmässig grössere Oberflächen darbieten und zwar die ungleich dreiachsigen für denselben Rauminhalt ausgedehntere, als die Umdrehungsellipsoide.

Derselbe Gedankengang, der für die Auffassung der Dotterzerklüftung entwickelt worden, lässt sich auf die meisten Vorgänge der Kern- und der Zellentheilung übertragen. Eine nähere Betrachtung wird auch hier zeigen, dass in der Regel die Einschnürring nur aus der Interferenz und die endliche Sonderung aus den fortgesetzten Anziehungswirkungen eines jeden der beiden Thätigkeitsmittelpunkte hervorgehen.

Hinreichend genaue Coordinaten-Messungen¹⁾ werden allein entscheiden können, ob und in welchen Gewebtheilen, Oberflächen, die durch die Umdrehung einer der acht Euler'schen eigenthümlichen elastischen Linien²⁾ (ausser der Geraden und dem Kreise) entstanden sind, vorkommen. Diese Curven besitzen die schon seit den Anfängen isoperimetrischer Studien bekannte Eigenschaft, dass für die gleiche, zwischen zwei senkrechten Ordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems enthaltene Bogenlänge der durch Umdrehung um die Abscisse erzeugte Körper den grössten oder den kleinsten Rauminhalt einschliesst, je nachdem die Curve gegen die Abscissenaxe concav oder convex ist³⁾.

1) Die physikalische Untersuchung der Gewebe. Leipz. und Heidelberg. 1867. 8. S. 73. 74.

2) Die Characterisirung desselben siehe bei L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimas proprietate gaudentes*. Lausannae et Genevae. 1744. 4. p. 260—267. Die Herleitung der Kettenlinie für einen von Kräften beherrschten, vollkommen biegsamen Faden, siehe ebendasselbst p. 280—281.

3) Ausser der schon in der physikalischen Untersuchung der Gewebe S. 99 angeführten Litteratur siehe z. B. noch F. A. Stegmann, *Lehrbuch der Variationsrechnung*. Kassel, 1854. 8. S. 187 (z. Thl.). G. W. Strauch,

Die Frage, welche unter allen Curven, die eine und dieselbe Oberflächengrösse bei der Umdrehung um eine Achse erzeugen, den grössten oder den kleinsten Umdrehungskörper liefert, drohte das Vertrauen in die allgemeine Anwendbarkeit der Vorschriften der Variationsrechnung zu erschüttern, weil sie die den allgemeinen Bedingungen nicht entsprechende Kugel zu geben schien¹⁾. De-launay²⁾, und besonders Stern und Greve³⁾ zeigten erst in neuerer Zeit, dass die richtige Umdrehungscurve durch die Bewegung eines der beiden Brennpunkte einer auf der Abscissenachse ohne Verschiebung rollenden Ellipse oder Hyperbel erzeugt wird. Da der Brennpunct einer Parabel eine Kettenlinie unter den gleichen Verhältnissen beschreibt, so hat man eine sogenannte elliptische oder hyperbolische Kettenlinie in den beiden ersteren Fällen. Jene liefert den grössten Werth des Rauminhaltes des Umdrehungskörpers, diese hingegen den grössten oder den kleinsten, je nachdem man die ausgehöhlte oder die gewölbte Curvenseite betrachtet. Der Kreis entspricht dem Grenzfall.

Da die Gerade die einfachste der elastischen Linien ist, indem sie dem Falle entspricht, in welchem keine biegende Kraft die ebene und unendlich dünne Platte krümmt⁴⁾, jeder Durchschnitt von dieser also einer geraden Linie entspricht, so folgt, dass der gerade Kreiscylinder Maximum- und Minimum-Eigenschaften in dem Vergleiche der Oberfläche mit dem Rauminhalt darbieten muss.

Ist der Flächeninhalt der Figur, welche von der Curve, den beiden ihren Endpunkten zugehörenden Ordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems und dem entsprechenden Stücke der Ab-

Theorie und Anwendung des sogenannten Variationscalculs. Bd. II. Zürich 1849. 8. S. 507—509. J. Serret, Cours du Calcul différentiel et intégral. Tom. II. Paris 1868. 8. p. 720—722. 729. Vgl. auch die physikalische Untersuchung der Gewebe. S. 118. 119.

1) Dass schon Euler vor der Erfindung der Variationsrechnung durch Lagrange das Unpassende dieser Lösung erkannt und hervorgehoben hat, erhellt aus seiner Methodus p. 195.

2) Vgl. z. B. J. H. Jellett, Die Grundlehren der Variationsrechnung. Bearbeitet von C. H. Schnuse, Braunschweig 1860. S. 397. 398.

3) A. Greve, Ein Problem der Variationsrechnung. Frankfurt a. M. 1875. 8. S. 9—21. 45. 46. Eine kritische Darstellung der Bemühungen von Jellett, Airy, Todtenuter, Challis und Lindelof siehe ebendasselbst S. 21—38. Vgl. Fortschritte der Mathematik. Bd. 7. 1877. S. 298.

4) Siehe schon Euler, Methodus p. 256.

scissenachse eingeschlossen wird, gegeben, so erhält man durch Umdrehung um diese Achse den kleinsten Umdrehungskörper, wenn jene Linie eine Gerade, die Fläche also ein Rechteck und daher der Umdrehungskörper ein Kreiscylinder ist¹⁾. Andererseits liefert der Archimedische Cylinder oder derjenige Kreiscylinder, dessen Höhe dem Durchmesser seiner Grundfläche gleicht, die kleinste Oberfläche für den grössten Rauminhalt²⁾. Ein gerader Kreiscylinder besitzt eine kleinere Oberfläche, als ein schiefer von gleicher Höhe und Grundfläche³⁾. Die Anwendung dieser Sätze auf cylinderähnlichem Gewebe ergibt sich von selbst.

Zerklüftet sich ein Cylinder im Laufe der Entwicklung in eine Anzahl dünnerer cylindrischer Fasern, so gewinnt nicht blos die Gesamtoberfläche, sondern auch das Verhältniss der Oberfläche zu dem Inhalte einer jeden Faser, weil es in umgekehrtem Verhältnisse des Halbmessers des kreisförmigen Querschnittes wächst⁴⁾. Dünnere Fasern besitzen daher eine in Bezug auf ihre Masse grössere Oberfläche, als dickere.

Denken wir uns einen elliptischen oder einen Kreiscylinder durch Querschnitte in eine Anzahl von Scheiben getheilt, so wird hierdurch die Oberfläche in Verhältniss zum Rauminhalt vergrössert, weil die zwei Querschnittflächen hinzukommen. Diese Oberflächenvermehrung muss um so beträchtlicher ausfallen, je dünner die Scheiben bei gleicher Grösse des Querschnittes sind. Bleiben die Flächen nicht eben, sondern wölben sie sich zum Theil um einen Kern, wie in den Blutkörperchen der Vögel, der Reptilien und der Amphibien, so kann die Oberfläche verhältnissmässig noch mehr zunehmen, wenn der Kern nicht die Masse übermässig vergrössert. Sie wird immer relativ wachsen, wenn die Scheibe jederseits vertieft ist, wie in den Blutkörperchen des Menschen und der Säugethiere. Diese Betrachtungen machen anschaulich, welch grosse Aufnahmsflächen für den Sauerstoff in den Blutkörperchen hergestellt worden und wie überhaupt die Theilungen der Länge oder der Quere nach als absolute und relative Flächenvergrössererer wir-

1) Strauch a. a. O. Bd. II. S. 509. 510. Vgl. anch Euler, Methodus. p. 196. 197.

2) Litteraturangaben siehe in der physikalischen Untersuchung der Gewebe. S. 99. 100; vgl. auch S. 106. 107. und Lhuillier a. a. O. p. 112.

3) Lhuillier a. a. O. p. 114.

4) Siehe die physikalische Untersuchung der Gewebe S. 106—108.

ken können. Die durch den Kern der Blutkörperchen erzeugte Wölbung kann die Athmungsthätigkeit derselben so sehr begünstigen, dass eine geringere Menge derselben für die Lebensbedürfnisse hinreicht. Sollte sich ein Gewebstheil finden, der einen oben offenen und hohlen Kreiscylinder, ähnlich manchen Arten cylindrischer Trinkgläser darstellte, so würde dessen Innenfläche nur dann für einen gegebenen Rauminhalt der Höhlung eine kleinste sein, wenn der Halbmesser des Grundkreises der dritten Wurzel eines Bruches entspricht, dessen Zähler dem Rauminhalt und dessen Nenner der Ludolph'schen Zahl gleicht¹⁾.

Haben ein Cylinder und ein Prisma die gleiche Höhe und Grundflächen derselben Grösse, so besitzt jener eine kleinere Oberfläche, als dieses²⁾. Der Satz gilt nicht bloss für das senkrechte Prisma, sondern für alle Prismen überhaupt, weil das senkrechte Prisma eine kleinere Oberfläche, als das schiefe von gleicher Höhe und gleich grosser Grundfläche³⁾ und das gleichflächige eine kleinere, als das ungleichflächige darbietet⁴⁾. Verwandelt sich also z. B. elliptisches Zellgewebe durch Druck der Nachbartheile in prismatisches oder parenchymatisches, so wächst die Oberfläche verhältnissmässig, indem der Rauminhalt abnimmt. Dasselbe wiederholt sich, wenn die kugeligen Bildungszellen in sogenannte sechseckige während der Ausbildung der Horn-, der Pigmentzellen u. dgl. übergehen, vorausgesetzt, dass nicht zugleich neue Wachsthumsercheinungen den Rauminhalt und die Oberfläche in anderer Weise vergrössern. Man kann aber dann immer noch behaupten, dass das Polyëder eine grössere Gesamtoberfläche, als eine Kugel von gleichem Rauminhalte darbietet.

Da von allen geraden Prismen gleicher Höhe, derselben Grösse der Gesamtoberfläche und regelmässiger Gestalt der Grundfläche dasjenige den grössten Rauminhalt einnimmt, dessen Basis die grösste Seitenzahl besitzt, so folgt wiederum, dass in dieser Hinsicht der Cylinder alle geraden Prismen von derselben Höhe und derselben Grundflächengrösse übertrifft⁵⁾.

1) Siehe Schellbach, Mathematische Lehrstunden. Berlin, 1860. 8. S. 24. 25.

2) Lhuillier a. a. O. S. 111.

3) Lhuillier a. a. O. p. 109.

4) Lhuillier ebendasselbst p. 110.

5) Lhuillier a. a. O. p. 112.

Der Würfel und das Quadrat verhalten sich zu den Parallelepipeden und den nicht quadratischen Vierecken und dem Parallelogramm in ähnlicher Weise, wie die Kugel und der Kreis zu den ihnen entsprechenden runden Gestalten. Der Würfel besitzt unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden gleichen Rauminhaltes die kleinste Oberfläche und umgekehrt das grösste Volumen bei gleicher Gesamtoberfläche¹⁾. Dasjenige Parallelepiped, das auf einer quadratischen Grundfläche steht, hat die kleinste Gesamtoberfläche unter allen rechtwinkligen derselben Höhe und der gleichen Grundflächengrösse²⁾. Ein gerades Parallelepiped bietet dieselbe Eigenthümlichkeit gegenüber dem schiefen dar³⁾. Ebenso wiederholen sich hier ähnliche Sätze, als früher für die Prismen, insofern, als die Gleichheit der Flächen oder der körperlichen Winkel Begünstigungsmittel der Grösse des Rauminhaltes oder der Kleinheit der Oberfläche unter sonst gleichen Verhältnissen der Parallelepipede abgeben⁴⁾. Alle diese Sätze werden sich vorzugsweise auf einzelne Pflanzengewebe z. B. das mauerförmige Zellgewebe mit Erfolg anwenden lassen. Da dasselbe von den Pyramiden und den Kegeln kaum gelten dürfte, so übergehe ich die Maximum-Minimum-Eigenthümlichkeiten dieser Körper⁵⁾.

Die Ansicht, dass die Wandungen der Binnenzellen unter Erreichung grösster Massenersparniss hergestellt werden, bewährt sich in der Wirklichkeit nicht⁶⁾.

Da die Gestalten mancher Spindelzellen mit denen der kegelförmigen Spindel, d. h. der Vereinigung zweier geraden und gleichen, mit ihrer Grundfläche verbundenen Kegel mehr oder minder übereinstimmen, so dürfte hin und wieder ein hierher gehörender isoperimetrischer Satz seine Anwendung auf jene Gebilde finden. Die Kegelspindel der oben erwähnten Art hat die kleinste Oberfläche für einen gegebenen Rauminhalt, wenn sich die Höhe eines jeden Kegels zu dem Halbmesser der Grundfläche wie die Diago-

1) Lhuillier a. a. O. p. 77.

2) Ebendas. p. 77.

3) Ebendas. p. 76.

4) Ebendas. p. 78—80.

5) Siehe über sie Lhuillier a. a. O. p. 115. 2 Bde.

6) Siehe das Nähere in der physikalischen Untersuchung der Gewebe. S. 136—138.

nale eines Quadrates zu einer der Seiten desselben verhält¹⁾. In ähnlicher Weise besitzt das reguläre Quadratoctaëder den grössten Rauminhalt in Bezug auf die Oberfläche, wenn man es mit anderen dieser viereckigen Grundfläche angehörenden Doppelpyramiden vergleicht²⁾.

Die Flächen liefern eine Reihe von Sätzen, die denen der Körper ähnlich sind. Der Kreis tritt dann an die Stelle der Kugel, das Quadrat an die des Würfels und das Polygon an die des Polyëders.

Der Kreis besitzt die verhältnissmässig grösste Fläche für dieselbe Peripherie und die kleinste Peripherie für dieselbe Oberflächengrösse³⁾. Das Gleiche wiederholt sich für den von einer Sehne, also auch einem Halbmesser begrenzten Kreisabschnitt⁴⁾. Ebenso gehört der Kreisbogen zu denjenigen Curven, welche die kürzeste Linie zwischen zwei senkrechten Grenzdordinaten und der Abscisse bei gegebenem Flächeninhalte bilden können⁵⁾. Endlich hat unter allen geradlinigen Figuren, deren Seiten an Zahl und Grösse gegeben sind, diejenige den grössten Inhalt, die sich in den Kreis einschreiben lässt⁶⁾.

Von den sämmtlichen geradlinigten ebenen Figuren derselben Seitenzahl und des gleichen Flächeninhaltes besitzt diejenige die kleinste Summe der Begrenzungslinien, deren Seiten unter einander gleich sind und umgekehrt⁷⁾. Dem entsprechend ist unter allen Polygonen derselben Seitenzahl und des gleichen Perimeters das reguläre das grösste⁸⁾. Das auch in Geweben vorkommende

1) Lhuillier a. a. O. p. 144.

2) Ebendas. p. 145.

3) Ebendas. p. 8.

4) Ebendas. p. 36.

5) Siehe z. B. das Nähere bei Strauch a. a. O. Bd. II. S. 475—481.

6) Lhuillier a. a. O. p. 5.

7) Ebendas. p. 6.

8) Ebendas. p. 2. Eine Uebersicht der wichtigsten in seinem besonderen Werke behandelten isoperimetrischen Sätze gibt Lhuillier in seinem *Abrégé de l'isopérimétrie élémentaire* in S. Lhuillier *Polygonometrie ou de la mesure des figures rectilignes*. Genève et Paris 1789. 4. p. 103—124. Vgl. auch dessen *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*. Tübingen 1795. 4. p. 274—280 und z. B. von Elementarwerken A. M. Legendre, *Die Elemente der Geometrie*. Uebersetzt von A. L. Crelle. Berlin 1822. 8. S. 158—168.

Quadrat und das gleichseitige Sechseck, dessen Seite also dem Halbmesser des umschriebenen Kreises gleicht, gehören in diese Kategorie.

Mikrometrische Messungen werden entschieden, wenn Formen, welche diesen isoperimetrischen Flächensätzen entsprechen, hergestellt sind und wenn nicht. Ein eigenthümlicher Umstand kann aber zu der Vermuthung führen, dass einzelne jener Gestalten nicht ganz selten vorkommen.

Plateau¹⁾ und vorzugsweise Lamarle²⁾ erläuterten die dem beständigen Gleichgewichte entsprechenden Formverhältnisse dünner flüssiger Blätter, die man z. B. durch Eintauchen von Drahtnetzen in eine Mischung von Glycerin und Seifenlösung erhalten kann. Lamarle findet, dass dann die Summe der Blätteroberflächen ein Kleinstes und die Fläche jeden Blattes ein Kleinstes innerhalb der dieselbe umschreibenden Grenzen ist³⁾. Die mittlere Krümmung besitzt einen unveränderlichen Werth in jedem Punkte eines und desselben Blattes. Sie gleicht Null, wenn die äussern Drucke beiderseits gleich, erscheint dagegen sonst ihrem Unterschiede proportional⁴⁾. Kommt auch die Entstehungsweise flüssiger Blätter auf die oben erwähnte Weise, die diesen Ableitungen zum Grunde liegt, fast nie in Pflanzen oder Thieren vor, so werden sich doch hier wahrscheinlich oft genug ähnliche Bedingungsglieder anderer Art finden, die zu ähnlichen Maximum-Minimum-Ständen führen.

Da die Schraubenlinie eine gerade Linie für jeden ihrer Umgänge bei der Abwickelung der Oberfläche eines Kreiscylinders in eine Ebene gibt, so folgt, dass sie zwei Punkte auf kürzestem Wege auf der Cylinderfläche verbindet⁵⁾. Liegen diese in einer der Achse parallelen Geraden, so vereinfacht sich die Schraubenlinie zu einem Theile von dieser. Sie erhält die Form eines Kreis-

1) J. Plateau, Mémoires de l'Académie de Belgique Tome XXXIII. Bruxelles 1861. 4. p. 1—46. und Tome XXXVI. 1867. 4. p. 3—66.

2) E. Lamarle, Ebendaselbst Tome XXXV. 1865. 4. p. 3—104. Tome XXXVI. 1867. 4. p. 3—165.

3) Lamarle a. a. O. Tome XXXV. p. 3.

4) Lamarle, Ebendaselbst p. 4.

5) Die mittelst der Variationsrechnung möglichen Herleitungen für den Kreis —, den elliptischen und den parabolischen Cylinder, siehe bei Strauch a. a. O. Bd. II. S. 3—49355. Eine elementare Herleitung findet sich bei Schellbach, a. a. O. S. 137. 138.

bogens, wenn die zwei Punkte in dem Umkreise eines der Grundfläche parallelen Kreisschnittes oder in jener selbst liegen, und die eines Kreises, wenn die zwei Punkte zu einem verschmolzen sind und ein vollständiger Umgang von und zu diesem stattfindet. Die durch einen geneigten Schnitt erzeugte Ellipse kann auch noch hierher insofern gerechnet werden, als man jede Hälfte derselben als ein Bogenstück einer Schraubenlinie ansehen darf. Alle diese Formen können bei der Zellensaftrotation der Gewächse als Bahnen und in den spiralförmigen Bildungen der Pflanzen und der Thiergewebe, als in stabilem Gleichgewichte festgehaltene Gestalten vorkommen. Das Ansteigen derselben lässt sich ausserdem als das Resultantenergebniss einer wagerechten und einer senkrechten Kraft ansehen, deren wechselseitige Wirkungsgrösse durch den Erhebungswinkel der Schraubenlinie gemessen wird. Der Kreisring zeigt dann an, dass die senkrechte und der der Cylinderachse parallele Stab, dass die wagerechte Wirkung geschwunden ist. Man hat daher auch z. B. das Erstere bei der ringförmigen Verholzung und den einen oder den andern Fall bei der selbständigen Quer- oder der Längsstreifung der Gewebe.

Soll eine Strömung in dem Innern einer Hohlkugel auf kürzestem Wege zwischen zwei Punkten vor sich gehen, so wird ihre Bahn dem entsprechenden Bogentheile eines durch die zwei Punkte gelegten grössten Kreises gleichen¹⁾. Ein beliebiger Meridian erfüllt dieselbe Bedingung für einen Umdrehungskörper. Alle Bewegungen, welche durch Kräfte erzeugt werden, die das Bewegliche auf irgend einer Fläche erhalten, folgen der kürzesten Linie auf dieser Fläche. Die Zellensaftrotation liefert Belege für alle diese Fälle.

1) Siehe z. B. Strauch a. a. O. Bd. II. S. 356—364.