# IV. *Akustische Versuche, die kleinsten Transversalwellen der Flüssigkeiten betreffend; von Dr. Ludwig Matthiefsen in Husum.*

(Aus den Mittheilungen des Vereins für Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Schleswig-Holstein, vom Hrn. Verf. übersandt.)

---

Unter Transversal- oder Querschwingungen der Flüssigkeiten versteht man diejenigen Wellenbewegungen, bei welchen die Theilchen entweder senkrecht gegen die Fortpflanzungsrichtung schwingen oder um eine Gleichgewichtslage in einer jener Richtung parallelen Ebene oscilliren, bald senkrecht, bald parallel in kreisförmigen Bahnen oder in offenen Bogen. Die erste Art der Bewegung findet bei den fortschreitenden, letztere nur bei stehenden Wellen statt (Fig. 2 Taf. I).

Sind die Schwingungen der letzteren Art von sehr kurzer Dauer, so können sie sich auch zur Tonbildung eignen und umgekehrt durch Tonbewegungen anderer Körper in den Flüssigkeiten erzeugt werden. Auf Erscheinungen dieser Art sind die folgenden Untersuchungen vorzugsweise gerichtet. Eine andere Art von Bewegung der kleinsten Flüssigkeitstheilchen sind die Longitudinal- oder Längsschwingungen. Bei diesen schwingen dieselben in einer der Fortpflanzungsrichtung hin und zurück, wodurch successive eine Compression und Expansion entsteht. Da die festen und flüssigen Körper in sehr geringem Grade compressibel sind, so sind gewöhnlich auch nur die Transversalwellen für's Auge wahrnehmbar.

Die Longitudinalschwingungen an festen Körpern sind zuerst von Chladni 1796, an Flüssigkeiten von Cagniard la Tour 1834 nachgewiesen worden.

Während alle drei Aggregatzustände sich vermöge ihrer specifischen Elasticität zu Longitudinalschwingungen eignen, werden Transversaltöne ausschliesslich nur an solchen Körpern hervorgebracht, welche entweder eine natürliche Steifheit besitzen, wie Stäbe, Platten usw., oder an solchen, bei denen sich die Steifheit durch eine künstliche Spannung ersetzen läfst, wie Saiten und Häute. Diese Spannung ist den Flüssigkeiten nur in sehr geringem Grade durch Cohäsion, Adhäsion und Schwerkraft eigen, den Gasen durchaus gar nicht. Diese Körper sind deshalb scheinbar gar nicht geeignet, durch Transversalschwingungen Töne hervorzubringen. Die Transversalschwingungen tönender Flüssigkeiten blieben deshalb bisher fast unbeachtet, wenigstens ist das mathematische Gesetz derselben noch ganz unbekannt geblieben. Ich bin deshalb bemüht gewesen, die Existenz solcher Tonbewegungen nachzuweisen und denselben einen mathematischen Ausdruck zu geben. Obgleich noch viele experimentale Untersuchungen zur Verificirung derselben erforderlich, namentlich auf verschiedene Flüssigkeiten und verschiedene Temperaturen derselben auszudehnen sind, will ich doch meine Beobachtungen mittheilen · in der Absicht, Andere zu weiteren Untersuchungen des Gegenstandes anzuregen.

Chladni entdeckte auch 1787 die nach ihm benannten Klangfiguren, welche Sand auf tönenden Tafeln annimmt.

Vierzig Jahre später legte Savart der Paris. Acad. eine Abhandlung vor über gewisse andere die Chladni'schen begleitenden »Ergänzungsfiguren«, indem er eine secundäre (partielle) Theilungsart der Tafeln entdeckt zu haben glaubte. Sie erscheinen, wenn man Lycopodium auf die Platte streut, hauptsächlich an den Stellen der gröfsten Deviation in Form von aufwallenden Häufchen. Diese Ansicht wurde im Jahre 1831 von Faraday bekämpft in einer längeren Abhandlung der *Phil. Trans.* (übersetzt in Pogg. Annalen Bd. XXVI, S. 193), indem derselbe an einer Reihe von Versuchen nachwies, dafs die über der Platte in Strömung begriffene Luft diese Erscheinungen verursachte, welche in luftleeren Räumen gänzlich aufhörten. Zugleich untersuchte Faraday eine dritte Art von Formen und Zuständen, welche Flüssigkeiten auf vibrirenden Tafeln annehmen, und die er mit dem Namen »Kräuselungen« bezeichnete. Die wichtigsten Resultate seiner Abhandlung sind folgende:

1) Begiefst man eine Tafel von beliebiger Form und Gröfse mit einer Flüssigkeit, so zeigt sich an den Stellen der stärksten Vibrationen eine niedliche Kräuselung, welche bei denselben Tönen einen fast constanten Grad der Feinheit besitzt und gewöhnlich rechtwinklig angeordnet ist in Linien, welche mit den Rändern einen Winkel von 45° bilden, der bei stärkeren Schwingungen nach Faraday's Ansicht in einen Winkel von 90° überspringt (Fig. 3 Taf. I).

2) Die gröfseren Tonmuster konnte F. noch auf Wasser von 8 bis 12 Zoll Tiefe erregen. Vorzüglich eignete sich Dinte zu diesen Versuchen, wenn er die Glastafel von unten her beleuchtete. Auch an Quecksilber beobachtete er dieselben Erscheinungen, bemerkte jedoch in der Feinheit der Kräuselung keinen Unterschied.

3) F. bemerkte, dafs die Breite der Wellen von der Tiefe der Flüssigkeit abhängig sey und mit ihr auf das Anderthalbfache gesteigert werden könne.

4) Die Ansicht, welche F. sich von dem Bestande der »Häufchen« bildet, ist folgende: Es giebt zwei Systeme von Häufchen und Wellen, von denen jedes erst im Verlaufe zweier ganzer Schwingungen wieder erscheint (Fig. 4 Taf. I). Also ist eigentlich die Wellenbreite die doppelte von der scheinbaren und die Schwingungsdauer derselben die Hälfte von der der Tafel. Durch die Schnelligkeit ihrer Wiederkehr erscheinen sie permanent oder gleichzeitig zu seyn, obgleich jedes Häufchen und jede Welle im Verlaufe einer ganzen Schwingung entsteht und zerstört wird. Bei kürzerer Schwingungsdauer können die Theilchen nur einen kürzeren Weg durchlaufen. Deshalb rufen höhere Töne feinere Kräuselungen, d. h. durchkreuzende Wellen oder Häufchen hervor.

Soweit Faraday. Wir vermissen leider

1) eine vollständige Erklärung des Phänomens bezüglich der gröberen und feineren Kräuselungen bei verschie-

dener Oscillationsdauer und eine Beziehung dieser kleinsten Wellen zu den oscillatorischen Wasserwellen überhaupt;

2) Messungen über das Verhältnifs der Wellenbreite zur Schwingungsdauer, also über das Gesetz ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

3) die Abhängigkeit der Richtung der Wellen von der Form der Platten.

Ich habe nach dieser Richtung hin diese zierlichen Erscheinungen weiter untersucht und eine Reihe ziemlich mühevoller, oft vergeblicher Versuche und Messungen angestellt.

Da diese Erscheinungen ungemein fein und flüchtig sind, so kam es mir vor Allem darauf an, dieselben zu fixiren. Dies gelang am besten mit Kreideschlempe oder Weizenmehl. Diese Pulver, fein den Flüssigkeiten beigemengt, nehmen die Form der Kräuselungen dauernd an. Getrocknet geben diese Figuren vollkommen deutliche Muster, an denen die Messungen bis zu den mikroskopischen herab mit der Lupe vorgenommen werden konnten. Bezüglich der Sätze von Faraday erlaube ich mir nun Folgendes zu bemerken.

ad 1. Die beiden Lagen der Wellenlinien gegen den Rand der Platten rühren nach genauen Untersuchungen der Muster nicht her von einer Drehung des Wellensystems, sondern von einer Theilung, wie aus Fig. 5 Taf. I ersichtlich ist. Es bilden sich nämlich zwei Systeme stehender Wellen, von denen das eine senkrecht, das andere parallel zum Rande der Tafel steht. Sind beide gleich intensiv, so entsteht ein Muster von Häufchen, die in Linien liegen, welche einen Winkel von 45° mit dem Rande bilden. Lücken im Rande der Platten stören diese Richtung nicht wesentlich, wie auch Faraday bemerkt. Ich werde weiter unten zeigen, dafs es nicht der Rand, sondern die beiden Hauptnormalschnitte der gekrümmten Tafel sind, welche die Richtung der Wellen einzig und allein bestimmen.

ad 2. Hier giebt Faraday nicht an, ob die Linien hell oder dunkel erscheinen. Sind die Zwischenräume, welche abgerundete Quadrate sind, hell, so sind die Linien offenbar die Stelllen der Anhäufungen. Ich hatte nicht die Zeit, die Versuche mit Dinte anzustellen. Faraday ist offenbar der Ansicht, dafs die runden Zwischenräume die Stellen stärkster Anhäufungen sind. Bei meinen Versuchen mit Kreideschlempe lagerte sich diese nicht in Häufchen an, sondern in sich quadratisch durchschneidenden Linien. Ich halte diese Linien und nicht die Zwischenräume für den Ort der Wellenberge, wage indefs noch nicht, darüber endgültig abzuurtheilen; also entweder ist der Mechanismus wie Fig. $6^a$ oder $6^b$ Taf. I.

ad 3. Einen so grofsen Unterschied in der Wellenbreite, wie Faraday ihn angiebt, habe ich nicht gefunden, wie aus der unten stehenden Tabelle ersichtlich ist. Man vergleiche *c* und *dis*, $\bar{c}$ und $\bar{cis}$.

Was nun die Ursache des Phänomens, sowie die Abhängigkeit der Richtung der Wellen von der Form der Platten und der Klangfiguren anbetrifft, so scheinen aus den Beobachtungen folgende Sätze hervorzugehen:

1. Die Kräuselungen sind nichts anders als Transversalschwingungen der Flüssigkeit, welche die Schwingungen der Platte begleiten und ihnen isochron sind. Sie können also durch jede beliebige andere Ursache hervorgerufen werden, wenn die Anstöfse nur regelmäfsig und rasch genug aufeinander folgen.

*Bemerkung.* Ich versuchte deshalb auf der Oberfläche tiefer Gefäfse mittelst zweier an den Enden der Zinken einer Stimmgabel befindlichen Nadeln zwei Wellensysteme zu erzeugen, wodurch stehende Wellen zwischen den Nadelspitzen entstanden, die den auf einer Platte von derselben Schwingungsdauer erzeugten Wellen an Breite fast genau gleich kommen. Diefs steht freilich mit dem Satz 3 von Faraday in Widerspruch. Ich kann die Wahrheit aber nicht anders machen, als sie ist. Der gröfste Unterschied betrug beispielsweise für $\bar{a}$ 5,5 bis 6,2 auf $1^{cm}$. Diefs können indefs auch Fehler in der Beobachtung seyn, da bei den Versuchen mit der Stimmgabel eine Fixirung der

Tonmuster nicht möglich war und die Messungen auf möglichst genauer Abschätzung beruhen. Um deshalb die Beobachtungen von jeder individuellen Auffassung zu befreien, ersuchte ich den Herrn Schlichting, Assistenten des physicalischen Instituts in Kiel, ebenfalls Versuche mit Stimmgabeln anzustellen, ohne ihn von meinen Messungen vorher in Kenntnifs zu setzen. Beispielsweise ist

mit Stimmgabel: $\bar{c}$ ($256^s$) Wellenbreite $2{,}18^{mm}$ (Schlichting)

mit Guttapercha-Streifen: $\overline{cis}$ ($277^s$) Wellenbr. $2{,}22^{mm}$ (mihi).

2. Die Wellensysteme sind dreierlei Art: entweder sind es zwei Systeme paralleler Wellen, welche sich rechtwinklig durchkreuzen, oder es ist blofs eins dieser beiden Systeme sichtbar, oder aber es bilden sich Kreiswellensysteme von oft beträchtlicher Ausdehnung sich den andern accommodirend und zwar hauptsächlich dann, wann sich kleine feste Körperchen in der Flüssigkeit befinden, welche ein Vibrationscentrum bilden. Die einfachen gradlinigen Systeme bilden sich am häufigsten in der Mitte und am Rande der Tafeln, jedoch sind beide Arten stets rechtwinklig gegen einander gestellt. In allen drei Fällen aber ist die Wellenbreite bei denselben Tönen in der ganzen Ausdehnung der Tafel constant. Bei der Messung der Wellenbreiten der sich kreuzenden Systeme ist aber zu beachten, dafs, wie unter der Bemerkung ad 1 gesagt und aus Fig. 5 Taf. I ersichtlich ist, die Messung in der Richtung der Diagonale der Quadrate des Musters, d. h. parallel zu den Hauptnormalschnitten der Krümmung der Fläche, oder wie man auch sagen kann, entweder senkrecht oder parallel zum Rande der vibrirenden Fläche vorzunehmen ist. Wie schon oben angedeutet ist, läfst sich nämlich die Abhängigkeit der Richtung der geradlinigen Wellensysteme im folgenden Satze zusammenfassen: *Die einfachen Systeme der geradlinigen Wellen sind stets parallel demjenigen Hauptnormalschnitt der durch die Vibrationen gekrümmten Fläche, für welchen der Krümmungshalbmesser ein Maximum ist. Sind die Krümmungshalbmesser nahezu einander gleich, so bilden sich beide Systeme zugleich.* Diefs Gesetz erklärt sich da-

durch, dafs eine Zertheilung der Flüssigkeit (Zerreifsung der Flüssigkeitshaut?) stets nach der Richtung stattfinden mufs, in welcher die Krümmung am stärksten ist. Da die Hauptnormalschnitte einer krummen Fläche stets senkrecht zu einander stehen, so erklärt sich hieraus ebenfalls, dafs die beiden Wellensysteme sich stets senkrecht durchschneiden. Stellt also *ACD* (Fig. 7 Taf. I) den vibrirenden Sector einer in *A* eingeklemmten quadratischen Platte dar, so sind *AB*, *e'f'*, *EF*, *ef* Hauptnormalschnitte der Krümmungen in *AB*. Da nun in *b* am Rande der Normalschnitt *ef* eine stärkere Krümmung als *Bb* hat, so bilden sich am Rande Wellen in der Richtung $\alpha$; da ferner in *a* gegen die Mitte der Tafel hin *ag* eine stärkere Krümmung als *e'f'* hat, so bilden sich hier Wellen in der Richtung $\gamma$. In *g* dagegen zwischen beiden Stellen sind die Krümmungen der Linien *ab* und *EF* nahezu gleich, wodurch das System $\beta$ entsteht.

3. Die Wellenbreite ist von der Höhe der Wellen scheinbar unabhängig, ebenso ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Für die kleinsten Wellenbreiten, welche etwa zwischen den Gränzen 1,42 bis 0,14$^{mm}$ ($\overline{\overline{c}}$ bis $d^8$) liegen, gilt das Schwingungsgesetz: Die Quadrate der Wellenbreiten sind der Schwingungsdauer proportional, also

$$b^2 = mt = m : N.$$

Für gröfsere Breiten wächst die Constante *m* und zwar von $\overline{\overline{c}}$ bis *C* nahe auf das Doppelte. Die Geschwindigkeit *v* der Wellen nimmt also im umgekehrten Verhältnisse der Breiten zu:

$$v = m : b$$

d. i. gerade umgekehrt wie bei grofsen Wasserwellen. Beispielsweise ist für Wasser bei

$$\overline{\overline{\overline{e}}},\ b = 0{,}72^{mm},\quad m = 668,\quad v = 47{,}5^{cm}$$

$$\overline{\overline{\overline{\overline{e}}}},\ b = 0{,}355^{mm},\quad m = 672,\quad v = 94{,}0.$$

4. Die Wellen pflanzen sich in verschiedenen Flüssigkeiten bei gleicher Breite nicht mit gleicher Geschwindigkeit fort, sondern sind jedenfalls abhängig von ihrer specifischen

Cohäsion. Beispielsweise ergeben Versuche, welche von Herrn Schlichting und mir mit Stimmgabeln angestellt wurden, folgende merkliche Verschiedenheiten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Wasser | $b = 2{,}56^{mm}$ | $m = 1290$ | $v = 25{,}0^{cm}$ |
| Quecksilber | $b = 2{,}56^{mm}$ | $m = 838$ | $v = 16{,}4^{cm}$ |
| Wasser | $b = 2{,}75$ | $m = 1374$ | $v = 24{,}7$ |
| Alkohol | $b = 2{,}75$ | $m = 967$ | $v = 17{,}6$ |
| Wasser | $b = 2{,}46$ | $m = 1270$ | $v = 26{,}4$ |
| Aether | $b = 2{,}46$ | $m = 773$ | $v = 15{,}7$ |
| Wasser | $b = 2{,}91$ | $m = 1440$ | $v = 23{,}0$ |
| Petroleum | $b = 2{,}91$ | $m = 1083$ | $v = 18{,}6$ |
| Wasser | $b = 3{,}28$ | $m = 1300$ | $v = 20{,}0$ |
| Salpet. Lösung | $b = 3{,}28$ | $m = 1371$ | $v = 21{,}0$ |
| Wasser | $b = 2{,}90$ | $m = 1450$ | $v = 23{,}0$ |
| Schwefelsäure | $b = 2{,}90$ | $m = 1080$ | $v = 18{,}6$. |

Mit Ausnahme der Salzlösung ist also die Geschwindigkeit der Wellen auf Wasser am gröfsten. Ebenso wurde die Geschwindigkeit der Wellen auf Chloroform vergröfsert durch Beimengung von Weizenmehl.

Zur Vergleichung habe ich diese Versuche mit Terpentin, Alkohol und Chloroform auf Platten wiederholt und gefunden

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Wasser, | Ton $\overline{\overline{cis}} = 554^s$, | $b = 1{,}42^{mm}$, | $m = 1117$, | $v = 39{,}0^{cm}$ |
| Chloroform, | » » | $b = 1{,}11$ , | $m = 681$, | $v = 30{,}7^{cm}$ |
| Wasser, | » $\overline{\overline{g}}$ $768^s$, | $b = 1{,}11$ , | $m = 948$, | $v = 43{,}0^{cm}$ |

Diese Beobachtungen scheinen im Widerspruch mit dem von den Gebrüdern Weber aufgestellten Satze zu stehen. (Vergl. Wellenlehre S. 166. Wüllner Physik I, S. 480). Nach deren von ihnen mitgetheilten Beobachtungen aber nimmt die Geschwindigkeit der Wellen auf Alkohol offenbar gleichfalls eher ab als zu, gegen Wasser z. B. nach Wüllner's Berechnung S. 480:

| Tiefe der Flüssigkeit | Geschwindigkeit der Wellen auf Wasser | auf Quecksilber |
|---|---|---|
| 2,7$^{cm}$ | 55,4$^{cm}$ | 56,7$^{cm}$ |
| 5,4$^{cm}$ | 76,3$^{cm}$ | 65,0$^{cm}$ |
| | | auf Branntwein |
| 10,8$^{cm}$ | 100,0$^{cm}$ | 83,3$^{cm}$ |

Uebrigens sind die Versuche der Gebrüder Weber an Wellen von beträchtlicher Breite, und an einer ganz speziellen Art von Wellen, von Scott Russel *Transmissionswellen*[1]) genannt, angestellt, bei denen die bewegende Kraft durch die herabfallende Flüssigkeitssäule erzeugt wird. Die Gesetze derselben dürften daher mit denen der *oscillirenden Wellen*, welche nicht eine *einzige*, sondern ein ganzes System paralleler, sich gegenseitig durch den hydrostatischen Druck wiedererzeugender Wellen, wie die Meereswellen, bilden, nichts gemein haben. Die Theorie der kleinsten Wellen der hier betrachteten Art findet durch die folgenden Beobachtungen gewissermaſsen nach einer Dimension hin einen Abschluſs. Ob über die Gesetze der Bewegung der gröſseren Wellen von langer Oscillationsdauer, also der Wellen in offenen Gewässern, Beobachtungen vorliegen, um das Gebiet nach der andern Seite hin abzugränzen, ist mir leider unbekannt. Es folgen hier die Resultate meiner Beobachtungen, welche trotz der Sorgfalt, mit der sie angestellt wurden, doch nur einen Anhalt zu wiederholten ausgedehnteren Versuchen zu geben beanspruchen.

1) John Scott Russel, *on waves. Report. Brit. Assoc. f. Advanc. of Science, Meeting VII.* 1837. *XII.* 1842.

(Siehe die Tabelle S. 116 und 117.)

| Ton | $N$ in $1^{sec.}$ | Wellen auf $1^{cm}$ | Wellenbreite $b$ | Constante $m$ | Geschwindigkeit $v$ | Entstehungsart. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| — | — | — | $4—20^{m}$ | — | $10—30^{m}$ | Meereswellen |
| — | 1,16 | 0,015 | $666^{mm}$ | 517000 | $77,8^{cm}$ | In offenem Wasser bei starkem Winde |
| — | 5,0 | 0,15 | 64 | 20480 | 32,0 | |
| — | 4,5 | 0,20 | 50 | 11250 | 11,25 | in schwingenden Gefäſsen |
| — | 6,75 | 0,27 | 34 | 7861 | 11,5 | » » » |
| — | 8,0 | 0,33 | 30 | 7200 | 12,0 | » » » |
| *D* | 36,6 | 1,3 | 7,6 | 2115 | 13,9 | » » » |
| $\overline{F}$ | 43,6 | 1,5 | 6,7 | 1918 | 14,5 | Lineal von Guttapercha |
| $\overline{Fis}$ | 46,2 | 1,4 | 7,0 | 2254 | 16,1 | in schwingenden Gefäſsen |
| $\overline{Gis}$ | 52,0 | 1,75 | 5,7 | 1700 | 14,9 | Lineal von Guttapercha |
| $\overline{A}$ | 55,0 | 1,6 | 6,0 | 1980 | 16,5 | in schwingenden Gefäſsen |
| $\overline{D}$ | 73,4 | 2,0 | 5,0 | 1835 | 18,4 | » » » |
| *Gis* | 103,8 | 2,35 | 4,3 | 1839 | 22,1 | Lineal von Guttapercha |
| *c* | 128 | 3,17 | 3,14 | 1280 | 20,7 | Stimmgabel auf Wasser |
| » | » | 3,9 | 2,56 | 838 | 16,4 | » » Quecksilber |
| » | » | 3,7 | 2,75 | 967 | 17,6 | » » Alkohol |
| » | » | 4,07 | 2,46 | 773 | 15,7 | » » Aether |
| » | » | 3,44 | 2,91 | 1083 | 18,6 | » » Petroleum |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| » | » | 3,45 | 2,90 | 1080 | 18,5 | » » Schwefelsäure |
| » | » | 3,05 | 3,28 | 1371 | 21,0 | » » Salpeterlösung |
| *dis* | 156 | 3,0 | 3,34 | 1700 | 26,0 | Ovale Glasscheibe |
| *f* | 175 | 3,5 | 2,86 | 1432 | 24,8 | Guttapercha |
| *fis* | 185 | 3,75 | 2,66 | 1316 | 24,6 | Guttapercha |
| *a* | 220 | 4,15 | 2,40 | 1264 | 26,4 | » |
| $\overline{c}$ | 256 | 4,6 | 2,18 | 1216 | 27,8 | Stimmgabel auf Wasser |
| » | » | 6,9 | 1,44 | 532 | 18,5 | » » » Quecksilber |
| » | » | 6,4 | 1,56 | 624 | 20,0 | » » » Alkohol |
| $\overline{cis}$ | 277 | 4,5 | 2,20 | 1340 | 30,5 | Guttapercha |
| $\overline{a}$ | 440 | 6,2 | 1,60 | 1128 | 35,2 | Stimmgabel auf Wasser |
| $\overline{a}+..$ | 450 | 6,8 | 1,48 | 1092 | 33,3 | Quadrat. Platte |
| $\overline{\overline{cis}}$ | 554 | 7,0 | 1,42 | 1117 | 39,0 | Quadrat. Tafel und Kreis à 4 Sect. |
| » | » | 7,7 | 1,30 | 936 | 36,0 | » » a. Alkoh. u. Terpent. |
| » | » | 9,0 | 1,11 | 681 | 30,7 | » » auf Chloroform |
| » | » | 7,7 | 1,30 | 936 | 36,0 | » Chloroform mit Weizenmehl |
| $\overline{\overline{d}}$ | 587 | 7,5 | 1,34 | 1040 | 39,0 | Kreistafel à 4 Sectoren |
| $\overline{\overline{fis}}$ | 740 | 8,8 | 1,14 | 948 | 42,2 | Dreieckige Tafel |
| $e^3$ | 1348 | 14,0 | 0,72 | 668 | 47,5 | Kreistafel à 6 Sect. |
| $d^4$ | 2349 | 19,5 | 0,52 | 620 | 61,0 | » à 8 » |
| $a^4$ | 3520 | 24,0 | 0,42 | 612 | 73,5 | » à 10 » |
| $e^5$ | 5272 | 28,0 | 0,355 | 672 | 94,0 | » à 12 » |
| $h^5$ | 7700 | 32,5 | 0,30 | 720 | 115,0 | » à 14 » |