Ein Satz über vertauschbare Matrizen und seine Anwendung in der Theorie linearer Differentialgleichungen.

Von J. Plemelj in Wien.

Die particulären Integrale, welche ein Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung bilden, erleiden bei gemeinsamer Fortsetzung auf einem Wege, der die Coefficienten der Differentialgleichung in die ursprünglichen Werte zurückführt, bekanntlich eine lineare Substitution (Fundamentalsubstitution) und jede mit dieser ähnliche Substitution gehört als Fundamentalsubstitution zu einem bestimmten Fundamentalsysteme. Von grundlegender Bedeutung für die Theorie linearer Differentialgleichungen ist der Satz, dass sich zu jeder linearen Substitution eine andere ähnliche von weit einfacherer (canonischer) Gestalt auffinden lässt, welche als Fundamentalsubstitution aufgefasst — nach Riemann und Fuchs¹⁾ — mit Leichtigkeit die analytische Form der Integrale im Bereiche der Fortsetzung erkennen lässt.

Es gehört aber im allgemeinen zu jedem Fortsetzungswege, von der angegebenen Beschaffenheit ein eigenes Fundamentalsystem, Fortsetzungswegen jedoch, denen vertauschbare Fundamentalsubstitutionen zukommen, entspricht ein gemeinsames canonisches Fundamentalsystem. Die Folge dieses Satzes ist, dass die Integration einer linearen Differentialgleichung, deren Monodromiegruppe aus lauter vertauschbaren Substitutionen besteht, auf eine Kette linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit eindeutigen, bei Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe in einer mehrblättrigen Riemann'schen Fläche auch rationalen Coefficienten, zurückführbar ist.

¹⁾ Riemann, Inauguraldissertation, Göttingen 1851.

„Crelle's Journal, Band 54.

Fuchs, Crelle's Journal, Band 66.

Vgl. Schlesinger: Theorie der Differentialgleichungen. Band I. Leipzig 1895. Seite 96 ff., wo die bezügliche Literatur angegeben ist.

und dass in (1) sämtliche Coefficienten a_{ik} verschwinden, wenn nicht die Indices i und k zur selben Gruppe gehören, so sagen wir, dass die Matrix zerfällt. Sind z. B. $\alpha, \beta, \dots, \kappa$ und $\lambda, \mu, \dots, \sigma$ zwei Gruppen, in welche die Zahlen $1, 2, \dots, n$ auf diese Weise sich sondern lassen, dann können wir statt (2a) die zwei Substitutionen

$$\begin{aligned} (\Theta z_\alpha, \Theta z_\beta, \dots, \Theta z_\kappa) &= (a_{ik}) (z_\alpha, z_\beta, \dots, z_\kappa) \\ \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} &= \alpha, \beta, \dots, \kappa \\ (\Theta z_\lambda, \Theta z_\mu, \dots, \Theta z_\sigma) &= (a_{lm}) (z_\lambda, z_\mu, \dots, z_\sigma) \\ \left. \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} &= \lambda, \mu, \dots, \sigma \end{aligned}$$

schreiben und das Bestehen zweier oder mehrerer Substitutionen dieser Form ist äquivalent mit der Zerfallbarkeit der Matrix.

Durch die Elemente $z_\alpha, z_\beta, \dots, z_\kappa$ kann ein aus sämtlichen linearen Formen bestehendes Größengebiet definiert werden, welches die Eigenschaft besitzt, dass auch die durch die Substitution Θ nach (2) zugeordneten Elemente wieder zum selben Gebiete gehören. Wir wollen es ein Theilgebiet in Ω_n nennen.

Setzen wir analog, wie in (2a)

$$(3) \quad (\Theta^\lambda z_1, \Theta^\lambda z_2, \dots, \Theta^\lambda z_n) = \Theta^\lambda (z_1, z_2, \dots, z_n),$$

wo, wie üblich, Θ^λ die λ -mal hintereinander mit sich selbst componierte Substitution Θ bedeutet, so haben wir allgemein

$$(4a) \quad \Theta^\kappa \Theta^\lambda z = \Theta^{\kappa+\lambda} z = \Theta^\lambda \Theta^\kappa z$$

und speciell $\Theta^1 z = \Theta z$, $\Theta^0 z = z$ zu nehmen.

Werden die Zuordnungen in zweifacher Weise durch zwei vertauschbare Substitutionen Θ_1 und Θ_2 definiert, so ergibt sich aus

$$\Theta_1^\kappa \Theta_2^\lambda (z_1, z_2, \dots, z_n) = \Theta_2^\lambda \Theta_1^\kappa (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

die Gleichung

$$(4b) \quad \Theta_1^\kappa \Theta_2^\lambda z = \Theta_2^\lambda \Theta_1^\kappa z,$$

wobei die Bedeutung von $\Theta_1^\kappa \Theta_2^\lambda z$ unmittelbar klar ist, da $\Theta_2^\lambda z$ ein Element aus Ω_n ist.

Jede Größe der Form

$$(5) \quad \mathfrak{A}(z) = \sum_{a_1 a_2} a_{a_1 a_2} \Theta_1^{a_1} \Theta_2^{a_2} z,$$

wo die $a_{a_1 a_2}$ beliebige Constanten sind, gehört auch zum Gebiete Ω_n , weshalb wir mit Rücksicht auf (4b) bekommen:

$$(6) \quad \Theta_1^{\beta_1} \Theta_2^{\beta_2} \mathfrak{A}(z) = \mathfrak{A}(\Theta_1^{\beta_1} \Theta_2^{\beta_2} z).$$

Setzt man nun $\mathfrak{A}(z)$ als x in

$$\mathfrak{B}(x) = \sum_{\beta_1 \beta_2} \mathfrak{b}_{\beta_1 \beta_2} \theta_1^{\beta_1} \theta_2^{\beta_2} x$$

ein und schreibt dafür $\mathfrak{B}\mathfrak{A}(z)$, so folgt

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A}(z) = \sum_{\beta_1 \beta_2} \mathfrak{b}_{\beta_1 \beta_2} \theta_1^{\beta_1} \theta_2^{\beta_2} \mathfrak{A}(z)$$

oder nach (6)

$$(7) \quad \mathfrak{B}\mathfrak{A}(z) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}(z)$$

und man sieht zugleich, dass $\mathfrak{A}\mathfrak{B}(z)$ ebenso zu bilden ist, als wären $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die algebraischen Ausdrücke

$$\mathfrak{A} = \sum_{\alpha_1 \alpha_2} a_{\alpha_1 \alpha_2} \theta_1^{\alpha_1} \theta_2^{\alpha_2}, \quad \mathfrak{B} = \sum_{\beta_1 \beta_2} \mathfrak{b}_{\beta_1 \beta_2} \theta_1^{\beta_1} \theta_2^{\beta_2}$$

von θ_1 und θ_2 und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ihr Product, z aber nur ein anzuhängender Factor. Mit Größen der Form (5) wird man also ebenso zu rechnen haben, wie mit algebraischen Ausdrücken von θ_1 und θ_2 , man wird in diesem Sinne von ihren Producten und Theilern sprechen können. Wir lassen sie durch gothische Zeichen hervortreten.

Werden durch eine lineare Substitution

$$(8a) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

n Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ bestimmt und verschwindet nicht die Determinante der Matrix T , so lassen sich die durch (8a) repräsentierten n Gleichungen nach $z_1, z_2, \dots, z_n$ auflösen, und man bekommt in üblicher Bezeichnungsweise

$$(8b) \quad (z_1, z_2, \dots, z_n) = T^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Sämmtliche Elemente aus Ω_n sind also auch als Linearformen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ darstellbar. Zwischen $\theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_n$ und $x_1, x_2, \dots, x_n$ besteht nach (8) und (2) die Beziehung

$$(9) \quad (\theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_n) = T \theta T^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

und es wird, wenn

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \\ \theta x &= c_1 \theta x_1 + c_2 \theta x_2 + \dots + c_n \theta x_n \end{aligned}$$

gesetzt wird, dieselbe Zuordnung der Elemente in Ω_n wie durch die Gleichungen (2) bestimmt. Jedes so bestimmte System von

$$(14) \quad \mathfrak{R} = \Theta^x + a_1 \Theta^{x-1} + \dots + a_{x-1} \Theta + a_x$$
$$D.\mathfrak{R} = \left| \begin{array}{ccccccc} \Theta^x, & \Theta^{x-1}, & \dots, & \Theta, & 1 \\ c_1^x, & c_1^{x-1}, & \dots, & c_1^1, & c_1^0 \\ c_2^x, & c_2^{x-1}, & \dots, & c_2^1, & c_2^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_n^x, & c_n^{x-1}, & \dots, & c_n^1, & c_n^0 \end{array} \right|,$$
$$D, \mathfrak{R} = (-1)^x \left| c_v^\lambda - \theta \cdot c_v^{\lambda-1} \right|_{\lambda \atop v} = 1, 2, \dots, x,$$
$$(15) \quad c_v^\lambda = c_1^{\lambda-1} \alpha_{1v} + c_2^{\lambda-1} \alpha_{2v} + \dots + c_n^{\lambda-1} \alpha_{nv}.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} |c_{\nu}^{\lambda}| = D |a_{\lambda \nu}| \\ \lambda \\ \nu \end{array} \right\} = 1, 2, \dots, z.$$
$$|c_v^i - \Theta c_v^{i-1}| = D. \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} - \Theta, \quad \alpha_{12}, \quad \dots, \quad \alpha_{1x} \\ \alpha_{21}, \quad \alpha_{22} - \Theta, \quad \dots, \quad \alpha_{2x} \\ \dots \\ \alpha_{x1}, \quad \alpha_{x2}, \quad \dots, \quad \alpha_{xx} - \Theta \end{array} \right. \\ \lambda_v \left\{ \begin{array}{l} 1, 2, \dots, x \end{array} \right.$$
$$(16) \quad \mathfrak{R} = (-1)^{\varepsilon} \left| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} - \Theta, & \alpha_{12}, & \dots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} - \Theta, & \dots, & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \dots, & \alpha_{nn} - \Theta \end{array} \right|$$

den algebraischen Ausdruck

$$(16a) \quad \mathfrak{R} = \Theta^x + a_1 \Theta^{x-1} + \dots + a_{x-1} \Theta + a_x$$

zu bestimmen, es verschwindet dann nach (11) und (14), weil die Coefficienten $c_1^0, c_2^0, \dots, c_x^0$ ausgefallen sind,

$$(16b) \quad \mathfrak{R}(z) = \Theta^x z + a_1 \Theta^{x-1} z + \dots + a_{x-1} \Theta z + a_x z$$

für jedes Element aus Ω_x . $\mathfrak{R}(z)$ nennen wir den zur Substitution $S = (\alpha_{\lambda\mu})$ (zum Gebiete Ω_x) gehörigen charakteristischen Ausdruck.

Die Coefficienten $a_1, a_2, \dots, a_x$, die sich so ergeben haben, sind sämtlich endlich und befriedigen das Gleichungssystem (13) identisch, weshalb es nicht nothwendig ist den Fall, wo bei beliebiger Wahl von $c_1^0, c_2^0, \dots, c_x^0$ die Determinante D verschwindet, gesondert zu betrachten. Es kann aber $\mathfrak{R}(z)$ auch von der Wahl des Fundamentalsystems in Ω_x individuell gar nicht abhängen, d. h. man muss durch dieses Verfahren aus jeder Substitution ASA^{-1} in Ω_x denselben Ausdruck $\mathfrak{R}(z)$ bekommen. Dies lässt sich folgendermaßen einsehen:

Könnten sich nämlich zwei verschiedene Ausdrücke $\mathfrak{R}(z)$ und $\mathfrak{R}_1(z)$ ergeben, so wäre $\mathfrak{R}(z) - \mathfrak{R}_1(z) = 0$ eine Relation, welche von sämtlichen Elementen aus Ω_x erfüllt wäre, zudem aber einen niedrigeren als den x -ten Grad hätte. Wenn wir nun über die $\alpha_{\lambda\mu}$ keine Voraussetzung machen, kann es eine solche Relation nicht geben, denn das zu (13) analoge Gleichungssystem enthielte sonst weniger zu bestimmende Größen als Gleichungen. Diese würden aber im allgemeinen keine Lösung zulassen. Es ist also $\mathfrak{R}_1(z) = \mathfrak{R}(z)$ eine identische Gleichheit, welche folglich auch durch Specialfälle nicht gestört werden kann.

Bestimmt man aus

$$(17) \quad \mathfrak{F} = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - \Theta, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \Theta, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} - \Theta \end{vmatrix}$$

die Ausdrücke

$$(17a) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \Theta^n + a_1 \Theta^{n-1} + \dots + a_{n-1} \Theta + a_n \\ \mathfrak{F}(z) &= \Theta^n z + a_1 \Theta^{n-1} z + \dots + a_{n-1} \Theta z + a_n z, \end{aligned}$$

so verschwindet $\mathfrak{F}(z)$ für jedes Element aus Ω_n . Man nennt $\mathfrak{F} = 0$ die zur Substitution Θ gehörige charakteristische Gleichung

3.

Es sei $\mathfrak{M}(z)$ der charakteristische Ausdruck μ -ten Grades in einem Gebiete Ω_μ , in welchen sämtliche Bestandtheile durch die μ linear unabhängigen Elemente $z_1, z_2, \dots z_\mu$ linear darstellbar sind.

Zerlegen wir $\mathfrak{M}(z)$ in

$$\mathfrak{M}(z) = \mathfrak{A} \mathfrak{B}(z),$$

so können wir unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}(z)$ und $\mathfrak{B}(z)$ theilerfremd sind, zwei derartige Ausdrücke $\mathfrak{A}_1(z)$ und $\mathfrak{B}_1(z)$ nach dem Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Theilers ermitteln, dass

$$(18) \quad z = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}(z) + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}(z).$$

Wir setzen nun

$$x = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}(z),$$

$$y = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}(z)$$

und haben für die Elemente x und y die Gleichungen

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}(x) &= 0, \\ \mathfrak{B}(y) &= 0. \end{aligned}$$

Wenn wir auf diese Weise das Fundamentalsystem $z_1, z_2, \dots z_\mu$ aus Ω_μ zerlegen, so bekommen wir zwei Systeme

$$(20) \quad \begin{aligned} x_1, x_2, \dots x_\mu \\ y_1, y_2, \dots y_\mu, \end{aligned}$$

deren Elemente bezüglich den Gleichungen $\mathfrak{A}(z) = 0$ und $\mathfrak{B}(z) = 0$ genügen, und durch welche sich zufolge (18) jedes Element in Ω_μ linear ausdrücken lässt. Da aber umgekehrt jedes dieser Elemente (20) auch durch $z_1, z_2, \dots z_\mu$ ausdrückbar ist, so gibt es in (20) genau μ linear unabhängige Elemente, welche folglich $z_1, z_2, \dots z_\mu$ ersetzen können.

Wenn nun in (20) unter den x

$$(21a) \quad x_1, x_2, \dots x_\kappa$$

und ebenso

$$(21b) \quad y_1, y_2, \dots y_\lambda$$

unter den y die sämtlichen von einander linear unabhängigen Elemente bedeuten, dann kann es auch keine Relation der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_\kappa x_\kappa = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_\lambda y_\lambda$$

geben, denn das Element

$$\begin{aligned} z &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_\kappa x_\kappa \\ &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_\lambda y_\lambda \end{aligned}$$

könnte, da es $\mathfrak{A}(z)$ und $\mathfrak{B}(z)$ zugleich zum Verschwinden bringen würde, nach (18) selbst von Null nicht verschieden sein. Es ist also $\kappa + \lambda = \mu$ und (21a) und (21b) bildene in Fundamentalsystem in Ω_μ .

Da aber

$$\mathfrak{A} \Theta x = \Theta \mathfrak{A}(x)$$

ist, so genügen die Elemente

$$\Theta x_1, \Theta x_2, \dots, \Theta x_\kappa$$

selbst der Relation $\mathfrak{A}(z) = 0$ und müssen, da die Gleichungen $\mathfrak{A}(z) = 0$, $\mathfrak{B}(z) = 0$ keine gemeinsame Lösung besitzen, durch

$$x_1, x_2, \dots, x_\kappa$$

allein linear darstellbar sein. Diese Darstellung sei

$$(22a) \quad (\Theta x_1, \Theta x_2, \dots, \Theta x_\kappa) = (\alpha_{ik}) (x_1, x_2, \dots, x_\kappa)$$

$$\left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, \dots, \kappa$$

und analog

$$(22b) \quad (\Theta y_1, \Theta y_2, \dots, \Theta y_\lambda) = (\beta_{ik}) (y_1, y_2, \dots, y_\lambda)$$

$$\left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, \dots, \lambda$$

Nach dem im zweiten Abschnitt entwickelten Verfahren ergibt sich aus (22a) ein Ausdruck $\mathfrak{R}(z)$ von κ -ten Grade, der für sämtliche Elemente $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ verschwindet und ebenso soll $\mathfrak{S}(z)$ dieselbe Eigenschaft bezüglich der Elemente $y_1, y_2, \dots, y_\lambda$ besitzen.

Die Größen $x_1, x_2, \dots, x_\kappa, y_1, y_2, \dots, y_\lambda$ constituieren aber in Ω_μ ein Fundamentalsystem, es ergibt sich also nach Abschnitt 2

$$\mathfrak{M} = (-1)^\mu \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \Theta, & \dots, & \alpha_{1\kappa}, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\kappa 1}, & \dots, & \alpha_{\kappa\kappa} - \Theta, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \dots, & 0, & \beta_{11} - \Theta, & \dots, & \beta_{1\lambda} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & \dots, & 0, & \beta_{\lambda 1}, & \dots, & \beta_{\lambda\lambda} - \Theta \end{vmatrix},$$

d. h., die charakteristische Function $\mathfrak{M}(z)$ zerfällt genau in

$$\mathfrak{M}(z) = \mathfrak{R}(z) \mathfrak{S}(z).$$

Ist nun $\Theta z - \omega z$ ein Theiler von $\mathfrak{R}(z)$, so gibt es mindestens ein nicht verschwindendes Element

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_\kappa x_\kappa,$$

für welches

$$\Theta x - \omega x = 0$$

$$\begin{aligned}
&\text{zu } \mathfrak{G}_1^{\lambda_1}(z) = 0 \text{ genau } \lambda_1 \text{ Elemente} \\
&\text{" } \mathfrak{G}_2^{\lambda_2}(z) = 0 \quad \text{"} \quad \lambda_2 \quad \text{"} \\
&\dots\dots\dots \\
&\text{" } \mathfrak{G}_\sigma^{\lambda_\sigma}(z) = 0 \quad \text{"} \quad \lambda_\sigma \quad \text{"} \quad ,
\end{aligned}$$

welche sämmtlich untereinander linear unabhängig sind und wegen $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\sigma = n$ ein Fundamentalsystem in Ω_μ bilden.

Wenn $\mathfrak{G}(z) = 0$ durch die λ Elemente $x_1, x_2, \dots, x_\lambda$ befriedigt wird, so besteht zwischen diesen und den Elementen $\theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_\lambda$ eine lineare Substitution. Jedes dem Satze III entsprechende Fundamentalsystem wollen wir ein canonicches Fundamentalsystem und ebenso die dazugehörige Substitution $T\theta T^{-1}$ in diesem Falle canonicch nennen. Es können zwar die Elemente der Theilgebiete noch weiter in Untergruppen eingetheilt werden, wobei die Matrix $T\theta T^{-1}$ die sogenannte Normalform annimmt, denn es gibt nach dem Satze I in jedem Theilgebiete sogar Elemente der Eigenschaft $\theta z - \omega z = 0$. Auf diese Eintheilung kommt es jedoch hier nicht an, weshalb wir sie unterlassen; wir bemerken nur, dass wir durch die Substitution T , welche das canonicche Fundamentalsystem mit dem ursprünglichen $z_1, z_2, \dots, z_n$ verbindet, das Zerfallen der Substitution (Matrix) $T\theta T^{-1}$ bewirkt haben.

4.

Nach diesen Entwicklungen wollen wir in Ω_n durch p miteinander vertauschbare Substitutionen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ eine Zuordnung der Elemente zu einander in dem im Abschnitt 1 angegebenen Sinne bestimmt annehmen. Die diesen Substitutionen entsprechenden charakteristischen Ausdrücke seien bezüglich $\mathfrak{F}_1(z), \mathfrak{F}_2(z), \dots, \mathfrak{F}_p(z)$.

Wie wir bereits bewiesen haben, gibt es zu einem λ -fachen Lineartheiler $\mathfrak{G}_1^\lambda(z)$ von $\mathfrak{F}_1(z)$ genau λ linear unabhängige Elemente, etwa

$$z_1, z_2, \dots, z_\lambda$$

für welche $\mathfrak{G}_1^\lambda(z) = 0$ wird. Aus (7) folgt wegen der Vertauschbarkeit der Substitutionen θ_1 und θ_2 die Gleichung $\mathfrak{G}_1^\lambda \theta_2 z = \theta_2 \mathfrak{G}_1^\lambda(z)$, woraus man ersieht, dass auch die Elemente

$$\theta_2 z_1, \theta_2 z_2, \dots, \theta_2 z_\lambda$$

der Gleichung $\mathfrak{G}_1^\lambda(z) = 0$ genügen, also durch $z_1, z_2, \dots, z_\lambda$ darstellbar sind. Es sei diese Darstellung

$$(\theta_2 z_1, \theta_2 z_2, \dots, \theta_2 z_\lambda) = A(z_1, z_2, \dots, z_\lambda).$$

Man sieht also, dass die Substitutionen $T\Theta_1 T^{-1}$ und $T\Theta_2 T^{-1}$ gleichzeitig in derselben Weise zerfallen.

Aus der Substitution A ergibt sich nach Abschnitt 2 ein Ausdruck

$$\mathfrak{R}_2(z) = \Theta_2^j z + \nu_1 \Theta_2^{j-1} z + \dots + \nu_{j-1} \Theta_2 z + \nu_j z$$

der für sämtliche Elemente $z_1, z_2, \dots, z_\kappa$ verschwindet. $\mathfrak{R}_2(z)$ ist offenbar ein Theiler von $\mathfrak{F}_2(z)$. Ein κ -facher Lineartheiler $\mathfrak{G}_2^\kappa(z)$ von $\mathfrak{R}_2(z)$ verschwindet nach dem Satze II genau für κ linear unabhängige Elemente, etwa

$$z_1, z_2, \dots, z_\kappa$$

Da nun aber nach (6) wieder $\mathfrak{G}_2^\kappa \Theta_1 z = \Theta_1 \mathfrak{G}_2^\kappa(z)$ folgt, so verschwindet $\mathfrak{G}_2^\kappa(z)$ auch für die Elemente

$$\Theta_1 z_1, \Theta_1 z_2, \dots, \Theta_1 z_\kappa.$$

Aus der Substitution, welche demnach zwischen $\Theta_1 z_1, \Theta_1 z_2, \dots, \Theta_1 z_\kappa$ und $z_1, z_2, \dots, z_\kappa$ bestehen muss, ergibt sich ein charakteristischer Ausdruck κ -ten Grades, welcher als Theiler von $\mathfrak{G}_1^j(z)$ nur $\mathfrak{G}_1^\kappa(z)$ sein kann. Die Elemente

$$z_1, z_2, \dots, z_\kappa$$

befriedigen folglich zugleich die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{G}_1^\kappa(z) = 0, \mathfrak{G}_2^\kappa(z) = 0.$$

Ebenso können wir schließen, dass die Elemente

$$\Theta_3 z_1, \Theta_3 z_2, \dots, \Theta_3 z_\kappa$$

diesen beiden Gleichungen genügen, also durch $z_1, z_2, \dots, z_\kappa$ linear darstellbar sind. Hebt man aus der sich ergebenden charakteristischen Function wieder einen Lineartheiler $\mathfrak{G}_3(z)$ heraus und bezeichnet mit ν seine Vielfachheit, so gibt es genau ν linear unabhängige Elemente, welche $\mathfrak{G}_3^\nu(z) = 0$ entsprechen. Diese ν Elemente genügen also zugleich den drei Gleichungen

$$\mathfrak{G}_1^\nu(z) = 0, \mathfrak{G}_2^\nu(z) = 0, \mathfrak{G}_3^\nu(z) = 0.$$

Auf gleiche Weise weiter schließend bekommen wir den

Satz IV. Es lässt sich im Gebiete Ω_n unter der Voraussetzung der Vertauschbarkeit der Substitutionen $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p$ ein System von n linear unabhängigen Elementen bestimmen, welche in derartige Gruppen zerfallen, dass sämtliche Elemente einer solchen m -gliedrigen Gruppe die p Gleichungen

$$\mathfrak{G}_1^m(z) = 0, \mathfrak{G}_2^m(z) = 0, \dots, \mathfrak{G}_p^m(z) = 0$$

zugleich befriedigen. Dabei ist

$$\mathfrak{G}_i^m(z) = \Theta_i^m z - \binom{m}{1} \omega_i \Theta_i^{m-1} z + \binom{m}{2} \omega_i^2 \Theta_i^{m-2} z - \dots + (-\omega_i)^m z$$

und ω_i ist eine Wurzel der aus der Substitution Θ_i sich ergebenden charakteristischen Gleichung.

Durch dasselbe Verfahren, das wir hier beobachtet haben, läßt sich mit Leichtigkeit nachweisen, dass es in jeder Gruppe auch in diesem Falle mindestens ein Element gibt, für welches die p Gleichungen

$$\Theta_1 z = \omega_1 z, \Theta_2 z = \omega_2 z, \dots, \Theta_p z = \omega_p z$$

bestehen. Ein den Bedingungen des Satzes IV entsprechendes Fundamentalsystem in Ω_n hat die Eigenschaft, dass es gleichzeitig bezüglich aller Substitutionen canonisch ist.

Die Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ lassen sich demnach in derartige Gruppen einteilen, dass jede dieser Zahlen in einer und nur in einer Gruppe vorkommt, und, dass in allen Matrizen $T\Theta_1 T^{-1}$, $T\Theta_2 T^{-1}, \dots, T\Theta_p T^{-1}$ sämtliche Coefficienten a_{ik} verschwinden, wenn nicht i und k in dieselbe Gruppe fallen. Wir sagen, dass die Matrizen $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p$ bei der Transformation durch T gleichzeitig und zwar alle in derselben Weise zerfallen. Dem Satze IV können wir dann auch die Fassung geben:

Zu einer beliebigen Anzahl unter einander vertauschbaren linearen Substitutionen (Matrizen) $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p$ lässt sich stets eine derartige Substitution T auffinden, dass die ähnlichen Substitutionen $T\Theta_1 T^{-1}$, $T\Theta_2 T^{-1}, \dots, T\Theta_p T^{-1}$ in derselben Weise und zwar derart zerfallen, dass die charakteristischen Gleichungen einzelner Substitutionen, in welche irgend ein $T\Theta_i T^{-1}$ gespalten wurde, nur je eine, wenn auch vielleicht vielfache Wurzel besitzen.

5.

In Anwendung des erhaltenen Resultates auf lineare Differentialgleichungen lassen wir $z_1, z_2, \dots, z_n$ ein Fundamentalsystem derselben bedeuten und wollen entsprechend mit $\Theta_1 z_1, \Theta_2 z_2, \dots, \Theta_i z_n$ die Fortsetzungen seiner Elemente auf einem Wege W_i , der die Coefficienten der Differentialgleichung in die ursprünglichen Werte zurückführt und dem die Fundamentalsubstitution Θ_i in den $z_1, z_2, \dots, z_n$ und ihren Fortsetzungen entspricht, bezeichnen. Die durch die Gleichungen (2) definierte Zuordnung der Elemente zu einander entspricht also

dessen logarithmische Ableitung demnach eindeutig ist. Das Integral x genügt also einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$E(z) = 0$$

mit eindeutigen Coefficienten. Setzt man nun

$$R(z) = R_1 E(z),$$

so hat die Differentialgleichung $(m - 1)$ -ter Ordnung

$$R_1(z) = 0,$$

wegen

$$\Theta_{i_1}^{\alpha_1} \Theta_{i_2}^{\alpha_2} F(z) = E(\Theta_{i_1}^{\alpha_1} \Theta_{i_2}^{\alpha_2} z) = \Theta_{i_2}^{\alpha_2} \Theta_{i_1}^{\alpha_1} E(z)$$

ebenfalls eine vertauschbare Monodromiegruppe und eindeutige Coefficienten, wodurch nachgewiesen ist, dass die Integration einer linearen Differentialgleichung mit vertauschbarer Monodromiegruppe auf eine Kette von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten zurückführbar ist, also durch Quadraturen geleistet werden kann. Aber selbst die analytische Form der Integrale lässt sich, wie nach Fuchs aus der canonischen Fundamentalsubstitution für die Umgebung eines singulären Punktes, hier zugleich für die Riemann'sche Fläche angeben. Der vielbehandelte Fall von Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten und eindeutigen Integralen ordnet sich hier als ein einfachster Specialfall ein.