Die Construction des Siebenzehneckes der Lemniscata.

Von Herrn Thomas Clausen.

Es ist merkwürdig, dafs die von *Abel* eingeführte Theilung der elliptischen Transcendenten in eine imaginaire Anzahl Theile, die Theilung des Quadranten der Lemniscata in siebenzehn Theile leicht und einfach macht. Da, wenn man nach *Le-*

gendre die Amplitude des einfachen Bogens φ setzt, und dessen Cosinus γ die Amplitude, des vierfachen Bogens $= \varphi_4$; so werden die trigonometrischen Functionen desselben für die Lemniscata, in der $e^2 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 - 8\gamma^2 - 12\gamma^4 - 8\gamma^6 + 38\gamma^8 + 8\gamma^{10} - 12\gamma^{12} + 8\gamma^{14} + \gamma^{16} \\ \kappa \cos \varphi_4 &= 1 + 8\gamma^2 - 12\gamma^4 + 8\gamma^6 + 38\gamma^8 - 8\gamma^{10} - 12\gamma^{12} - 8\gamma^{14} + \gamma^{16} \\ \kappa \Delta \varphi_4 &= 1 + 20\gamma^4 - 26\gamma^8 + 20\gamma^{12} + \gamma^{16} \\ \kappa \sin \varphi_4 &= -4\sqrt{2\gamma} \cdot \sqrt{(1-\gamma^4)(1-5\gamma^4-5\gamma^8+\gamma^{12})}. \end{aligned}$$

Bedeutet i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$; so wird der Cosinus der Amplitude des $(4+i)$ fachen Bogens:

$$\frac{1 - 88\gamma^4 + 92\gamma^8 - 872\gamma^{12} + 1990\gamma^{16} - 872\gamma^{20} + 92\gamma^{24} - 88\gamma^{28} + \gamma^{32} + 4i[1 + 14\gamma^4 - 146\gamma^8 + 182\gamma^{12} - 182\gamma^{20} + 146\gamma^{24} - 14\gamma^{28} - \gamma^{32}]}{1 + 24\gamma^4 + 524\gamma^8 - 1400\gamma^{12} + 886\gamma^{16} - 408\gamma^{20} + 748\gamma^{24} - 136\gamma^{28} + 17\gamma^{32}} \cdot \gamma$$

Der gemeinschaftliche Theiler im Zähler und Nenner ist:

$$1 + 12\gamma^4 - 10\gamma^8 - 20\gamma^{12} + \gamma^{16} + 4i\gamma^4(5 - 7\gamma^4 + 3\gamma^8 - \gamma^{12}),$$

nach dessen Wegschaffung dieser Ausdruck:

$$\frac{\gamma^{16} + 12\gamma^{12} - 10\gamma^8 - 20\gamma^4 + 1 + 4i(-5\gamma^{12} + 7\gamma^8 - 3\gamma^4 + 1)}{1 + 12\gamma^4 - 10\gamma^8 - 20\gamma^{12} + \gamma^{16} - 4i\gamma^4(5 - 7\gamma^4 + 3\gamma^8 - \gamma^{12})} \cdot \gamma$$

wird. Setzt man $\gamma^4 = x - (3 - 5i)$; so erhält man für den Zähler die Gleichung:

$$x^4 + (86 + 208i)x^2 - (1824 + 360i)x + 3053 - 3088i$$

die sich in die zwei Factoren:

$$\begin{aligned} x^2 + 6i\sqrt{(1+4i)x + 25 + 32i} - (34 + 16i)\sqrt{(1+4i)} \\ x^2 - 6i\sqrt{(1+4i)x + 25 + 32i} + (34 + 16i)\sqrt{(1+4i)} \end{aligned}$$

zerlegen läfst. Die Zahlenwerthe für γ^4 sind

$$\begin{aligned} + 0,74886 \ 32030 \ 63 + 0,19854 \ 44586 \ 79 i \\ \pm \sqrt{+ 0,42255 \ 90519 \ 66 + 0,09487 \ 91884 \ 24 i} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} - 6,74886 \ 32030 \ 63 + 9,80145 \ 55413 \ 21 i \\ \pm \sqrt{-68,42255 \ 90519 \ 66 - 136,09487 \ 91884 \ 24 i} \end{aligned}$$

Die ersten beiden sind:

$$+ 1,40294 \ 23140 \ 99 + 0,27107 \ 32910 \ 66 i$$

und

$$+ 0,09478 \ 40920 \ 27 + 0,12601 \ 56262 \ 93 i.$$

Die Amplitude φ entspricht einem Bogen $\frac{mK}{4+i}$ wenn m eine ganze Zahl und K der Quadrant der Lemniscata ist. Die trigonometrischen Functionen der Amplitude φ' , die dem Bogen $\frac{mK}{4-i}$ entspricht, erhält man durch bloße Verwechslung der beiden imaginären Einheiten $+i$ und $-i$. Sei ψ die Amplitude des Bogens $\frac{mK}{4+i} + \frac{mK}{4-i} = \frac{8mK}{17}$; so ist:

$$\cos \psi = \frac{\cos \varphi \cos \varphi' - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \cos \varphi^4)(1 - \cos \varphi'^4)}}{1 - \frac{1}{2} \sin \varphi^2 \sin \varphi'^2}$$

der erste Werth von $\cos \varphi^4$, von den beiden letzten giebt $\psi = 12^\circ 26' 55''$, welches die Amplitude ist, die nach *Legendre's* Tafeln dem Bogen $\frac{2K}{17}$ entspricht.

Der Ausdruck des von i völlig befreiten Werthes von $\cos \psi$, der im Falle des Fünfecks sehr einfach ist, wird hier sehr verwickelt. Von $\cos \varphi^4$ ist einer der Werthe

$$\begin{aligned} -3 + 3\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17-1}}{2}\right)} + \sqrt{\left\{ \sqrt{\left(1445 - 884\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17-1}}{2}\right)} - 1122\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17+1}}{2}\right)} + 353\sqrt{17}\right)} - 17 - 8\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17-1}}{2}\right)} \right.} \\ \left. + 17\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17+1}}{2}\right)} \right\}} \\ + i \left[+5 - 3\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17+1}}{2}\right)} + \sqrt{\left\{ \sqrt{\left(1445 - 884\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17-1}}{2}\right)} - 1122\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17+1}}{2}\right)} + 353\sqrt{17}\right)} + 17 + 8\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17-1}}{2}\right)} \right.} \right. \\ \left. \left. - 17\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17+1}}{2}\right)} \right\}} \right]. \end{aligned}$$

Sei dieser Ausdruck $a+bi$, so ist

$$\cos \psi = \frac{\sqrt[4]{(a^2+b^2)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-a)^2+b^2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)} + \sqrt{\frac{(\sqrt{(a^2+b^2)}+a)}{2}}}.$$

Th. Clausen.

Schreiben des Herrn Professors *Gerling* an den Herausgeber.

Marburg 1841. Septbr. 24.

Sie haben in Nr. 272 schon eine Notiz über Theodolithen von *Breithaupt* gegeben, welche dem verdienstlichen Streben des Künstlers nach immer größerer Vollkommenheit des Instruments alle Gerechtigkeit widerfahren läßt. Da ich nun seit beinahe 30 Jahren immer von Zeit zu Zeit persönlicher Zeuge desselben gewesen bin, und selbst mit einem seiner Instrumente, was noch aus älterer Zeit herrührt, und nachher hin und wieder abgeändert ist, viel gearbeitet habe, so unterzog ich mich gern dem von Herrn Münzmeister *Breithaupt* gewünschten Geschäft, mit einem seiner neueren Instrumente eine specielle Prüfung, namentlich in Beziehung auf Excentricität und Theilung, vorzunehmen. Das, meines Erachtens sehr befriedigende, Resultat derselben beehre ich mich Ihnen hier mitzutheilen.

Das Instrument ist im Wesentlichen ganz dasselbe, was in des Verfertigers Magazin von mathematischen Instrumenten. Cassel 1835 auf Taf. 1 und 2 sich abgebildet findet. Ueber die Construction brauche ich also nichts zu sagen. Doch kann ich nicht umhin aufs Neue die große Nützlichkeit der von Ihnen gebilligten Verdeckung der Theilung und Nonien anzuerkennen; so wie ich namentlich auch die an den Loupen angebrachten Zeiger für Genauigkeit des Ablesens überaus vortheilhaft finde.

Der eingetheilte Kreis hat 74,4 par. Linien Durchmesser. Die Theilung ist die sogenannte Centesimal-Theilung (der Künstler macht übrigens nach dem Wunsche des Bestellers diese oder die gewöhnliche Sexagesimal-Theilung) und geht unmittelbar bis 0°25. Jeder der beiden Nonien giebt dann unmittelbar 0°0050; es bleibt aber eine weitere Schätzung immer thunlich.

Zur Ausmittelung der Excentricität und der unregelmäßigen Theilungsfehler machte ich zwei Beobachtungsreihen, indem ich bei jeder derselben den Non. I. 40mal, immer von 10 zu 10 Centesimal-Graden einstellte und den Non. II. ablas. Der Unterschied der beiden Reihen bestand aber darin, daß ich bei der ersten mich begnügte die Angaben des Non. II. in ihren Hälften zu schätzen, also immer 0, 25, 50 oder 75 Centesimalsecunden niederzuschreiben; bei der zweiten aber,

durch Vergleichung der benachbarten Theilstriche, mich bemühte die Schätzung noch weiter zu treiben, und die Angabe des Non. II. dann von 10 zu 10 Centesimal-Secunden niederschrieb.

Nachdem ich meine beiden Beobachtungs-Reihen geschlossen, übernahm es ein geschickter Zuhörer von mir, Herr *H. L. Westphalen* aus Hamburg, dieselbe nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bearbeiten. Seine, gehörig geprüfte, Rechnung ergab folgendes:

Nach der ersten Reihe liegt der Mittelpunkt der Drehung um 0,001182 pariser Linien entfernt vom Mittelpunkt der Theilung, auf dem Halbmesser von 299°20, und ist im Sinne der Theilung der Non. II von dem Non. I entfernt um 199°9957.

Nach der zweiten Reihe finden sich dieselben Größen der Reihe nach: 0,0012054; 277°23; 199°9968.

Eine Uebereinstimmung, die meines Erachtens nicht besser gewünscht werden kann.

Die Ablesungen beider Reihen wurden nun einzeln mit den vorstehenden Elementen verglichen, und somit fand sich durch Quadriren etc. der mittlere Fehler einer einzelnen Einstellung, vermöge des (einfachen) Ablesungs- und Theilungsfehlers:

aus der ersten Reihe = 16,805 Centesimal-Secunde = 5''5
 ——— zweiten ——— = 19,654 ——— ——— = 6,4,

welches zu beweisen scheint, daß eine Schätzung, die auf kleinere Theile als 25 Centesimal-Secunden gerichtet ist, bei diesem Instrumente von keinem erheblichen Nutzen seyn kann, zugleich aber darthut, daß die zufälligen Theilungsfehler jedenfalls höchst unbedeutend sind, und recht wohl ohne Weiteres = 0 gesetzt werden dürfen. Dieses letztere bestätigt sich noch durch Vergleichung der beiden Reihen unter sich. Zu dem Ende nahm nämlich Herr *Westphalen* noch die Unterschiede der einzelnen Ablesungen des Non. II in beiden Reihen, welche also, mit Elimination des Theilungsfehlers, nur mit einem vierfachen Ablesungsfehler behaftet seyn mußten. Die Berechnung des mittleren Fehlers durch Quadriren etc.