Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti.

(*Memoria IV di ERNESTO PASCAL, a Napoli.*)

La presente Memoria risolve pel caso delle funzioni σ abeliane *pari*, lo stesso problema risoluto nella Memoria I per le funzioni *dispari*, la ricerca cioè del secondo termine dello sviluppo di σ secondo le potenze ascendenti degli integrali di 1.^a specie.

La risoluzione di questo problema per le funzioni *pari* mi ha opposte difficoltà ben diverse da quelle incontrate per la soluzione del problema analogo per le funzioni *dispari*, e tali difficoltà sarebbero forse rimaste insuperate se non mi fossi giovato di una semplice e luminosa idea che il mio maestro prof. KLEIN accennò nel passato estate nel corso delle sue lezioni all'Università di Göttingen (vedi § 10), la quale idea mi ha permesso di passare dalla considerazione di forme quaternarie a quella di forme ternarie.

In tale maniera il richiesto secondo termine diventa un certo particolare invariante di un connesso (1, 2) nel piano; ed è notevole l'osservare che si viene in questa maniera a stabilire anche un'analogia maggiore fra i due casi delle funzioni pari e dispari, giacchè allora anche per le prime, come appunto accade per le funzioni dispari (vedi Mem. I, § 13), i termini dello sviluppo debbono soddisfare ad una certa equazione differenziale caratterizzata da un certo processo di ARONHOLD.

Ho creduto utile in questa Mem. IV estendermi un poco più sui principii fondamentali della costruzione delle funzioni σ , cercando di riassumere e sviluppare altri punti della teoria sui quali si era appena sorvolato nelle Memorie precedenti, e tralasciando quegli altri punti trattati più distesamente nelle stesse Memorie.

Così ho toccato qui con maggior estensione la teoria delle curve di con-

tatto, e delle cosiddette forme radicali (*Wurzelformen*), e ho tralasciato quella delle forme primitive (*Primformen*) e degli integrali normali Q di KLEIN.

In questi ultimi giorni è comparso nei *Mathematische Annalen* un lavoro di KLEIN, nel quale riassume per sommi capi le sue lezioni sulle funzioni abeliane sviluppate a Göttingen nei tre semestri consecutivi: estate 88, inverno 88-89, estate 89. A questo lavoro rimanderò spesso il lettore per i maggiori dettagli di cui potrà aver bisogno (*).

Finalmente prendo l'occasione d'annunziare al lettore che le Mem. V e VI, che ho già compiute e che compariranno fra breve in questo stesso Giornale, tratteranno rispettivamente delle cosiddette funzioni Σ (**) iperellittiche di genere 2 [i cui rapporti costituiscono le funzioni di 1.^a specie (*I Stufe*)] e di un problema sulle superficie di KUMMER nelle loro relazioni colle suddette funzioni iperellittiche.

§ 1. Curve di contatto di una curva algebrica piana.

Sia data una curva algebrica piana C_m (***), di ordine m e di genere p . Si abbia un'altra curva C_δ di ordine δ tale che i δm punti comuni colla prima curva si riuniscano a μ a μ , essendo μ un divisore di δm . La curva C_δ si chiamerà una curva di contatto di specie μ della curva fondamentale. Si può senz'altro cominciare a studiare i sistemi di tali curve di contatto prendendo per fondamento il teorema di ABEL per gli integrali di 1.^a specie.

Consideriamo cioè gli integrali di 1.^a specie nel campo abeliano corrispondente alla curva fondamentale C_m di genere p .

Allora se $x_1, x_2, \dots, x_{m\delta}, a_1, a_2, \dots, a_{m\delta}$ sono rispettivamente i punti d'incontro di C_m con due curve $\Gamma_\delta, \Gamma'_\delta$ di ordine δ , è noto dal teorema di ABEL che la somma degli integrali estesi fra i primi punti d'intersezione e i secondi è

$$\left(\int_{a_1}^{x_1} + \int_{a_2}^{x_2} + \dots + \int_{a_{m\delta}}^{x_{m\delta}} \right) dw_\alpha = \Omega_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p),$$

(*) KLEIN, *Zur Theorie der Abel'schen Functionen*. Math. Ann., Bd. 36.

(**) Non si confondano queste Σ colle σ che hanno relazione invece colle funzioni di 2.^a specie (*II^{ter} Stufe*). Vedi KLEIN, *Hyp. Funct.* Math. Ann., Bd. 27, § 14.

(***) Le considerazioni che si faranno qui si potrebbero trasportare senz'altro al caso in cui si prenda per fondamento una curva algebrica qualunque in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, salvo che allora anziché parlare di *curve di contatto*, bisognerebbe parlare di *varietà di contatto*.

dove w_α sono gli integrali di 1.^a specie e Ω_α rappresenta un periodo arbitrario degli stessi integrali, cioè una combinazione lineare con coefficienti interi di tutti i $2p$ periodi elementari di w_α .

Per un'opportuna scelta dei cammini d'integrazione, e del coordinamento dei punti a coi punti x , il secondo membro dell'espressione superiore può evidentemente ridursi a zero.

Ma a noi conviene qui porci dal punto di vista generale e supporre cammini d'integrazione affatto arbitrarii.

Supponiamo ora che Γ_δ diventi perfettamente la curva di contatto C_δ di cui si è parlato avanti. Allora i punti x si vengono a riunire a μ a μ e propriamente ponendo $\mu\nu = m\delta$, verranno ad essere solo ν punti distinti.

Scegliamo altri ν punti arbitrarii $b_1, b_2, \dots, b_\nu$. Allora è chiaro che la relazione superiore potrà scriversi:

$$\mu \left(\int_{b_1}^{x_1} + \dots + \int_{b_\nu}^{x_\nu} \right) = \Omega_\alpha + c_\alpha,$$

dove c_α è una costante dipendente dai punti a e dai punti arbitrarii b .

Da tale relazione si ricava:

$$\int_{b_1}^{x_1} + \dots + \int_{b_\nu}^{x_\nu} = \frac{c_\alpha}{\mu} + \frac{\Omega_\alpha}{\mu},$$

dove:

$$\frac{\Omega_\alpha}{\mu} = \frac{h_1 \omega_{\alpha 1} + h_2 \omega_{\alpha 2} + \dots + h_{2p} \omega_{\alpha, 2p}}{\mu},$$

essendo h numeri interi.

È chiaro al solito che per la scelta opportuna dei cammini d'integrazione fra i punti b e x , noi possiamo al secondo membro della formola superiore supporre aggiunta un'arbitraria combinazione lineare con coefficienti interi dei periodi ω_α .

Di qui ne risulta che basta sempre limitarsi a considerare i numeri h presi in un completo sistema di numeri incongrui secondo il modulo μ .

Supponiamo dunque scelto un certo sistema di numeri h . Allora si avranno p equazioni che serviranno a determinare i punti di contatto $x_1, \dots, x_\nu$ (*).

Poichè in tutto possono darsi solo δ^{2p} sistemi fra loro diversi di numeri h , così possiamo dire che vi sono δ^{2p} classi di curve di contatto C_δ .

(*) KLEIN, *Abelsche Funct. Math. Ann.*, Bd. 36, pag. 31.

Ogni altro sistema di ν punti *corresiduali* ai punti x , rappresenterà sempre un'altra soluzione del problema, quindi trovata la curva di contatto passante per i ν punti x , ve ne saranno sempre tante altre della medesima *classe* per quanti sono i sistemi di punti *corresiduali* ai punti x .

Ora il teorema noto di RIEMANN e ROCH determina appunto quante volte infinito è il sistema di punti *corresiduali* ad un sistema di punti x dati.

Se τ rappresenta il numero delle forme φ fra loro indipendenti (*), che abbiano fra i loro punti nulli tutti i punti x , cioè, come si usa dire, il numero delle forme φ fra loro indipendenti da cui sono *congiunti* (*verknüpft*) i ν punti x , allora il teorema di RIEMANN e ROCH dice che è $\nu - p + \tau$ volte infinito il sistema dei punti *corresiduali* ad x . Dunque tutte le curve di contatto appartenenti ad una medesima classe formano un sistema $\nu - p + \tau$ volte infinito.

Dati i numeri h è determinata la classe di curve di contatto; i numeri h formano cioè un assieme di numeri che potremo chiamare la *caratteristica* di quella classe; però è chiaro dalle formole precedenti, a causa dell'arbitrarietà della costante c_x , che tale caratteristica non è *assoluta*, ma solo relativa alla scelta della costante c_x , per modo che per es. una stessa classe di curve di contatto potrà individuarsi con due *caratteristiche* diverse scegliendo diversamente la costante c_x . Noi non abbiamo finora nessun punto d'appoggio sul quale potere fissare la scelta di c_x .

C'è però un caso in cui si possono effettivamente distribuire alle diverse classi delle caratteristiche assolute.

Tal caso si ha quando δ è divisibile per μ . In tal caso una curva di ordine $\frac{\delta}{\mu}$ passante per i $\nu = m \frac{\delta}{\mu}$ punti x e contata μ volte rappresenterà una curva di contatto. Quindi in questo caso una delle classi di curve si viene a distinguere in un modo geometrico e completamente definito dalle altre; esiste cioè una classe di curve di ordine $\frac{\delta}{\mu}$ in cui ciascuna curva è contata μ volte.

Possiamo allora prendere per punto di partenza questa speciale classe, e darle la caratteristica $(0, 0, \dots 0)$, cioè determinare in tal modo la costante c_x che tale classe venga ad acquistare la detta caratteristica; allora le caratte-

(*) KLEIN, Opera cit., pag. 29. Le forme φ sono *forme intere* nelle coordinate dei punti della superficie di RIEMANN, e sono proporzionali ai differenziali degli integrali di 1.^a specie. Il loro grado dipende dalla speciale forma canonica della curva fondamentale. Così per curve piane senza singolarità e di ordine m , le φ sono forme di ordine $m - 3$. (KLEIN, Opera cit., pag. 19.)

ristiche di tutte le altre classi saranno riferite a questa e saranno *assolute*. Esse si chiamano *caratteristiche elementari* (*elementarcharakteristiken*) per distinguerle da un altro genere di caratteristiche che si possono dare alle diverse classi e che si chiamano *caratteristiche primitive* (*Primcharakteristiken*) (*).

§ 2. Forme e funzioni radicali (Wurzelformen) su di una superficie di Riemann.

Una considerazione analoga alla considerazione geometrica delle curve di contatto prendendo per fondamento una data curva algebrica piana, si può fare dal punto di vista della teoria analitica delle funzioni, prendendo per fondamento la superficie di RIEMANN corrispondente a quella curva algebrica.

Noi vogliamo considerare sulla superficie di RIEMANN delle funzioni che sieno dotate delle seguenti proprietà:

1. Sieno polidrome a μ valori.
2. Sieno *non diramate* in nessun punto della superficie di RIEMANN.
3. I cangiamenti che subiscono, quando la variabile percorre un *cammino periodale* sulla superficie, sieno semplicissimi, cioè si riducano al prodotto della funzione per una certa radice μ^{ma} dell'unità.

È chiaro che la μ^{ma} potenza di una tale funzione sarà una funzione monodroma, perchè rimarrà inalterata se la variabile percorre sulla superficie un qualunque cammino periodale, quindi una tale funzione potrà sempre esprimersi come la radice μ^{ma} di una certa funzione monodroma.

Tali funzioni si chiamano *funzioni radicali*, (*Wurzelfunctionen*).

Possiamo costruire *funzioni radicali* giovandoci delle curve di contatto. Se C, C' sono i primi membri di due curve di contatto di ordine ϑ e di specie μ , e inoltre queste tali due curve di contatto appartenenti a due classi diverse sieno tali che le differenze $h_i - h'_i$ dei numeri che formano rispettivamente le loro caratteristiche *non sieno tutte divisibili per uno stesso divisore μ' di μ* , allora:

$$\sqrt[\mu]{\frac{C}{C'}},$$

sarà una funzione che sulla superficie di RIEMANN ha per punti zero *semplici*

(*) KLEIN, Opera cit., pag. 34.

i ν punti

$$x_1 \quad x_2 \dots \quad x_\nu,$$

nei quali C tocca la curva, e per punti d'infinito *semplici* i ν punti

$$y_1 \quad y_2 \dots \quad y_\nu,$$

nei quali C' tocca la curva, e quindi essendo una funzione che diventa solo *semplicemente* zero e infinita nei punti detti e in ogni altro punto resta sempre finita, sarà *non diramata*; inoltre sarà evidentemente polidroma, perchè

$$\left(\int_{y_1}^{x_1} + \dots + \int_{y_\nu}^{x_\nu} \right) dw_\alpha \equiv \frac{\sum (h_i - h'_i) \omega_{\sigma i}}{\mu} \pmod{\text{periodi}}, \quad (1)$$

dove h_i, h'_i sono i numeri interi che compongono le caratteristiche di C, C' appartenenti a due classi diverse, e quindi non essendo zero il secondo membro della formola superiore, i punti x, y non possono essere rispett. punti *nulli* e *infiniti* di una funzione monodroma.

In quanto poi all'essere la nostra funzione esattamente a μ valori, risulta dall'equazione (1).

Infatti se la sua potenza λ^{ma} ($\lambda < \mu$) potesse essere una funzione monodroma risulterebbe che moltiplicando ambo i termini di (1) per λ , il secondo membro dovrebbe essere congruo a zero.

Ora se λ è primo con μ ciò evidentemente non può succedere, perchè le differenze $h_i - h'_i$ non sono divisibili per μ . Se $\frac{\mu}{\lambda}$ è intero $= \mu'$, allora avendo precedentemente convenuto che le due curve C, C' hanno tali caratteristiche che $h_i - h'_i$ non possono essere tutte divisibili per un divisore di μ , tali differenze non potranno essere tutte divisibili per μ' che è un divisore di μ .

Per trovare i fattori coi quali la nostra funzione viene a moltiplicarsi quando la variabile percorre un cammino periodale basta servirsi di una certa rappresentazione della nostra funzione mediante le cosiddette forme principali Ω introdotte da KLEIN.

La importanza di tali espressioni chiamate anche forme primitive (*Primitives*), e delle quali abbiamo già abbastanza discorso nelle Memorie precedenti (*), consiste in ciò che esse sono nel campo abeliano quello che una espressione lineare binaria è nel campo razionale.

(*) Memoria I, § 2. Memoria III, § 1.

In altri termini tali forme primitive non sono mai *diramate*, non sono mai *infinite*, e si annullano solo e di 1.^o ordine quando i due punti, di cui sono funzioni, coincidono.

La $\Omega(x, y)$ è nel campo abeliano quello che $(x - y)$ è nel campo razionale (*).

La funzione radicale di cui si è parlato avanti non essendo una funzione diramata e avendo per punti zero semplici i punti x e per punti d'infinito semplici i punti y sarà eguale a (**)

$$\frac{\Omega(x x_1) \dots \Omega(x x_p)}{\Omega(x y_1) \dots \Omega(x y_p)} e^{\frac{1}{u} \sum_{\alpha=1}^p w_{\alpha} [(h_1 - h'_1) \eta_{\alpha 1} + \dots]}$$

In questa formola le η sono i periodi degli integrali normali di 2.^a specie. La verità di questa formola si dimostra elevandola a μ^{ma} potenza e mostrando allora mediante le formole di periodicità delle Ω e le note relazioni bilineari fra i periodi degli integrali di 1.^a e 2.^a specie, che tale potenza μ^{ma} non ha alcuna periodicità su qualunque dei tagli canonici della superficie di RIEMANN; quindi poichè essa ha gli stessi zeri ed infiniti della funzione monodroma $\frac{C}{C'}$ sarà ad essa eguale a meno di un fattore costante.

È facile allora da questa formola trovare che la periodicità della nostra funzione:

$$\sqrt[p]{\frac{C}{C'}},$$

è data dalle formole seguenti:

Sui tagli canonici

$$A_1 \quad A_2 \dots A_p \quad B_1 \quad B_2 \dots B_p,$$

essa acquista rispettivamente i fattori:

$$\varepsilon^{h_{p+1} - h'_{p+1}}, \dots \quad \varepsilon^{h_{2p} - h'_{2p}}, \quad \varepsilon^{-h_1 + h'_1}, \dots \quad \varepsilon^{-h_p + h'_p},$$

dove ε è una radice μ^{ma} dell'unità, e h e h' sono rispettivamente i numeri che compongono le caratteristiche delle curve di contatto C, C' .

Si vede dunque che davvero la nostra funzione soddisfa alle condizioni per dirsi una funzione radicale.

(*) KLEIN, Math. Ann., Bd. 36, pag. 11.

(**) KLEIN, Opera cit., pag. 33. Si noti che ivi c è un errore di stampa.

§ 3. Caso delle curve di 4.^o ordine di genere 3.

Introduzione di una curva storta di 6.^o ordine e dello stesso genere.

Supponiamo che la curva fondamentale sia una curva generale di 4.^o ordine. Allora è facile specializzare la teoria generale precedente e ottenere il risultato che: esistono 64 sistemi di cubiche di contatto (di specie 2) alla curva di 4.^o ordine; e ciascuno di tali sistemi è triplamente infinito.

Vogliamo dimostrare una proprietà comune a tutti questi sistemi. Noi facciamo la dimostrazione per il nostro caso particolare, ma avvertiamo che la analoga proprietà è generale per le curve di contatto di specie 2.

Sieno $x_1 x_2 \dots x_6$ i 6 punti di contatto di una cubica e $x'_1 x'_2 \dots x'_6$ quelli di un'altra cubica dello stesso sistema. Allora per le formole del § 1 abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} \int_{b_1}^{x_1} + \dots + \int_{b_6}^{x_6} &\equiv \frac{c_\sigma + \Omega_\sigma}{2} \\ \int_{b_1}^{x'_1} + \dots + \int_{b_6}^{x'_6} &\equiv \frac{c_\sigma + \Omega_\sigma}{2} \end{aligned} \right\} \text{ (mod. periodi),}$$

donde sommando:

$$\int_{b_1}^{x_1} + \dots + \int_{b_1}^{x'_1} + \dots \equiv c_\sigma \text{ (mod. periodi),}$$

e sostituendo per c_σ il suo valore si ha infine:

$$\int_{a_1}^{x_1} + \dots + \int_{a_6}^{x_6} + \int_{a_1}^{x'_1} + \dots + \int_{a_{12}}^{x'_6} \equiv 0 \text{ (mod. periodi),}$$

e poichè per ipotesi i dodici punti a stanno su di una cubica, staranno dunque su di una cubica i punti x insieme ai punti x' . Dunque i dodici punti di contatto di due cubiche di contatto dello stesso sistema stanno su di una nuova cubica.

Sieno ora $\Phi_1 \Phi_2$ due cubiche di contatto dello stesso sistema, e Φ_{12} quella che passa per i dodici punti di contatto di esse. È chiaro allora che sulla superficie di RIEMANN la funzione:

$$\frac{\Phi_1 \Phi_2}{\Phi_{12}^2},$$

è una costante, perchè non ha nè zeri, nè infiniti. Possiamo dunque stabilire la formola fondamentale:

$$\Phi_1 \Phi_2 = \Phi_{12}^2, \quad (1)$$

determinando in modo le equazioni delle cubiche che la costante di cui si parla risulti eguale all'unità, ciò che si può sempre fare.

Ciò posto esaminiamo la espressione:

$$\chi = (u_1 \sqrt{\Phi_1} + u_2 \sqrt{\Phi_2})^2.$$

Dico che $\chi = 0$ rappresenta una nuova cubica di contatto dello stesso sistema di Φ_1 e Φ_2 .

Infatti dall'equazione precedente si ricava:

$$\chi \Phi_1 = (u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_{12})^2.$$

Ora essendo il secondo membro il quadrato di una funzione razionale, nei punti nei quali diventa zero, diventerà sempre almeno zero di 2.° ordine, e poichè al primo membro Φ_1 fa pure lo stesso, lo stesso dovrà fare anche χ .

Dunque χ è una cubica di contatto; appartiene poi allo stesso sistema di Φ_1 e Φ_2 perchè

$$\frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\Phi_1}} = u_1 + u_2 \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1},$$

cioè il primo membro è eguale ad una funzione razionale, e quindi i punti zero di $\sqrt{\chi}$ sono *corresiduali* a quelli di $\sqrt{\Phi_1}$. Nello stesso modo si dimostrerebbe che se $\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4$ sono quattro cubiche di contatto di un sistema, la espressione:

$$\sqrt{\chi} = u_1 \sqrt{\Phi_1} + u_2 \sqrt{\Phi_2} + u_3 \sqrt{\Phi_3} + u_4 \sqrt{\Phi_4}, \quad (2)$$

rappresenta la radice quadrata del primo membro dell'equazione di una cubica dello stesso sistema. Indicando con KLEIN (*) colla denominazione *forma radicale* (da non confondersi con *funzione radicale*) tale radice quadrata, possiamo anzi far vedere che nella formola (2) si comprende la espressione *più generale* di una forma radicale appartenente al sistema dato.

Infatti sappiamo che le cubiche di contatto non sono più di *tre volte* infinite, quindi nella formola (2) non potranno comparire più di *quattro* parametri omogenei arbitrarii.

(*) KLEIN, Opera cit., § 11.

Annali di Matematica, tomo XVIII.

Per modo che possiamo dire anche che fra cinque forme radicali dello stesso sistema esiste sempre una relazione del tipo (2).

Prendiamo quattro forme radicali di uno stesso sistema e fra loro indipendenti, e poniamo:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \sqrt{\Phi_1} : \sqrt{\Phi_2} : \sqrt{\Phi_3} : \sqrt{\Phi_4},$$

interpretando le z come le quattro coordinate omogenee nello spazio ordinario.

Le quattro z omogenee verranno così funzioni dei punti della superficie di RIEMANN, onde descriveranno nello spazio una linea storta. È facile dimostrare che è una linea di 6.^o ordine C_6 . Infatti un piano:

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + u_4 z_4 = 0,$$

rappresenterà secondo la formola (2) una forma radicale, la quale, come sappiamo, è zero e di 1.^o ordine *solo* in sei punti della superficie di RIEMANN. Onde un piano interseca la nostra curva in sei punti semplici. Questi sei punti nei quali C_6 è tagliata da un piano corrispondono, sulla C_4 a 6 punti pei quali passa una cubica di contatto.

Poichè i rapporti delle $\sqrt{\Phi}$ sono *funzioni razionali sulla superficie di RIEMANN* si ha che i punti della nostra curva C_6 corrispondono univocamente ai punti di C_4 ; la C_6 è anche di genere 3. Noi potremmo prendere anche in luogo di C_4 , la C_6 per fondamento delle nostre ricerche.

Per una ragione che si svilupperà in seguito vogliamo ora esaminare in quali casi si annulla il seguente determinante.

Sieno x' x'' x''' x^{iv} quattro punti della nostra superficie di RIEMANN, e formiamo il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{\Phi_1(x')} & \dots & \sqrt{\Phi_1(x^{iv})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\Phi_4(x')} & \dots & \sqrt{\Phi_4(x^{iv})} \end{vmatrix}.$$

Interpretando i $\sqrt{\Phi}$ come coordinate nello spazio si ricava evidentemente che D sarà in generale zero quando i quattro punti z' z'' z''' z^{iv} che nella curva di 4.^o ordine corrispondono ai punti x' x'' x''' x^{iv} di C_4 , stanno in un piano. Supponiamo dati i primi tre punti, e vogliamo vedere quando il determinante D considerato come funzione del quarto si annulla. In primo luogo quando il quarto viene a coincidere con uno dei tre primi. Poi quando z^i viene ad essere uno dei tre altri punti in cui il piano determinato da

$z' z'' z'''$ taglia C_6 ; e finalmente quando $z' z'' z'''$ sono i tre punti nei quali C_6 è tagliata da una *trisecante*; in tale ultimo caso D è *identicamente* zero considerato come funzione di z^{IV} , cioè è zero qualunque sia z^{IV} .

Come conseguenza di un teorema generale sulle curve di contatto (*), si ricava che i 64 sistemi di cubiche di contatto di C_4 si distinguono in due categorie, di proprietà diverse.

L'uno risulta di 28 sistemi ciascuno dei quali è univocamente coordinato ad una delle 28 tangenti doppie di C_4 ; l'altra risulta dei rimanenti 36 sistemi.

Le caratteristiche corrispondenti a ciascun sistema della prima categoria sono *dispari* cioè tali che:

$$\lambda = h_1 h_4 + h_2 h_5 + h_3 h_6,$$

forma un numero dispari.

Le caratteristiche di un sistema della seconda categoria sono *pari* cioè per essa λ è *pari*.

Nella Mem. I e II abbiamo preso per oggetto delle nostre considerazioni i sistemi della prima categoria; ora studieremo invece i 36 sistemi della seconda, e per far ciò porremo le C_4 sotto una forma canonica speciale e adatta per il nostro scopo attuale, come già facemmo analogamente per il caso delle caratteristiche dispari ponendo le C_4 sotto un'altra forma canonica.

§ 4. Cenno sulla teoria geometrica di Hesse della C_4 .

Consideriamo una rete di quadriche (**):

$$F = x_1 \sum \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum \gamma_{ik} z_i z_k,$$

in cui le x sono i parametri della rete, e

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \quad \beta_{ik} = \beta_{ki}, \quad \gamma_{ik} = \gamma_{ki}.$$

Domandiamo se fra le ∞^2 superficie della rete vi sono *coni*? Poichè deve essere soddisfatta *una sola* condizione perchè una F_2 diventi un cono, è chiaro che vi saranno nella rete ∞^1 coni. Che cosa formeranno i vertici di questi con?

(*) CLEBSCH-LINDEMANN, *Geometrie* (ediz. francese), vol. III, pag. 243.

(**) HESSE, Crelle's Journal, Bd. 49 (1855).

Le condizioni perchè il punto z sia vertice di un cono sono espresse da:

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z_2} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z_3} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z_4} = 0. \quad (1)$$

Con considerazioni nei cui dettagli non posso entrare, si dimostra che la curva che si ottiene da queste equazioni eliminando le x , è effettivamente di 6.° ordine, a meno di una parte estranea di 3.° ordine che non ha nulla da fare colla curva dei vertici dei coni.

D'altra parte eliminando fra le stesse equazioni le z si ha una relazione di 4.° grado in x , che può interpretarsi come una curva di 4.° ordine nel piano.

Ponendo:

$$\pi_{ik} = \pi_{ki} = \alpha_{ik}x_1 + \beta_{ik}x_2 + \gamma_{ik}x_3,$$

il risultato dell'eliminazione è:

$$\Pi = 2 \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Poichè le relazioni (1) sono lineari sia nelle x che nelle z si ha dunque una corrispondenza univoca fra una curva di 4.° ordine nel piano e una curva storta di 6.° ordine. Noi faremo vedere che questa corrispondenza fra la C_4 e le C_6 è perfettamente una corrispondenza del genere di quelle di cui si è parlato nel paragrafo precedente.

In primo punto si può dimostrare che la C_4 così ottenuta è generale.

Inoltre è facile vedere che la curva di 3.° ordine:

$$\Phi_{uv} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{14} & v_1 \\ \pi_{21} & \dots & \pi_{24} & v_2 \\ \pi_{31} & \dots & \pi_{34} & v_3 \\ \pi_{41} & \dots & \pi_{44} & v_4 \\ u_1 & \dots & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

passa per i punti di C_4 corrispondenti ai dodici punti nei quali due piani:

$$u_1z_1 + u_2z_2 + u_3z_3 + u_4z_4 = 0$$

$$v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3 + v_4z_4 = 0,$$

tagliano la curva di 6.° ordine.

Donde si ricava che la cubica Φ_{uu} , cioè quella che si ricava da Φ_{uv} ponendo $v = u$, passa doppiamente per i punti corrispondenti a quelli in cui il piano $u_x = 0$ taglia C_6 ; essa è dunque una cubica di contatto, e si ricava ancora che i sei punti z nei quali un piano qualunque taglia C_6 corrispondono su C_6 a sei punti per i quali passa una cubica di contatto. Tutte queste cubiche di contatto appartengono allo stesso sistema; i piani che intersecano C_6 sono triplamente infiniti, dunque triplamente infinito sarà questo sistema di cubiche, come deve essere (vedi § 3). Su C_4 dati tre punti esistono sempre e sono univocamente determinati altri tre punti che coi primi formano i sei punti di contatto di una cubica.

Dalle cose dette risulta che in generale sarà:

$$\frac{\Phi_{uu} \Phi_{vv}}{\Phi_{uv}^2},$$

una costante sulla superficie di RIEMANN. Noi potremo dimostrare in un paragrafo seguente (§ 6) che tale costante è propriamente eguale ad 1, cioè che si ha:

$$\Phi_{uu} \Phi_{vv} = \Phi_{uv}^2.$$

Chiamiamo rispettivamente Φ_1 Φ_2 Φ_3 Φ_4 le Φ per i seguenti valori dei parametri u :

$$\begin{array}{ccccccc} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 = & 1, & 0, & 0, & 0; \\ & & & & & 0, & 1, & 0, & 0; \\ & & & & & 0, & 0, & 1, & 0; \\ & & & & & 0, & 0, & 0, & 1. \end{array}$$

Allora si vede subito che, indicando con Φ_{ik} le Φ passanti per i punti di contatto di Φ_i e Φ_k con C_4 , si ha:

$$\Phi_{ik} \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{ik}}.$$

Intanto dalle (1) si può ricavare:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{1k}} : \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{2k}} : \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{3k}} : \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{4k}},$$

onde infine:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \sqrt{\Phi_1} : \sqrt{\Phi_2} : \sqrt{\Phi_3} : \sqrt{\Phi_4},$$

quòè la nostra curva di 6.° ordine è perfettamente una di quelle definite nel paragrafo precedente. Ora viene la domanda: Il sistema di cubiche di contatto che siamo qui venuti a trovare è un sistema appartenente alla prima

o alla seconda categoria (vedi paragrafo precedente)? Si dimostra che è un sistema della seconda categoria. Non posso entrare nei dettagli di questa dimostrazione; solo accennerò che la dimostrazione si fa giovandosi della proprietà che una C_6 della prima categoria giace sempre su di una quadrica F_2 , mentre si può dimostrare che la C_6 da noi qui introdotta non può giacere su alcuna F_2 .

In conseguenza di ciò si ha che le dieci grandezze:

$$z_1^2, z_1 z_2, \dots, z_4^2,$$

sono fra loro linearmente indipendenti; o anche sono linearmente indipendenti le quantità alle prime proporzionali:

$$\Phi_1 \quad \Phi_{12} \dots \quad \Phi_4.$$

Si ricava dalle cose dette che la curva di 4.^o ordine generale si può porre in 36 modi diversi sotto la forma $\Pi = 0$ datale al principio di questo paragrafo; ad ognuno di tali modi corrisponde uno dei 36 sistemi di cubiche di contatto della seconda categoria.

§ 5. Proprietà geometriche della C_6 di 2.^a specie. Sue trisecanti.

Corrispondenza (3, 3), su di essa.

Facilmente si possono dimostrare le seguenti proprietà geometriche (*):

1. Ai punti di una retta nel piano corrispondono le quadriche di un fascio e viceversa.

2. Ai quattro punti comuni ad una retta e C_4 corrispondono i quattro coni appartenenti a questo fascio.

3. I piani polari di un punto arbitrario z' rispetto alle superficie della rete formano una rete.

4. Se il punto z' sta su C_6 allora si ha solo un fascio di piani polari.

5. I piani polari di un punto z' rispetto alla F_2 di un fascio, formano un fascio.

6. Se z' sta su C_6 , e propriamente è uno dei quattro punti di C_6 che sono vertici dei quattro coni appartenenti al fascio, il piano polare è unico. Propriamente tale piano polare è il piano degli altri tre punti che con z' formano i vertici dei quattro coni.

(*) KLEIN, Lezioni 1888-89.

7. Per ciascun punto di C_6 passano tre *trisecanti*.

8. Facendo passare per ciascuna *trisecante* il fascio di piani si hanno ∞ terne di punti *corresiduali*.

9. Poichè ad ogni serie di terne di punti *corresiduali* appartiene un punto fisso R (*Restpunkt*) si ha dunque che ad ogni *trisecante* corrisponde un punto della C_6 e viceversa.

10. Il fascio di piani polari del punto R rispetto alla superficie della rete ha per asse la trisecante di C_6 corrispondente ad R .

11. Dalla corrispondenza (1, 1) fra i punti di C_6 e le sue trisecanti si può passare ad una corrispondenza (3, 3) fra i punti di C_6 fra loro. Infatti ad ogni punto z di C_6 corrisponde una trisecante, dunque possiamo far corrispondere a z la terna di punti z' comuni a C_6 e alla trisecante. D'altra parte sappiamo che per ogni punto di C_6 passano tre trisecanti (teor. 7), dunque ad ogni punto z' corrispondono tre trisecanti e quindi tre punti z .

12. La corrispondenza (3, 3) dei punti z, z' su C_6 può tradursi in una corrispondenza analoga dei punti x su C_4 nel piano.

Ad ogni punto z corrispondono tre punti z' in linea retta. Facciamo passare per questa trisecante il fascio di piani. Si hanno terne di punti *corresiduali* fra loro e di cui z è il punto-resto (teor. 9).

Ad ogni gruppo dei sei punti tagliati su C_6 da ognuno di tali piani del fascio corrisponde nel piano il gruppo di sei punti di contatto di una cubica.

Possiamo dunque dire che nel piano la corrispondenza (3, 3) è caratterizzata così che ad ogni punto x corrispondono tre punti x' i quali insieme coi tre punti x'' che una retta qualunque passante per x taglia su C_4 formano i sei punti di una cubica di contatto.

13. La corrispondenza (3, 3) di cui si parla non ha *coincidenze* (*).

14. Per trovare le formole analitiche per esprimere la corrispondenza di cui si parla, osserviamo che se abbiamo un punto z di C_6 e vogliamo trovare i tre punti z' che vi corrispondono dobbiamo menare i piani polari di z rispetto a tutte le superficie della rete, e trovare le tre *intersezioni fisse* di tali piani polari con C_6 (teor. 10). Onde il piano polare:

$$h_1 \sum \alpha_{ik} z_i z'_k + h_2 \sum \beta_{ik} z_i z'_k + h_3 \sum \gamma_{ik} z_i z'_k = 0, \quad (1)$$

dove le h si suppongono arbitrarie, e le z, z' si suppongono punti di C_6 dà la relazione di corrispondenza fra z, z' .

(*) Questo teorema è una facile applicazione della teoria trascendente del principio di corrispondenza; vedi HURWITZ, *Ueber allg. Corr. Princip. Math. Ann.*, Bd. 28.

Se cioè z, z' si corrispondono nella corrispondenza (3, 3), tale relazione deve aver luogo per qualunque sistema di h_1, h_2, h_3 .

Poichè le z, z' sono punti di C_6 , possiamo porre per esse i loro valori (§ 4) e si ha:

$$\left. \begin{aligned} [xx'] &= h_1 \sum \alpha_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(x')} + h_2 \sum \beta_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(x')} + \\ &h_3 \sum \gamma_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(x')} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dove x, x' sono i punti di C_4 corrispondenti a z, z' .

Tale relazione esprime a sua volta la corrispondenza dei punti x, x' su C_4 .

La (2) sarà zero indipendentemente dalle h , allora e solo allora che i punti x, x' sono legati in modo che dato x e fatta passare per essa una retta arbitraria che tagli C_4 in tre punti x'' , il punto x' è uno dei tre punti che insieme ai tre punti x'' formano i sei punti di contatto di una cubica di 2.^a specie.

Finalmente vogliamo aggiungere alcune formole che ci occorreranno in seguito. È facile dimostrare che l'equazione di C_4 può porsi sotto la forma speciale:

$$\left. \begin{aligned} \Pi = f_x^4 &= x_1 \sum \alpha_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(x)} + x_2 \sum \beta_{ik} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_k} + \\ &+ x_3 \sum \gamma_{ik} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_k}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

e che la sua polare può scriversi:

$$\left. \begin{aligned} f_x^3 f_h &= h_1 \sum \alpha_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(x)} + h_2 \sum \beta_{ik} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_k} + \\ &+ h_3 \sum \gamma_{ik} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_k}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

§ 6. Formole per la C_4 e le sue cubiche di contatto.

Dimostrazione di $\Phi_{uu} \Phi_{vv} = \Phi_{uv}^2$.

Poniamo la rete di quadriche simbolicamente sotto la forma:

$$0 = a_x \alpha_x^2 = b_x \beta_x^2 = \dots$$

La equazione di C_4 cioè la Π del § 4 viene allora simbolicamente espressa da:

$$12\Pi = (\alpha\beta\gamma\delta)^2 a_x b_x c_x d_x.$$

Le cubiche di contatto vengono espresse da:

$$12\Phi_{uu} = (\alpha\beta\gamma u)^2 a_x b_x c_x$$

$$12\Phi_{uv} = (\alpha\beta\gamma u)(\alpha\beta\gamma v) a_x b_x c_x.$$

È facile allora di qui dimostrare la espressione (3) del § 5. Infatti possiamo prima di tutto trasformare la (3) in modo da farla venire razionale, porvi cioè $\Phi_{ik}(x)$ in luogo di $\sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(x)}$. Allora la (3) diventa, adoperando i coefficienti simbolici:

$$\begin{aligned} f_x^4 &= \frac{1}{12} \sum x_j d_j \sum \partial_i \partial_k (\alpha \beta \gamma)_i (\alpha \beta \gamma)_k a_x b_x c_x \\ &= \frac{1}{12} a_x b_x c_x d_x \sum \partial_i \partial_k (\alpha \beta \gamma)_i (\alpha \beta \gamma)_k, \end{aligned}$$

dove con $(\alpha \beta \gamma)_i$ si intende quel minore di 3.^o ordine del determinante $(\alpha \beta \gamma \delta)$ che corrisponde a δ_i .

Si ha dunque immediatamente per f_x^4 la formola (3) del § 5.

Dimostriamo ora che per ogni punto della superficie di RIEMANN si ha sempre:

$$\Phi_{uu} \Phi_{vv} = \Phi_{uv}^2.$$

Infatti possiamo scrivere giovandoci delle note identità del calcolo simbolico:

$$\begin{aligned} (\alpha \beta \gamma v)(\alpha' \beta' \gamma' u) a_x b_x c_x a'_x b'_x c'_x &= (\alpha \beta \gamma v)(\alpha' \beta' \gamma' u) a_x b_x c_x a'_x b'_x c'_x \cdot \\ &\cdot [-3(\alpha \beta \gamma \alpha')(\beta' \gamma' uv) + (\alpha \beta \gamma u)(\alpha' \beta' \gamma' v)]. \end{aligned}$$

Trasformiamo il primo termine colla formola:

$$\begin{aligned} (\alpha \beta \gamma v)(\alpha' \beta' \gamma' u) &= (\alpha' \beta' \gamma v)(\alpha \beta' \gamma u) + (\alpha \alpha' \gamma v)(\beta \beta' \gamma' u) + \\ &+ (\alpha \beta \alpha' v)(\gamma \beta' \gamma' u) + (\alpha \beta \gamma \alpha')(v \beta' \gamma' u), \end{aligned}$$

Osserviamo che i primi tre termini che si hanno, sono fra loro eguali perchè si ricavano l'uno dall'altro cogli scambi di α, β, γ fra loro. Inoltre sono anche eguali e di segno contrario a quello da cui si è partiti, perchè per es. il primo di essi è:

$$(\alpha' \beta' \gamma v)(\alpha \beta' \gamma' u)(\alpha \beta \gamma \alpha')(\beta \gamma' uv),$$

che collo scambio di α in α' diventa eguale e di segno contrario al termine trasformato. Si ha dunque infine con tale trasformazione solo:

$$-\frac{3}{4}(\alpha \beta \gamma \alpha')^2(\beta' \gamma' uv)^2.$$

Onde infine si ha:

$$\begin{aligned} (\alpha \beta \gamma u)^2(\alpha' \beta' \gamma' v)^2 &= \frac{3}{4}(\alpha \beta \gamma \alpha')^2(\beta' \gamma' uv)^2 \\ &+ (\alpha \beta \gamma u)(\alpha \beta \gamma v)(\alpha' \beta' \gamma' u)(\alpha' \beta' \gamma' v), \end{aligned}$$

dove per brevità abbiamo omissso di segnare il fattore simbolico comune $a_x b_x c_x a'_x b'_x c'_x$. Ora sulla superficie di RIEMANN si ha identicamente:

$$f \equiv (\alpha \beta \gamma \alpha')^2 a_x b_x c_x a'_x = 0,$$

dunque ricordando le formole sopra stabilite si ha esattamente la dimostrazione enunciata.

§ 7. Sull'annullarsi identico delle funzioni $\wp$ pari.

Per la costruzione delle funzioni σ ci occorre prima di tutto ricordare alcuni teoremi sull'annullarsi identico delle funzioni jacobiane. Supponiamo in primo luogo che gli argomenti v delle funzioni $\wp$ pari sieno rappresentati dagli integrali *normali* abeliani di 1.^a specie estesi fra i seguenti limiti:

$$\int_y^x - \int_{c'_y}^{x'} - \int_{c''_y}^{x''} - \int_{c'''_y}^{x'''} \quad (1)$$

dove $y \ x \ x' \ x'' \ x'''$ sono cinque punti arbitrarii della superficie di RIEMANN e i punti c_y sono tre punti dipendenti solo dal punto y , e nel seguente modo: si tiri per y una retta arbitraria che tagli C_4 in altri tre punti; allora da questi tre altri punti sono univocamente determinati altri tre $c' \ c'' \ c'''$ che insieme ad essi formano i sei punti di contatto di una cubica. Tali tre altri punti sono fissi qualunque sia la trasversale menata per y (§ 5, teor. 12). Così sono fissati i punti c .

Il primo teorema sull'annullarsi delle $\wp$ pari che vogliamo citare è:

1. Le funzioni $\wp$ pari costruite per argomenti (1) e considerate come funzioni di x si annullano solo nei tre luoghi $x = x', x'', x'''$.

Se poi $x' \ x'' \ x'''$ sono tre punti in linea retta, allora $\wp$ come funzione di x si annulla identicamente.

Come caso particolare consideriamo l'argomento speciale:

$$\int_y^x \quad (2)$$

Si ha allora:

2. Le funzioni $\wp$ pari cogli argomenti (2), e considerate come funzioni di x , si annullano solo se $x = c'_y, c''_y, c'''_y$; cioè se $x \ y$ si corrispondono nella corrispondenza (3, 3) sulla C_4 di cui si è parlato al § 5, teor. 12.

Sappiamo che tale corrispondenza non ha *coincidenze* se C_4 non ha punti doppii (§ 5, teor. 13), il che è d'accordo col fatto che le $\mathfrak{S}$ pari abeliane di genere 3 non possono diventar zero per argomenti zero, cioè se $x = y$. Le $\mathfrak{S}$ qui considerate si annullano dunque negli stessi casi in cui si annulla l'espressione (2) del § 5.

Consideriamo ora in terzo luogo gli argomenti generali:

$$\int^{x'} + \int^{x''} + \int^{x'''} + \int^{x^{iv}} \quad (3)$$

dove i limiti inferiori sieno quattro punti in linea retta. Allora una facile applicazione del teor. 1 ci dà l'altro teorema:

3. Le $\mathfrak{S}$ pari cogli argomenti (3) si annullano solo quando:

$$\int^{x'} + \int^{x''} + \int^{x'''} + \int^{x^{iv}} = -\int_{c'y}^{t'} - \int_{c''y}^{t''} - \int_{c'''y}^{y}$$

essendo t' , t'' y tre punti arbitrarii e le c determinate al solito modo.

Facendo passare per y la retta *arbitraria* su cui stanno i limiti inferiori del primo membro, e chiamando b' b'' b''' gli altri tre punti d'incontro, si ha la relazione da soddisfarsi:

$$\int_{b'}^{x'} + \int_{b''}^{x''} + \int_{b'''}^{x'''} + \int_{c'''y}^{x^{iv}} + \int_{c'y}^{t'} + \int_{c''y}^{t''} = 0.$$

Ora per la costruzione dei punti c si ha che per i sei punti b , c passa una cubica di contatto; onde lo stesso dovrà succedere fra i sei punti x e t ; cioè la cubica di contatto che passa per tre punti x dovrà passare per il quarto. Trasportata questa proprietà sulla C_6 si ha che la $\mathfrak{S}$ pari cogli argomenti (3) si annulla solo quando i quattro punti x corrispondenti ai quattro punti x stanno in un piano. Si annulla cioè negli stessi casi in cui si annulla il determinante D da noi considerato al § 3, salvo che D si annulla anche se due dei punti x coincidono, ciò che non fa $\mathfrak{S}$; perchè per es. se x' coincide con x'' la condizione per l'annullarsi di $\mathfrak{S}$ sarebbe che la cubica di contatto passante per x'' x''' x^{iv} avesse in x'' con C_4 un contatto di 3.° ordine, ciò che non succede in generale rimanendo arbitrarii i tre punti x'' , x''' , x^{iv} .

§ 8. Introduzione delle funzioni σ abeliane pari;
loro costruzione; loro proprietà.

Si è osservato nel § 7 che le funzioni Jacobiane $\mathfrak{S}$ costruite o per gli argomenti (2) o per gli argomenti (3) hanno rispett. gli stessi zeri delle espressioni (2) del § 5 o del determinante D del § 3.

Se quindi vogliamo passare ad una costruzione delle funzioni $\mathfrak{S}$ mediante i punti della superficie di RIEMANN, è chiaro che prima di tutto dobbiamo prendere come fattori delle $\mathfrak{S}$ le espressioni analitiche dette.

Tenendo poi presenti le proprietà delle $\mathfrak{S}$ rispetto alla periodicità, noi possiamo determinare gli altri fattori o divisori che insieme con quelli detti compongono le $\mathfrak{S}$.

Non possiamo qui entrare nei dettagli di queste costruzioni; e rimandiamo il lettore al lavoro di KLEIN (*).

Questi altri fattori di cui si è parlato sono combinazioni delle *forme primitive* Ω , e delle *forme medie* μ (**).

Le prime servono a togliere dalla formola quei tali punti-nulli posseduti da D ma non da $\mathfrak{S}$; le seconde servono a dare alla formola completa la stessa periodicità nota delle $\mathfrak{S}$.

Per la costruzione delle funzioni Ω e μ si può prendere per fondamento un integrale qualunque di 3.^a specie; in questa maniera si avrebbero propriamente delle funzioni Θ affatto generali; per costruire però le note funzioni $\mathfrak{S}$ di JACOBI definite mediante la nota serie esponenziale, l'arbitrarietà della scelta di un tale integrale sparisce, e si ha che dobbiamo prendere propriamente quell'integrale normale introdotto da CLEBSCH e GORDAN e da essi chiamato Π (***).

Se prendiamo invece quell'altro speciale integrale *normale* di 3.^a specie di cui abbiamo discorso nelle Mem. precedenti, e che abbiamo chiamato Q (****), allora anzichè avere le $\mathfrak{S}$ di JACOBI o un'altra funzione Θ qualunque, otteniamo una funzione che chiamiamo σ , e che, unica fra tutte quelle della sua specie, possiede speciali proprietà, da una parte in quanto al comportarsi rispetto alla trasformazione lineare dei periodi, e dell'altra in quanto al com-

(* KLEIN, Opera cit., § 13, pag. 40.

(** KLEIN, Opera cit., § 4, § 5. Vedi anche Mem. I. § 2—4.

(*** CLEBSCH und GORDAN, *Abelsche Funct.*

(**** KLEIN, Opera cit., § 26, Mem. I, § 1; Mem. III, § 1. PICK, Math. Ann., Bd. 29.

portarsi rispetto alla trasformazione lineare della curva di 4.^o ordine fondamentale; propriamente, riguardo alla seconda trasformazione, è un *covariante trascendente* di C_4 , e rispetto alla prima trasformazione le funzioni σ pari si scambiano fra loro *semplicemente*, senza cioè l'introduzione di alcun fattore estraneo come fanno al contrario le altre Θ (*).

Ricordando poi che ogni integrale di 3.^a specie si può esprimere mediante Q aggiuntavi un'espressione bilineare negli integrali di 1.^a specie, si ricava, con alcune considerazioni nei cui dettagli non posso entrare, che ogni altra Θ si esprime mediante la σ moltiplicata per un fattore costante e per un fattore esponenziale di 2.^o grado negli integrali di 1.^a specie.

Per il caso in cui si prendono per argomenti delle σ gli argomenti (2) del paragrafo precedente, cioè:

$$\int_y^x dw_1, \quad \int_y^x dw_2, \quad \int_y^x dw_3,$$

dipendenti solo da *due* punti x, y della superficie di RIEMANN, la σ acquista la forma:

$$\sigma\left(\int_y^x\right) = \frac{[xy]\Omega(xy)}{(xy)} (**),$$

dove $[xy]$ è l'espressione (2) del § 5.

Questa σ non è da confondersi colla σ generale che si costruirebbe per gli argomenti (3) del paragrafo precedente, ma è solo di essa un caso particolare.

Però la nostra speciale σ ha colla generale qualche cosa di comune, e l'osservazione che adesso stiamo per fare è fondamentale per tutto quello che diremo in seguito.

Le funzioni σ sono tali funzioni dei *punti* della superficie di RIEMANN che riescono funzioni analitiche monodrome *intere* degli integrali w di 1.^a specie (***). Esse possono dunque svilupparsi in serie secondo le potenze ascendenti delle w ; ora i termini di grado nelle w inferiore al 4.^o, sia della σ generale che della nostra particolare debbono essere necessariamente comuni. Non ripetiamo qui i dettagli di questa conclusione avendoli già esplicitati nella Mem. I (****).

(*) KLEIN, Opera cit., pag. 80-81. Mem. III, § 2.

(**) KLEIN, Opera cit., pag. 54 nota.

(***) BURKHARDT, *Hyperelliptische Funct.* Math. Ann., Bd. 32, § 21.

(****) Mem. I, § 7. FROBENIUS, *Ueber Jacobische Funct. dreier Argumente.* Crelle, Bd. 105.

Riferiamo infine le proprietà fondamentali dello sviluppo in serie delle σ pari secondo le potenze delle w (*):

1. Lo sviluppo è del tipo:

$$\sigma = 1 + [w]_2 + [w]_4 + \dots$$

2. Ciascuno di questi termini è funzione razionale ed intera dei coefficienti α_{ik} , β_{ik} , γ_{ik} , della rete di quadriche considerata nel § 4.

3. Il termine $[w]_{2\nu}$ è un covariante razionale intero della rete di quadriche, in cui le x sieno sostituite dalle tre w , di grado 2ν nelle w , di grado 8ν nei coefficienti di tale rete, e di grado zero nelle z .

§ 9. Sopra certi combinanti di 8.° grado di una rete di quadriche.

Dal paragrafo precedente risulta che il termine $[w]_2$ cioè il secondo termine dello sviluppo di σ pari deve essere un combinante di 8.° grado nei coefficienti e di 2.° ordine nelle x della rete $a_x a'_x$ mutandovi le x nelle w . Ricerchiamo dunque in questo paragrafo quanti sono tutti i siffatti *combinanti* fra loro linearmente indipendenti.

Poichè il combinante deve essere di 8.° grado debbo formare tutte le combinazioni del tipo invariantivo con otto coppie di simboli a α rispettivamente fra loro equivalenti, che chiamerò:

$$\begin{array}{cccccccc} a & a' & b & b' & c & c' & d & d' \\ \alpha & \alpha' & \beta & \beta' & \gamma & \gamma' & \delta & \delta'. \end{array}$$

Dovendo il *combinante* essere di 2.° ordine in x , vi dovranno comparire due fattori simbolici scelti fra gli otto $a_x a'_x b_x b'_x c_x c'_x d_x d'_x$. Noi sceglieremo per fissare le idee $a_x a'_x$.

Vi dovranno poi evidentemente essere due determinanti ternarii formati colle otto lettere greche, di cui ciascuna deve essere ripetuta due volte, perchè le lettere greche debbono sempre comparire a seconda potenza.

Inoltre qualunque sia la formazione invariantiva che formiamo possiamo sempre fare in modo che i simboli α α' non siano mai compresi in uno stesso determinante quaternario, ma ognuno dei quattro determinanti contenga o α o α' .

(*) KLEIN, Opera cit., pag. 81.

Infatti sieno, in una certa combinazione, α α' compresi in uno stesso determinante. Allora fra i quattro determinanti ne esisterà certamente uno che non conterrà nè α nè α' . Consideriamo allora questo determinante insieme coll'altro, e applichiamo la nota formola d'identità per determinanti quaternarii, prendendo per *elementi fissi* nel determinante contenente α e α' , tutti gli elementi meno α' . Allora abbiamo una serie di prodotti di due determinanti in cui α e α' sono sempre separati. Analogamente si procederebbe se vi fosse anche un altro determinante contenente insieme α e α' . Possiamo dunque effettivamente limitarci a considerare formazioni invariantive tali che in ogni determinante vi sia o α o α' .

Occupiamoci ora degli altri elementi di ciascun determinante. Dobbiamo distribuire le lettere β γ δ β' γ' δ' , di cui ciascuna deve essere ripetuta due volte, in quattro gruppi ternarii, in modo che due lettere eguali non stieno mai comprese in uno stesso gruppo.

Non ci sono che i seguenti tre casi possibili:

1. I tre elementi di uno dei gruppi stanno tutti in un altro unico gruppo.
2. Ne stanno solo due in un altro gruppo.
3. Ne sta solo uno.

A tali tre casi corrispondono propriamente i tre tipi:

$$\beta \gamma \delta \mid \beta \gamma \delta \mid \beta' \gamma' \delta' \mid \beta' \gamma' \delta' \mid \quad (1)$$

$$\beta \gamma \delta \mid \beta \gamma \delta' \mid \beta' \gamma' \delta \mid \beta' \gamma' \delta' \mid \quad (2)$$

$$\beta \gamma \delta \mid \beta \gamma' \delta' \mid \beta' \gamma \delta' \mid \beta' \gamma' \delta \mid, \quad (3)$$

nel senso che ogni altra combinazione analoga può sempre ridursi ad una di queste collo scambio opportuno di lettere, scambio che finora possiamo supporre effettuato perchè non ancora abbiamo fissati i due determinanti ternarii colle lettere b c d ... Ora è facile vedere che il tipo (1) non può dar luogo ad alcuno dei covarianti richiesti, perchè in esso aggiungendo la parte colle lettere latine b , c , d , b' ,... si vede che in qualunque modo si raggruppino in *due* parti queste sei lettere, sempre due almeno delle lettere b , c , d per es. b , c , verranno riunite in uno stesso determinante; quindi la formazione invariantiva corrispondente sarà zero, come si vede collo scambio di quelle tali due lettere b , c . Consideriamo il tipo (2).

Noi dobbiamo aggiungere a ciascuno dei quattro gruppi ternarii o un α o un α' e formare così i quattro determinanti quaternarii.

A prescindere dallo scambio di α con α' , si vede che non sono possibili

che solo le tre combinazioni:

$$\begin{vmatrix} \alpha & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta' \\ \alpha' & & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & & & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta \\ \alpha' & & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & & & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha & & & \end{vmatrix}. \quad (4)$$

La prima di tali combinazioni la ridurremo a due termini del tipo (3). Infatti per una nota identità:

$$(\alpha' \beta \gamma \delta') (\alpha' \beta' \gamma' \delta') = -(\alpha' \beta' \gamma \delta') (\gamma' \delta' \beta \alpha') - (\alpha' \gamma' \gamma \delta') (\delta' \beta \alpha' \beta'),$$

e moltiplicando per

$$(\alpha \beta \gamma \delta) (\alpha \beta' \gamma' \delta'),$$

si vede che si formano due combinazioni tali che i tre elementi (a prescindere da α e α') di ciascun determinante stanno distribuiti uno per parte in ciascuno degli altri tre, quindi si formano due combinazioni del tipo (3).

Una cosa analoga si può verificare nella terza delle combinazioni (4). Infatti unendo il secondo e quarto determinante si ha:

$$\begin{aligned} (\alpha \beta \gamma \delta) (\alpha' \beta' \gamma' \delta') [& -(\alpha' \beta \alpha \delta') (\beta' \gamma' \delta' \gamma) - (\alpha' \beta \beta' \delta') (\gamma' \delta' \gamma \alpha) \\ & - (\alpha' \beta \gamma' \delta') (\delta' \gamma \alpha \beta')], \end{aligned}$$

e si vede analogamente che il secondo e terzo dei termini che così risultano sono del tipo (3), e resta a considerare solo il primo termine, in cui α e α' stanno congiunti in uno stesso determinante e quindi noi dovremo fare in modo da separarle. Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} & -(\alpha \beta \gamma \delta) (\alpha' \beta' \gamma' \delta') (\alpha' \beta \alpha \delta') (\beta' \gamma' \delta' \gamma) = \\ & = (\alpha \beta \gamma \delta) (\alpha' \beta' \gamma' \delta') [(\beta' \beta \alpha \delta') (\gamma' \delta' \gamma \alpha') + (\gamma' \beta \alpha \delta') (\delta' \gamma \alpha' \beta') \\ & \quad + (\gamma \beta \alpha \delta') (\alpha' \beta' \gamma' \delta')], \end{aligned}$$

e si vede che i primi due termini sono pure del tipo (3) mentre l'ultimo è di un tipo analogo alla seconda formazione delle (4).

In quanto finalmente al tipo (3) è chiaro che è perfettamente indifferente distribuire ivi le α , α' in un modo piuttosto che in un altro. Giacchè incominciamo per es. a porre α al primo gruppo; se poi la seconda α la pongo una volta al secondo gruppo e un'altra volta al terzo, è chiaro che le due combinazioni che così si hanno si ricavano l'una dall'altra collo scambio di β , γ fra loro e β' , γ' fra loro.

Restano dunque da considerare le sole due combinazioni:

$$a_x a'_x (\alpha \beta \gamma \delta) (\alpha \beta \gamma \delta') (\alpha \beta' \gamma' \delta) (\alpha' \beta' \gamma' \delta') \quad (5)$$

$$a_x a'_x (\alpha \beta \gamma \delta) (\alpha \beta \gamma' \delta') (\alpha' \beta \gamma \delta') (\alpha' \beta' \gamma' \delta), \quad (6)$$

dove bisogna ancora aggiungere due determinanti ternarii formati colle sei lettere b, c, d, b', c', d' . È chiaro che tali due determinanti che dovranno moltiplicarsi per (5) dovranno essere formati in modo da non contenere b, c e b', c' rispettivamente unite in uno stesso determinante, altrimenti sarebbe zero l'espressione corrispondente.

Dovendo dunque per (5) b, c e b', c' stare sempre separate, si hanno solo le combinazioni:

$$(b c' d) (b' c d')$$

$$(b b d) (c c' d'),$$

di cui la seconda si ricava dalla prima collo scambio di b' con c' , scambio che non altera (5).

Distribuendo invece le d, d' in senso inverso si hanno combinazioni rispettivamente eguali perchè (5) è simmetrico in δ, δ' . Dunque da (5) si ha infine un unico covariante che con opportuno scambio di lettere possiamo scrivere:

$$(A) = a_x a'_x (b c d) (b' c' d') (\alpha \beta \gamma \delta) (\alpha \beta \gamma' \delta') (\alpha' \beta' \gamma \delta) (\alpha' \beta' \gamma' \delta').$$

Esaminiamo ora (6).

È facile prima di tutto verificare che (6) resta inalterato per le seguenti sostituzioni:

$$S_1 = (\beta \beta') (\gamma \gamma') (\alpha \alpha')$$

$$S_2 = (\beta \beta') (\delta \delta') (\alpha \alpha')$$

$$S_3 = (\gamma \gamma') (\delta \delta') = S_1 \cdot S_2$$

$$S_4 = (\gamma' \delta) (\gamma \delta')$$

$$S_5 = (\gamma \delta) (\gamma' \delta').$$

Tutte le combinazioni di determinanti ternarii che possono formarsi colle sei lettere sono dieci e propriamente:

$$(b c d) (b' c' d') \quad (7) \quad (b d c') (c b' d') \quad (12)$$

$$(b c b') (d c' d') \quad (8) \quad (b c' d') (c d b') \quad (13)$$

$$(b c c') (b' d d') \quad (9) \quad (b d b') (c c' d') \quad (14)$$

$$(b d d') (b' c c') \quad (10) \quad (b b' c') (c d d') \quad (15)$$

$$(b c d') (b' c' d) \quad (11) \quad (b b' d') (c d c'). \quad (16)$$

È facile vedere che (11) (12) (13) si riducono a (7) colle sostituzioni rispett. S_1, S_2, S_3 per le quali (6) resta inalterato.

Inoltre (14) (15) (16) si ricavano da (8) colle sostituzioni S_5, S_3, S_4 rispett.

Inoltre (9) e (10) si ricavano l'uno dall'altro colla sostituzione S_5 ; resta infine a far vedere che (8) (9) possono ridursi l'uno all'altro. Infatti:

$$(b c c')(b' d d') = (b c b')(d d' c') - (b c d)(d' c' b') + (b c d')(c' b' d),$$

e moltiplicando per (6) si vede che il tipo (9) può ridursi solo ai tipi (7), (8).

In tutto dunque oltre il covariante trovato (1) si hanno solo gli altri due:

$$(B) = a_x a'_x (b c d)(b' c' d')(\alpha \beta \gamma \delta)(\alpha \beta \gamma' \delta')(\alpha' \beta' \gamma \delta')(\alpha' \beta' \gamma' \delta)$$

$$(C) = a_x a'_x (b c b')(d c' d')(\alpha \beta \gamma \delta)(\alpha \beta \gamma' \delta')(\alpha' \beta' \gamma \delta')(\alpha' \beta' \gamma' \delta).$$

I tre covarianti (A) (B) (C) sono fra loro linearmente indipendenti, come risulterà da alcune considerazioni che svilupperemo nei paragrafi seguenti.

§ 10. Introduzione di un connesso (1, 2) nel piano in luogo della rete di quadriche.

Nei paragrafi precedenti noi abbiamo preso per fondamento dello studio delle funzioni σ pari una rete di quadriche; ciò porta a dover considerare dei covarianti di forme quaternarie. Si può però fare una notevole riduzione del problema mediante una semplice idea sviluppata dal Prof. KLEIN nelle sue lezioni all'Università di Göttingen (semestre d'estate 1889).

Prendiamo per vertice $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ del tetraedro fondamentale delle coordinate uno degli otto punti fondamentali della rete di quadriche. Allora è chiaro, dovendo le equazioni di *tutte le quadriche* della rete essere soddisfatte da $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, che dovrà sparire nell'equazione della rete il termine in z_4^2 .

Resta quindi un'espressione della forma:

$$2z_4\alpha_4(\alpha_1z_1 + \alpha_2z_2 + \alpha_3z_3)a_x + (\alpha_1z_1 + \alpha_2z_2 + \alpha_3z_3)^2a_x.$$

Facciamo una trasformazione lineare delle coordinate planari x ponendo:

$$2\alpha_1\alpha_4a_x \equiv x'_1$$

$$2\alpha_2\alpha_4a_x \equiv x'_2$$

$$2\alpha_3\alpha_4a_x \equiv x'_3.$$

Allora l'equazione diventa del seguente tipo (mutando poi ancora le x in u):

$$z_4(u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3) + [(u)_1, (z)_2],$$

dove col secondo termine si intende un'espressione di 1.° grado in u_1, u_2, u_3 , e di 2.° in z_1, z_2, z_3 . Simbolicamente possiamo scrivere questa forma canonica della rete di quadriche colla formola:

$$z_4 u_x + u_x \alpha_x^2, \quad (1)$$

dove i coefficienti a_i, α_j, α_k non hanno lo stesso significato a loro dato avanti.

Le trasformazioni per le quali questa forma *canonica* non si altera cioè resta della stessa natura sono di due specie:

1. Trasformazione lineare delle variabili u e corrispondente trasformazione *contragrediente* delle z , in maniera che u_x non si altera.

2. Mutamento di

$$u_x \alpha_x^2 \quad \text{in} \quad u_x \alpha_x^2 - u_x \mu_x,$$

e contemporaneamente di

$$z_4 \quad \text{in} \quad z_4 + \mu_x,$$

essendo gli μ coefficienti arbitrarii.

Onde quei tali combinanti della rete di quadriche di cui si è tenuto parola nel § 9 diventano tali covarianti di (1) che restino inalterati per le due trasformazioni (1) e (2) (*).

Interpretando le u come le coordinate di rette nel piano, l'espressione $u_x \alpha_x^2$ rappresenta un *connesso* generale (1, 2); i nostri combinanti saranno invarianti del connesso, ma nello stesso tempo invarianti di (1) dove z_4 (per effetto della trasformazione da cui debbono essere indipendenti, come si è detto, tali invarianti) può considerarsi come una quantità arbitraria. Ciò equivale a dire che i nostri combinanti debbono essere invarianti della cosiddetta *coincidenza principale* (*Hauptcoincidenz*) del connesso (1, 2) (**).

È facile determinare un'equazione differenziale a cui debbono soddisfare i detti invarianti. Sia J uno di tali invarianti, e facciamo le derivate di esso rispetto ai coefficienti μ , quando suppongo in J poste in luogo dei coefficienti

(*) Vedi a questo proposito il Programma di KLEIN all'Università di Erlangen: *Vergleichenden Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen, 1872.

Una traduzione di questo eccellente lavoro del KLEIN è comparso ora in questo stesso Giornale (trad. GINO FANO) sotto gli auspici del mio carissimo amico prof. SEGRE.

(**) CLEBSCH-LINDEMANN, *Geometrie* (ediz. francese), vol. III, pag. 434 e seg. Vedi anche GODT, *Ueber den Connex erster Ordnung und zweiter Klasse*. Göttingen, 1873.

del connesso, quelli di $u_a \alpha_a^2 - u_x \mu_x = C'$. Tali derivate debbono essere zero perchè eguali a quelle dell'invariante primitivo J (in cui non entrano le μ) rispetto a μ . Possiamo anche dire così: quando in J in luogo dei coefficienti del connesso C introduciamo quelli di C' si ha per primo termine J stesso, e per secondo termine il risultato del processo di ARONHOLD su J quando in luogo dei coefficienti di C pongo quelli di $u_x \mu_x$. Poichè tutto il primo membro deve essere lo stesso J , così avendosi:

$$J' = J + \sum \frac{\partial J}{\partial C} (u_x \mu_x) + \dots,$$

dovrà essere:

$$\sum \frac{\partial J}{\partial C} (u_x \mu_x) + \dots = 0,$$

e quindi essendo μ arbitrario, e poichè i termini seguenti sono di grado maggiore in μ , ciascun termine deve essere zero, dunque:

$$\sum \frac{\partial J}{\partial C} (u_x \mu_x) = \delta J = 0. \quad (2)$$

Tale è l'equazione differenziale a cui debbono soddisfare gli invarianti J .

§ 11. Espressione, come invarianti del connesso, dei principali combinanti della rete di quadriche.

1. In primo luogo troviamo l'espressione della curva di 4.^o ordine.

Per far ciò molto semplicemente gioviamoci dell'espressione di Π data al § 4.

Si ha allora:

$$f = \Pi = 2 \begin{vmatrix} u_a \alpha_1^2 & u_a \alpha_1 \alpha_2 & u_a \alpha_1 \alpha_3 & u_1 \\ u_b \beta_1 \beta_2 & u_b \beta_2^2 & u_b \beta_2 \beta_3 & u_2 \\ u_c \gamma_1 \gamma_3 & u_c \gamma_2 \gamma_3 & u_c \gamma_3^2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} \\ = u_a u_b (\alpha \beta u)^2. \quad (1)$$

2. Passiamo alla rappresentazione delle cubiche di contatto (*). Usiamo

(*) È ovvio osservare che poichè ora per noi le coordinate fondamentali sono le u , cioè coordinate di rette, così le atiche *cubiche di contatto* acquistano un significato geometrico diverso rispetto alla curva di quarta classe Π . Noi lasceremo però le stesse denominazioni.

la rappresentazione di Φ_{vv} data al § 4. Si ha:

$$\Phi_{vv} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_a \alpha_1^2 & u_a \alpha_1 \alpha_2 & u_a \alpha_1 \alpha_3 & u_1 & v_1 \\ u_b \beta_1 \beta_2 & u_b \beta_1^2 & u_b \beta_2 \beta_3 & u_2 & v_2 \\ u_c \gamma_1 \gamma_3 & u_c \gamma_2 \gamma_3 & u_c \gamma_3^2 & u_3 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da questa formola complessiva di tutte le cubiche di contatto che sono in numero triplamente infinito, possiamo ricavare due formole di cui l'una rappresenti un sistema solo doppiamente infinito di cubiche di contatto e l'altra rappresenta un'unica cubica non compresa fra le prime.

Facendo $v_4 = 0$ si ha infatti il sistema di cubiche:

$$\Phi_{vv} = \frac{1}{2} u_a (\alpha u v)^2. \quad (2)$$

Facciamo invece $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ $v_4 = 1$ e si ha:

$$\Phi_4 = -\frac{1}{12} u_a u_b u_c (\alpha \beta \gamma)^2. \quad (3)$$

Oltre le cubiche di contatto dobbiamo considerare anche quelle altre cubiche che passano per i dodici punti di contatto di due cubiche dello stesso sistema. Tali cubiche si otterrebbero ponendo nel determinante precedente le v' in luogo delle v fra gli elementi dell'ultima linea orizzontale.

Dalla (2) ricaviamo le tre cubiche di contatto fondamentali corrispondenti ai valori dei parametri:

$$\begin{aligned} v_1, \quad v_2, \quad v_3 &= 1, \quad 0, \quad 0 \\ &0, \quad 1, \quad 0 \\ &0, \quad 0, \quad 1. \end{aligned}$$

Indicando con Φ_1 Φ_2 Φ_3 le cubiche corrispondenti si ha:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} u_a (u_2 \alpha_3)^2 \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} u_a (u_3 \alpha_1)^2 \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2} u_a (u_1 \alpha_2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Indicando con $\Phi_{12} \Phi_{13} \Phi_{23} \dots$ le altre cubiche di cui si è parlato sopra, si ha:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{12} &= \frac{1}{2} u_a (u_2 \alpha_3) (u_3 \alpha_1) \\ \Phi_{23} &= \frac{1}{2} u_a (u_3 \alpha_1) (u_1 \alpha_2) \\ \Phi_{31} &= \frac{1}{2} u_a (u_1 \alpha_2) (u_2 \alpha_3) \\ \Phi_{14} &= \frac{1}{4} u_a u_b (u \alpha \beta) (\alpha_2 \beta_3) \\ \Phi_{24} &= \frac{1}{4} u_a u_b (u \alpha \beta) (\alpha_3 \beta_1) \\ \Phi_{34} &= \frac{1}{4} u_a u_b (u \alpha \beta) (\alpha_1 \beta_2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Colle formole date vogliamo ora verificare in primo luogo $\Phi_i \Phi_j = \Phi_{ij}^2$ e poi la formola che dà l'espressione di C_4 mediante le cubiche di contatto.

Riguardo alla verifica della prima formola, tale verifica è sostanzialmente diversa secondochè i o j sono eguali a 4 oppure nessuno dei due è 4. Nel secondo caso la verifica è facile partendo dalla formola identica:

$$\begin{aligned} [(u_2 \alpha_3) (u_3 \beta_1) - (u_2 \beta_3) (u_3 \alpha_1)]^2 &= (u_2 \alpha_3)^2 (u_3 \beta_1)^2 + (u_2 \beta_3)^2 (u_3 \alpha_1)^2 \\ &\quad - 2(u_2 \alpha_3) (u_3 \alpha_1) (u_2 \beta_3) (u_3 \beta_1), \end{aligned}$$

e osservando che:

$$(u_2 \alpha_3) (u_3 \beta_1) - (u_2 \beta_3) (u_3 \alpha_1) = u_3 (u \alpha \beta),$$

si ha immediatamente moltiplicando per $u_a u_b$:

$$u_3^2 (u \alpha \beta)^2 u_a u_b = 2(\Phi_1 \Phi_2 - \Phi_{12}^2),$$

ed essendo $(u \alpha \beta)^2 u_a u_b = 0$ si ha l'assunto.

Verifichiamo invece la formola:

$$\Phi_1 \Phi_4 = \Phi_{14}^2.$$

Partiamo da:

$$(u_2 \alpha_3)^2 (\beta \gamma \delta)^2 u_a u_b u_c u_d,$$

e trasformiamo con:

$$(u_2 \alpha_3) (\beta \gamma \delta) = (\beta_2 \alpha_3) (u \gamma \delta) + (\gamma_2 \alpha_3) (\beta u \delta) + (\delta_2 \alpha_3) (\beta \gamma u).$$

Facendo per un momento astrazione dai fattori lineari simbolici si ha

per risultato:

$$3(\beta_2 \alpha_3)(u \gamma \delta)(u_2 \alpha_3)(\beta \gamma \delta), \quad (6)$$

il quale colla stessa formola diventa:

$$3(\beta_2 \alpha_3)^2 (u \gamma \delta)^2 - 6(\beta_2 \alpha_3)(\gamma_2 \alpha_3)(u \gamma \delta)(u \beta \delta).$$

Il secondo di questi termini colla formola:

$$(\beta_2 \alpha_3)(u \gamma \delta) = -(\alpha_2 \delta_3)(u \gamma \beta) - (\delta_2 \beta_3)(u \gamma \alpha) + (u_2 \gamma_3)(\beta \alpha \delta),$$

diventa:

$$+ 3[(\gamma_2 \alpha_3)(u \gamma \alpha)(\delta_2 \beta_3)(u \beta \delta) - (\gamma_2 \alpha_3)(u_2 \gamma_3)(u \beta \delta)(\beta \alpha \delta)],$$

di cui il secondo termine è eguale e col segno contrario a (6) da cui siamo partiti; dunque si ha infine:

$$(u_2 \alpha_3)^2 (\beta \gamma \delta)^2 = \frac{3}{2} (\beta_2 \alpha_3)^2 (u \gamma \delta)^2 - \frac{3}{2} (\gamma_2 \alpha_3)(u \gamma \alpha)(\beta_2 \delta_3)(u \beta \delta),$$

cioè moltiplicando per i fattori lineari tralasciati,

$$\Phi_1 \Phi_4 - \Phi_{14}^2 = -\frac{1}{16} (u \gamma \delta)^2 (\beta_2 \alpha_3)^2 a_x b_x c_x d_x = 0.$$

È facile infine verificare la formola:

$$\Pi = \sum u_i a_i \alpha_j \alpha_k \sqrt{\Phi_j} \sqrt{\Phi_k} + 2 \sqrt{\Phi_4} \sum u_i \sqrt{\Phi_i}.$$

corrispondente alla (3) del § 5.

§ 12. Espressione mediante i coefficienti del connesso dei combinanti di 8.º grado del § 9.

Ricerchiamo, prima di tutto, il tipo che acquistano i covarianti detti quando in luogo dei coefficienti della rete di quadriche pongo i coefficienti di

$$u_a \alpha_z^2 + z_4 u_x \quad (u, z, \text{ternarie}).$$

Le modificazioni da apportare ai coefficienti della rete sono:

1. I coefficienti contenenti due indici 4 sono zero (supponiamo la rete espressa sotto la forma $\sum \alpha_{ijk} u_i z_j z_k$ dove gli α sono coefficienti effettivi).

2. I coefficienti contenenti un solo indice 4 sono zero se gli altri due indici non sono fra loro eguali; e se tali due indici sono eguali allora tali coefficienti sono eguali ad 1.

3. Infine i coefficienti non contenenti alcun indice 4 sono gli stessi dei coefficienti di $u_a \alpha_z^2$ dove u, z sono ambedue variabili ternarie.

Con queste considerazioni si vede che i combinanti del § 9 che erano di 8.° grado nei coefficienti, restano solo di 4.° grado nei coefficienti del connesso.

Giacchè nello sviluppo dei determinanti quaternarii in ogni termine vi compariranno sempre nel complesso quattro indici 4. Ora se due di tali indici 4 appartengono alla stessa lettera allora tutto il termine va a zero. Se appartengono invece a quattro lettere diverse per es. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, allora completando ciascuno di questi simboli colle lettere a, b , ecc. se i due indici della nuova α e di a , o di β , e di b ecc. sono disuguali, il termine va a zero, e se sono eguali i coefficienti $a_i \alpha_i \alpha_i$, $b_j \beta_j \beta_j$, ecc. sono eguali ad 1, quindi tutto il termine che conteneva otto simboli, ne viene a contenere quattro.

Si ricava dunque per risultato che i covarianti di cui si parla restano solo di *quarto* grado nei coefficienti del connesso.

Ricerchiamo dunque tutti i covarianti di 4.° grado e di seconda classe di un connesso (1, 2).

§ 13. Ricerca di tutti i covarianti di 4.° grado e di seconda classe di un connesso (1, 2).

Abbiamo a nostra disposizione da poter combinare *invariantivamente* 14 elementi, cioè:

2	simboli	u
4	"	a, b, c, d
2	"	α
2	"	β
2	"	γ
2	"	δ ,

tutti ternarii però i simboli indicati dalle lettere latine a, b, c, d debbono considerarsi come *contragredienti* cogli altri simboli $u, \alpha, \beta, \gamma, \delta$; ciò porta che non potranno mai essere riuniti con quelli in uno stesso determinante.

In primo punto fra le formazioni invariantive che andiamo cercando non ce ne possono essere di quelle che contengono *solo* determinanti perchè con 14 elementi non possono formarsi un numero intero di determinanti ternarii.

Vi sia dunque *un solo* fattore lineare che viene ad occupare due elementi; ne restano dodici coi quali possono appunto formarsi quattro determinanti ternarii.

È facile vedere che non possono aversi formazioni con due o tre fattori lineari. Resta solo il caso di *quattro* fattori lineari e quindi *due* determinanti ternarii. Si hanno dunque *due* tipi diversi di formazioni:

1. Un fattore lineare e quattro determinanti.
2. Quattro fattori lineari e due determinanti.

Esaminiamo i primi.

Un fattore lineare non è che di due tipi, cioè o del tipo u_a , o del tipo α_a . Fissato per es. a come indice del fattore lineare, restano le altre tre lettere b, c, d , *contragredienti* a tutte le altre rimanenti, e quindi non possono che riunirsi fra loro in un solo determinante ($b\ c\ d$). Ora questo determinante può accoppiarsi con un altro di quelli che compariscono nella formazione, e poichè sono due determinanti formati rispett. con elementi contragredienti, così, per una identità simbolica, tale prodotto si scinde in un aggregato di prodotti di fattori lineari. Dal tipo 1 passiamo dunque al 2. Ma anche qui possiamo effettuare una ulteriore riduzione; possiamo cioè sempre supporre che i due simboli u stieno ciascuno in uno dei determinanti. Infatti supposto che uno di essi comparisca in un fattore lineare, allora vi sarà certamente un determinante non contenente u . Si potrà dunque accoppiare il fattore lineare in u col determinante che ne è privo, e mediante una nota identità simbolica, ridursi a termini contenenti u in ciascuno dei due determinanti. Classifichiamo dunque solo i seguenti invarianti corrispondenti a tutti i casi possibili che ci si presentano colle fatte riduzioni:

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & \left\{ \begin{array}{l} (u\ \alpha\ \beta)(u\ \gamma\ \delta) \quad \alpha_a \quad \beta_c \quad \gamma_b \quad \delta_d \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \alpha_a \quad \beta_c \quad \gamma_d \quad \delta_b \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \alpha_b \quad \beta_c \quad \gamma_d \quad \delta_a \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \alpha_c \quad \beta_d \quad \gamma_a \quad \delta_b \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \alpha_c \quad \beta_d \quad \gamma_b \quad \delta_a \end{array} \right. \\
 \\
 \text{II.} & \left\{ \begin{array}{l} (u\ \delta\ \beta)(u\ \gamma\ \alpha) \quad \alpha_a \quad \alpha_b \quad \beta_c \quad \gamma_d = (1) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \alpha_a \quad \alpha_b \quad \gamma_c \quad \beta_d = (2) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \alpha_a \quad \beta_b \quad \gamma_c \quad \alpha_d = (3) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \alpha_a \quad \gamma_b \quad \beta_c \quad \alpha_d = (4) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \beta_a \quad \gamma_b \quad \alpha_c \quad \alpha_d = (5) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \beta_a \quad \alpha_b \quad \gamma_c \quad \alpha_d = (6) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \beta_a \quad \alpha_b \quad \alpha_c \quad \gamma_d = (7) \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\text{III.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} (u \partial \gamma)^2 & \alpha_a \beta_b \alpha_c \beta_d = (8) \\ " & \alpha_a \alpha_b \beta_c \beta_d = (9) \\ " & \beta_a \alpha_b \alpha_c \beta_d = (10). \end{array} \right.$$

Il caso I corrisponde a quello in cui i due determinanti oltre u non hanno altro simbolo comune; il caso II corrisponde al caso in cui i due determinanti hanno anche un altro simbolo comune, e III quando hanno anche gli altri due simboli comuni.

Noi dimostreremo ora che il gruppo I è inutile a considerarsi.

Infatti applichiamo alla prima formazione del gruppo I l'identità:

$$(u \alpha \beta) \gamma_b = (\alpha \beta \gamma) u_b - \text{ecc.}$$

Si hanno allora tutti termini del gruppo II, a meno del termine:

$$(\alpha \beta \gamma) (u \gamma \partial) \alpha_a \beta_c u_b \partial_d.$$

Applichiamo a questo termine l'identità:

$$(\alpha \beta \gamma) \partial_d = \text{ecc. ecc.}$$

Si hanno allora da esso altri tre termini, di cui i due primi colle altre identità rispett.

$$(\beta \gamma \partial) u_b = \text{ecc.} \quad (\gamma \partial \alpha) u_b = \dots,$$

si riducono a termini del gruppo II, e l'ultimo con:

$$(\partial \alpha \beta) u_b = \text{ecc.},$$

dà a sua volta termini del gruppo II più il secondo termine del gruppo I.

In modo perfettamente analogo possiamo vedere che la terza espressione del gruppo I si riduce pure alla seconda, e la quarta si riduce alla quinta, a meno di termini del II gruppo.

È chiaro dunque che se noi dimostreremo che il secondo e quinto termine di I sono ambedue zero, resterà con ciò dimostrato che è inutile considerare tutto il gruppo I.

Ora usiamo la formola:

$$(u \alpha \beta) (u \gamma \partial) = + (u \alpha \gamma) (u \beta \partial) - (u \alpha \partial) (u \beta \gamma).$$

Moltiplichiamo il primo e secondo membro per

$$\alpha_a \beta_c \gamma_d \partial_b,$$

che è il fattore simbolico della seconda espressione di I. Poichè questo fattore

simbolico resta inalterato per la permutazione circolare dei simboli:

$$\beta \quad \gamma \quad \delta,$$

e quindi corrispondentemente:

$$b \quad c \quad d,$$

troviamo l'effetto di tali permutazioni sul secondo membro della formola precedente. Si vede che con esse il primo termine diventa esattamente il secondo; si ottiene dunque in tutto il doppio del secondo termine; ma questo a sua volta colla stessa permutazione diventa quello da cui siamo partiti, col segno cambiato, dunque l'espressione detta è zero.

Moltiplichiamo invece il primo e secondo membro della stessa formola per

$$\alpha_c \quad \gamma_b \quad \beta_d \quad \delta_a,$$

che resta inalterato per la permutazione circolare dei simboli:

$$\alpha \quad \gamma \quad \beta \quad \delta$$

e corrispondentemente:

$$a \quad c \quad b \quad d.$$

Per tale permutazione il primo termine del secondo membro diventa esattamente il secondo termine ma col segno positivo, dunque tutto il secondo membro va a zero. Si conclude che anche la quinta espressione del gruppo I è zero.

Restano dunque i dieci covarianti di II e III che sono fra loro linearmente indipendenti, come risulterà da alcune considerazioni indirette dei paragrafi seguenti.

§ 14. Covarianti di 4.^o grado e seconda classe della *coincidenza principale* (Hauptcoincidenz) del connesso (1, 2).

Come abbiamo sviluppato nel § 10 i covarianti della coincidenza principale del connesso dovranno essere tali combinazioni lineari dei dieci covarianti del paragrafo precedente che soddisfino ad una certa equazione differenziale caratterizzata da un processo di ARONHOLD pel quale ai coefficienti del connesso si sostituiscono i coefficienti di

$$u_x \mu_x,$$

dove μ_x è arbitraria.

Incominciamo col trovare l'effetto del primo membro di tale equazione differenziale su tutti i dieci covarianti del paragrafo precedente.

Esponiamo i dettagli del procedimento solo pel primo di essi, perchè analogamente si procederebbe per tutti gli altri.

Osserviamo che (1) si ricava da

$$C = u_a \alpha_x^2,$$

facendo la polare:

$$u_a \alpha_x \alpha_{x'},$$

e poi mutando x' in b e ponendo:

$$u_1 z_1 = u_2 z_2 = u_3 z_3 = 1$$

$$u_1 z_2 = u_2 z_1 = \dots = 0,$$

e poi moltiplicando infine per

$$(u \partial \beta) (a \partial \gamma) \beta_c \gamma_d.$$

Facciamo quindi lo stesso procedimento non prendendo per punto di partenza C , ma $u_x \mu_x$.

Facendo la polare si ha:

$$\frac{1}{2} (u_x \mu_{x'} + u_{x'} \mu_x),$$

donde:

$$\frac{1}{2} (u_x \mu_b + u_b \mu_x),$$

e finalmente:

$$2(u \partial \beta) (u \partial \gamma) \beta_c \gamma_d \mu_b.$$

Con ciò abbiamo applicato ad (1) il processo di ARONHOLD, tenendo però conto solo della serie di coefficienti a , α che compariscono in (1). Si deve ora successivamente tener conto di tutte le altre serie di coefficienti:

$$b, \beta; \quad c, \gamma; \quad d, \delta,$$

e applicare sempre procedimenti analoghi.

Inseriremo di qui a poco i risultati che così otterremo.

Intanto per procedere in seguito più semplicemente introduciamo le notazioni:

$$\left\{ \begin{array}{lll} (u \gamma \delta)^2 & \beta_b & \beta_c \mu_d = (I) \\ " & \beta_c & \beta_d \mu_b = (II) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases}
 (u \delta \beta) (u \delta \gamma) \beta_b \gamma_c \mu_d = \text{(III)} \\
 \quad \quad \quad " \quad \quad \beta_c \gamma_b \mu_d = \text{(IV)} \\
 \quad \quad \quad " \quad \quad \beta_b \gamma_d \mu_c = \text{(V)} \\
 \quad \quad \quad " \quad \quad \beta_d \gamma_b \mu_c = \text{(VI)} \\
 \\
 (u \delta \mu) (u \delta \gamma) \beta_b \beta_d \gamma_c = \text{(VII)} \\
 \quad \quad \quad " \quad \quad \beta_b \beta_c \gamma_d = \text{(VIII)} \\
 \quad \quad \quad " \quad \quad \beta_c \beta_d \gamma_b = \text{(IX)} \\
 \\
 (u \beta \mu) (u \delta \gamma) \beta_c \gamma_b \delta_d = \text{(X)} \\
 \quad \quad \quad " \quad \quad \beta_c \gamma_d \delta_d = \text{(XI)}.
 \end{cases}$$

I risultati che verremo ad ottenere coi procedimenti detti sono tutti combinazioni lineari di questi undici covarianti.

Dimostriamo che (XI) è zero. Infatti permutando circolarmente b, c, d e per conseguenza β, γ, δ , la parte composta di fattori lineari resta inalterata, e l'altra parte diventa:

$$(u \beta \mu) (u \delta \gamma) + (u \gamma \mu) (u \beta \delta) + (u \delta \mu) (u \gamma \beta),$$

che per effetto di una nota identità simbolica, è identicamente zero.

È utile aggiungere inoltre che nella quarta categoria si potrebbero formare anche altre due combinazioni aggiungendo i seguenti fattori lineari.

$$\begin{aligned}
 &\beta_b \gamma_c \delta_d \\
 &\beta_b \gamma_d \delta_c.
 \end{aligned}$$

Ma è facile vedere per lo scambio di γ, c con δ, d che tali combinazioni sono zero.

Dimostriamo infine che (X) si esprime linearmente mediante gli altri nove.

Infatti esso può trasformarsi:

$$(u \delta \gamma) \beta_c \gamma_b [\beta \mu \delta] u_d - (\mu \delta u) \beta_d + (\delta u \beta) \mu_d,$$

di cui il secondo e terzo termine sono rispettivamente (IX) e (IV), mentre il primo si trasforma così:

$$\begin{aligned}
 &(u \delta \gamma) \beta_c u_d \{ (\mu \delta \gamma) \beta_b - (\delta \gamma \beta) \mu_b + (\gamma \beta \mu) \delta_b \} = \\
 &= - (u \delta \gamma) \beta_c \beta_b [(\delta \gamma u) \mu_d - (\gamma u \mu) \delta_d + (u \mu \delta) \gamma_d] \\
 &\quad - (u \delta \gamma) \beta_c \mu_b [(\gamma \beta u) \delta_d - (\beta u \delta) \gamma_d + (u \delta \gamma) \beta_d] \\
 &\quad - (u \delta \gamma) \beta_c \delta_b [(\beta \mu u) \gamma_d - (\mu u \gamma) \beta_d + (u \gamma \beta) \mu_d],
 \end{aligned}$$

onde infine riducendo si ha la formola:

$$(X) = (I) - (II) - (IV) + (V) - (VII) - (VIII) + 2(IX).$$

I risultati che si ottengono operando il primo membro dell'equazione differenziale sui dieci covarianti del § 13 sono dati dalla seguente tabella:

da	(1)	si ha:	$2(VI) + \frac{1}{2}(VIII) + \frac{1}{2}(V) + \frac{1}{2}(I)$
"	(2)	"	$2(V) + \frac{1}{2}(III) + 2(VIII)$
"	(3)	"	$2(III) + 4(VII)$
"	(4)	"	$2(IV) + (I) + (VII) - (X)$
"	(5)	"	$\frac{1}{2}(IV) + (VI) + (IX) + \frac{1}{2}(II)$
"	(6)	"	$\frac{1}{2}(III) + (V) + \frac{1}{2}(VII) + 2(IX) + \frac{1}{2}(X)$
"	(7)	"	$\frac{1}{2}(V) + (VI) + \frac{1}{2}(VIII) + \frac{1}{2}(IV)$
"	(8)	"	$4(I) + 2(VII)$
"	(9)	"	$2(II) + (I) + 2(VIII)$
"	(10)	"	$(I) + (II) + 2(IX).$

Dimostreremo adesso che le espressioni:

$$I, II, \dots IX,$$

sono tutte fra loro linearmente indipendenti; questo è un punto essenziale per la ricerca che seguirà.

Sia:

$$c_1 I + c_2 II + \dots + c_9 IX = 0,$$

la supposta relazione lineare esistente fra i nove covarianti; faremo vedere che i coefficienti c non possono che essere tutti zero.

Indichiamo per semplicità con soli *tre* numeri i coefficienti del connesso C ; indichiamo cioè col simbolo $(i \ j \ k)$ il coefficiente:

$$a_i a_j a_k.$$

Facciamo ora le seguenti considerazioni:

1. Troviamo in primo luogo in tutti i nove covarianti I, II, ... IX il coefficiente di $u_3^2 \mu_1$ e propriamente quella parte di tale coefficiente risultante di tali coefficienti del connesso che i *primi indici* siano eguali ad 1.

Si trova che:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}} \right\} \text{ danno } 2(111)^2(122) - 2(111)(112)^2$$

$$\begin{array}{l} \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \\ \text{VI} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \\ \text{VI} \end{array}} \right\} \text{ danno } (111)^2(122) - (111)(112)^2$$

$$\begin{array}{l} \text{VII} \\ \text{VIII} \\ \text{IX} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{VII} \\ \text{VIII} \\ \text{IX} \end{array}} \right\} \text{ danno } (111)^2(122) - (111)(112)^2.$$

onde fra i coefficienti c dovrebbe sussistere sempre la relazione:

$$2(c_1 + c_2) + (c_3 + c_4 + c_5 + c_6) + (c_7 + c_8 + c_9) = 0. \quad a)$$

Facciamo ora che il connesso diventi:

$$u_p \pi_x \pi'_x,$$

dove p, π, π' sieno espressioni effettive, non più simboliche. Allora I, II, ... VI diventano:

$$-\frac{1}{2}(u\pi\pi')^2 \mu_p \pi_p \pi'_p.$$

D'altra parte VII, VIII, IX diventano:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\{ (u\pi\mu)(u\pi\pi')\pi'_p + (u\pi'\mu)(u\pi'\pi)\pi_p \right\} \pi_p \pi'_p \\ & = -\frac{1}{2} \left\{ (u\pi\pi')^2 \mu_p \pi_p \pi'_p - (u\pi\pi')(\mu\pi\pi') u_p \pi_p \pi'_p \right\}. \end{aligned}$$

Ora $(u\pi\pi')^2 \mu_p$ e $(u\pi\pi')(\mu\pi\pi') u_p$ sono fra loro linearmente indipendenti, perchè per $\mu = \pi$ va a zero solo la seconda di esse, dunque tenendo in vista

i risultati superiori si hanno le seguenti altre relazioni fra le c :

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_9 = 0 \quad b)$$

$$c_7 + c_8 + c_9 = 0. \quad c)$$

Le tre relazioni trovate danno:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 0 \\ c_7 + c_8 + c_9 = 0. \end{array} \right.$$

2. Troviamo con quali coefficienti numerici comparisce, nel coefficiente di $u_3^2 \mu_1$ nei diversi covarianti, l'espressione:

$$(1\ 1\ 1)(2\ 2\ 2)^2.$$

Si trova che tali coefficienti numerici sono:

per	I,	+ 1
"	II,	0
"	III,	+ 1
"	IV,	+ 1
"	V,	0
"	VI,	0
"	VII,	+ 1
"	VIII,	0
"	IX,	0.

Si ha dunque fra le c l'altra relazione:

$$c_1 + c_3 + c_4 + c_7 = 0. \quad d)$$

3. Troviamo analogamente con quali coefficienti numerici compariscono nel coefficiente di $u_3^2 \mu_3$ nei vari covarianti, le espressioni:

$$(1\ 1\ 2)(3\ 3\ 2)(3\ 1\ 1),$$

e

$$(3\ 2\ 1)^2(2\ 3\ 2).$$

Procedendo quindi in modo analogo al modo tenuto avanti si ricavano le altre due relazioni:

$$-2c_1 - 2c_4 - c_6 = 0 \quad e)$$

$$2c_3 - c_6 = 0. \quad f)$$

Da *d)* *e)* *f)* si ricava:

$$c_7 = 0.$$

Quindi da ora in poi sarà inutile considerare ulteriormente il covariante VII il quale è certamente indipendente da tutti gli altri.

4. In ciascuno dei rimanenti otto covarianti, troviamo il modo con cui compariscono le seguenti espressioni:

$$(3\ 3\ 3)(3\ 1\ 1)(1\ 2\ 2)$$

$$(3\ 3\ 3)(3\ 2\ 2)(1\ 1\ 1)$$

$$(3\ 3\ 2)^2(1\ 1\ 1),$$

nel coefficiente di $u_3^2 \mu_1$.

Procedendo come avanti, si hanno le relazioni:

$$c_1 + c_8 = 0 \quad g)$$

$$c_1 = 0 \quad h)$$

$$c_3 + c_4 = 0. \quad k)$$

Queste nuove relazioni unite colle precedenti e fra loro danno:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad c_8 = 0 \quad c_9 = 0$$

$$c_3 + c_4 = 0 \quad c_5 + c_6 = 0.$$

I soli covarianti che restano dunque a considerare sono III, IV, V, VI, gli altri essendo già risultati certamente indipendenti da tutti i rimanenti.

5. Troviamo finalmente in tali ultimi quattro covarianti il coefficiente di $u_3^2 \mu_2$, e propriamente quella parte di tale coefficiente contenente l'espressione:

$$(1\ 1\ 1)(2\ 1\ 2)(3\ 2\ 2).$$

Si ha la relazione:

$$2c_3 - c_5 + c_6 = 0. \quad i)$$

che unita colle precedenti dà finalmente anche:

$$c_3 = 0 \quad c_4 = 0 \quad c_5 = 0 \quad c_6 = 0.$$

Con ciò resta definitivamente dimostrato che le nove espressioni I, II, ... IX sono fra loro linearmente indipendenti.

Ritorniamo ora al nostro problema fondamentale, che era di trovare tali combinazioni lineari dei dieci covarianti del § 13 che soddisfacciano all'equazione differenziale. Moltiplichiamo tali dieci covarianti per $a_1 a_2 \dots a_{10}$ e sommiamo. Applichiamo a questo aggregato l'equazione differenziale, giovandoci delle formole già stabilite, e poniamo eguali a zero i coefficienti dei diversi

covarianti:

I, II, ... IX,

fra loro linearmente indipendenti, che vengono così a comparire (*).

Si ha il seguente sistema di nove equazioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_6 + 4 a_8 + a_9 + a_{10} &= 0 \\
 a_4 + \frac{1}{2} a_5 - \frac{1}{2} a_6 + 2 a_9 + a_{10} &= 0 \\
 \frac{1}{2} a_2 + 2 a_3 + \frac{1}{2} a_6 &= 0 \\
 3 a_4 + \frac{1}{2} a_5 - \frac{1}{2} a_6 + \frac{1}{2} a_7 &= 0 \\
 \frac{1}{2} a_1 + 2 a_2 - a_4 + \frac{3}{2} a_6 + \frac{1}{2} a_7 &= 0 \\
 2 a_1 + a_5 + a_7 &= 0 \\
 4 a_3 + 2 a_4 + 2 a_8 &= 0 \\
 \frac{1}{2} a_1 + 2 a_2 + a_4 - \frac{1}{2} a_6 + \frac{1}{2} a_5 + 2 a_9 &= 0 \\
 -2 a_4 + a_5 + 3 a_6 + 2 a_{10} &= 0.
 \end{aligned}$$

Di queste nove equazioni due sono conseguenza delle altre, per modo che questo sistema si riduce all'altro:

$$\left\{ \begin{aligned}
 a_4 &= -\frac{2}{3} a_3 - \frac{1}{6} a_2 + \frac{1}{3} a_1 \\
 a_5 &= -\frac{32}{3} a_3 + \frac{4}{3} a_2 - \frac{5}{6} a_1 \\
 a_6 &= -4 a_3 - a_2 \\
 a_7 &= \frac{32}{3} a_3 - \frac{4}{3} a_2 - \frac{1}{3} a_1 \\
 a_8 &= -\frac{4}{3} a_3 + \frac{1}{6} a_2 - \frac{1}{3} a_1 \\
 a_9 &= -\frac{10}{3} a_3 - \frac{5}{6} a_2 - \frac{1}{3} a_1 \\
 a_{10} &= \frac{32}{3} a_3 + \frac{2}{3} a_2 - \frac{7}{6} a_1.
 \end{aligned} \right.$$

(*) Si ricordi di sostituire il X colla sua espressione mediante gli altri nove, già stabilita in questo stesso paragrafo.

Esistono dunque evidentemente *al più tre* covarianti soddisfacenti alla nostra equazione differenziale, cioè esistono *al più tre* covarianti della coincidenza principale del connesso. Tali tre covarianti si ottengono scegliendo valori arbitrarii per a_1, a_2, a_3 e ricavando dal sistema di equazioni precedenti i valori degli altri coefficienti numerici. Per es. scegliamo rispett.:

$$a_3 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_1 = 0$$

$$a_3 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_1 = 0$$

$$a_3 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_1 = 1.$$

Si hanno allora le tre formazioni:

$$(3) - \frac{2}{3}(4) - \frac{32}{3}(5) - 4(6) + \frac{32}{3}(7) - \frac{4}{3}(8) - \frac{10}{3}(9) + \frac{32}{3}(10) = (a)$$

$$(2) - \frac{1}{6}(4) + \frac{4}{3}(5) - (6) - \frac{4}{3}(7) + \frac{1}{6}(8) - \frac{5}{6}(9) + \frac{2}{3}(10) = (b)$$

$$(1) + \frac{1}{3}(4) - \frac{5}{6}(5) \quad - \frac{1}{3}(7) - \frac{1}{3}(8) - \frac{1}{3}(9) - \frac{7}{6}(10) = (c).$$

Il risultato ottenuto, della esistenza, cioè di tre covarianti della coincidenza principale, coincide col risultato ottenuto al § 9 dove pure si sono trovati *tre* soli combinanti delle rete di quadriche.

I covarianti qui ottenuti (a) (b) (c) non sono naturalmente le riduzioni dirette dei covarianti (A) (B) (C) del § 9, ma debbono essere combinazioni lineari di essi. Finora non possiamo ancora affermare che (a) (b) (c) [rispett. (A) (B) (C)] *sono fra loro linearmente indipendenti*; ciò risulterà da alcuni calcoli che avremo occasione di sviluppare nei paragrafi seguenti, e che ci pare inutile naturalmente di riprodurre qui.

§ 15. Sviluppo in serie di $\sigma(x, y)$ quando x, y si avvicinano indefinitivamente.

Per le ragioni esposte nel § 8 noi possiamo limitarci a considerare la funzione σ sotto la forma ridotta:

$$\sigma(x, y) = \frac{[xy]\Omega(xy)}{(xy)},$$

dove $[xy]$ è la nota espressione formata colle curve di contatto, e di cui si è parlato avanti.

Poniamo come abbiamo già fatto nella Mem. I:

$$y = x + \zeta,$$

cioè facciamo avvicinare indefinitivamente i due punti x, y , e troviamo allora lo sviluppo di σ secondo le potenze ascendenti di ζ .

Usando notazioni perfettamente analoghe a quelle adoperate nei § 9 e 10 della Mem. I, e giovandoci dei risultati ivi ottenuti per lo sviluppo di

$$\frac{\Omega(xy)}{(xy)} = \frac{1}{\sqrt{f_3(x)f_3(y)}} e^{\frac{1}{2}H(xy)},$$

dove f_3 è la derivata del primo membro dell'equazione della curva di 4.^o ordine rispetto ad x_3 e H è il noto integrale di 3.^a specie (*), si ha:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{4}{f_3} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(f_3 f)}{f_3^2} \zeta - \frac{1}{4} \left(\frac{(f_3 f)}{f_3^2}, f \right) \frac{1}{f_3^2} \zeta^2 + \dots \right] \times \\ &\times \left[1 + \frac{1}{16 f_3} \left(\frac{(\varphi f)}{f_3}, f \right)_x \zeta^2 + \dots \right] \times [xy]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Resta solo a trovare lo sviluppo di $[xy]$ secondo le potenze di ζ .

Le formole precedenti sussistono quando si sia supposto $h_1 = h_2 = 0$, $h_3 = 1$; quindi anche in $[xy]$ bisogna disporre nello stesso modo delle quantità arbitrarie h .

La espressione di $[xy]$ è allora rispett. secondochè si prende per fondamento o la rete di quadriche o il connesso (1, 2) (§ 5):

$$\left. \begin{aligned} [xy] &= \sum_1^4 \alpha_{3ij} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_j(y)} \\ \text{ovvero rispett.} \\ [xy] &= \sum_1^3 \alpha_{3ij} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_j(y)} + \sqrt{\Phi_3(x)} \sqrt{\Phi_4(y)} + \sqrt{\Phi_3(y)} \sqrt{\Phi_4(x)}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dove con α_{3ij} si indicano la prima volta i coefficienti della rete di quadriche, e la seconda volta i coefficienti del connesso.

(*) Mem. I, § 3 e 9.

Sappiamo inoltre che sussistono poi le seguenti formole (§ 5 e § 11):

$$\left. \begin{aligned} f &= \sum_1^4 \alpha_{kij} x_k \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_j} \text{ per la rete di quadriche} \\ \text{ovvero:} \\ f &= \sum_1^3 \alpha_{kij} x_k \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_j} + 2 \sqrt{\Phi_4} \sum_1^3 x_k \sqrt{\Phi_k} \text{ per il connesso (*),} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

e inoltre per le derivate f_3 di f rispetto ad x_3 :

$$\left. \begin{aligned} f_3 &= 4 \sum_1^4 \alpha_{3ij} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_j} \\ f_3 &= 4 \left[\sum_1^3 \alpha_{3ij} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_j} + 2 \sqrt{\Phi_3} \sqrt{\Phi_4} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Da queste formole ricaviamo le altre:

$$\left. \begin{aligned} (f_3 f) &= 4 \sum_1^4 \alpha_{3ij} \sqrt{\Phi_i} \frac{(\Phi_j f)}{\sqrt{\Phi_j}} \\ (f_3 f) &= 4 \left[\sum_1^3 \alpha_{3ij} \sqrt{\Phi_i} \frac{(\Phi_j f)}{\sqrt{\Phi_j}} + \sqrt{\Phi_4} \frac{(\Phi_3 f)}{\sqrt{\Phi_3}} + \sqrt{\Phi_3} \frac{(\Phi_4 f)}{\sqrt{\Phi_4}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dove ai simboli $(f_3 f)$, (Φf) , ecc., si intende dato lo stesso significato dato loro nella Mem. I (**).

Dalle (5) si ricavano le altre:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{(f_3 f)}{f_3}, f \right) &= 4 \sum_1^4 \alpha_{3ij} \left[\left(\frac{(\Phi_j f)}{\Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3}, f \right) \Phi_i^{\frac{1}{2}} + \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{2 \Phi_i^{\frac{1}{2}} \Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3} \right] \\ \text{e} \\ \left(\frac{(f_3 f)}{f_3}, f \right) &= 4 \sum_1^3 \alpha_{3ij} \left[\left(\frac{(\Phi_j f)}{\Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3}, f \right) \Phi_i^{\frac{1}{2}} + \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{2 \Phi_i^{\frac{1}{2}} \Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3} \right] \\ &\quad + 4 \left(\frac{(\Phi_3 f)}{\Phi_3^{\frac{1}{2}} f_3}, f \right) \Phi_4^{\frac{1}{2}} + 4 \left(\frac{(\Phi_4 f)}{\Phi_4^{\frac{1}{2}} f_3}, f \right) \Phi_3^{\frac{1}{2}} + 4 \frac{(\Phi_3 f)((\Phi_4 f))}{\Phi_3^{\frac{1}{2}} \Phi_4^{\frac{1}{2}} f_3}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Si noti che in tutte queste formole il segno sommatorio s'intende sempre esteso alle combinazioni *con ripetizione*, e inoltre in ciascuno dei gruppi di

(*) Si noti che in questa formola come nelle analoghe precedenti dovremmo propriamente porre u in luogo di x ; ma noi per non generare confusione vi lasciamo le x interpretandole come coordinate u di rette.

(**) Mem. I, § 9.

formole precedenti si intende sempre che la *prima* formola vale pel caso in cui si prende per fondamento la rete di quadriche e la *seconda* pel caso in cui si prende per fondamento il connesso. I coefficienti α delle prime formole non hanno nulla da fare coi coefficienti omonimi delle seconde.

Aggiungiamo ancora la formola (*):

$$\sqrt{\Phi}(y) = \sqrt{\Phi}(x) + \frac{(\Phi f)}{2\Phi^{\frac{1}{2}}f_3} \zeta + \frac{1}{4f_3} \left(\frac{(\Phi f)}{\Phi^{\frac{1}{2}}f_3}, f \right) \zeta^2 + \dots \quad (7)$$

Stabilite tutte queste formole possiamo passare facilmente allo sviluppo di $[xy]$.

Propriamente si ha il seguente sistema di due formole valevole al solito rispett. per la rete o pel connesso:

$$\left. \begin{aligned} [xy] &= \frac{1}{4} f_3 + \frac{1}{8} \frac{(f_3 f)}{f_3} \zeta + \frac{1}{4f_3} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{(f_3 f)}{f_3}, f \right) - \frac{1}{2} \sum_1^4 \alpha_{3ij} \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}} \Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3} \right] \zeta^2 + \dots \\ \text{ovvero:} \\ [xy] &= \frac{1}{4} f_3 + \frac{1}{8} \frac{(f_3 f)}{f_3} \zeta + \frac{1}{4f_3} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{(f_3 f)}{f_3}, f \right) - \frac{1}{2} \sum_1^3 \alpha_{3ij} \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}} \Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\Phi_3 f)(\Phi_4 f)}{\Phi_3^{\frac{1}{2}} \Phi_4^{\frac{1}{2}} f_3} \right] \zeta^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Sostituendo queste espressioni nella formola (1) si vede che il termine senza alcuna potenza di ζ è esattamente 1; il termine in ζ è zero.

Poniamo inoltre (**):

$$\varphi = \frac{16\psi}{f_3(z)f_3(z')},$$

donde si ha:

$$\frac{1}{16} \left(\frac{(\varphi f)}{f_3}, f \right) = \frac{((\psi f), f)}{f_3^4} + \frac{((f_3 f), f)}{8f_3^3}.$$

Con facili calcoli si ricava allora il termine in ζ^2 dello sviluppo, cioè:

$$\frac{((\psi f), f)_x}{f_3^4} + \frac{1}{8} \frac{(f_3 f)^2}{f_3^4} + \frac{1}{8} \frac{((f_3 f), f)}{f_3^3} - \frac{1}{2} \sum_1^4 \alpha_{3ij} \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}} \Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3^3}, \quad (9)$$

e nel caso del connesso in luogo dell'ultimo termine vi è l'espressione:

$$- \frac{1}{2} \sum_1^3 \alpha_{3ij} \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}} \Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3^3} - \frac{(\Phi_3 f)(\Phi_4 f)}{\Phi_3^{\frac{1}{2}} \Phi_4^{\frac{1}{2}} f_3^3}. \quad (10)$$

(*) Mem. I, § 10.

(**) Vedi Mem. II, § 1.

Ora queste espressioni possono notevolmente semplificarsi. Per ciò fare ci avvarremo di trasformazioni analoghe a quelle operate nel § 1 della Mem. II.

Si ha colle solite notazioni (*):

$$\begin{aligned} ((\psi f), f)_x = & -\frac{1}{18} (f_3 f)^2 - \frac{3}{2} a_x^2 a_3 ((af), f) \cdot f_3 - \\ & - a_x a_3 (af)(af') f_3 + \frac{2}{3} f_{33} b_x^2 (bf)(bf') \\ & + \frac{1}{2} f_{33} b_x^3 ((bf), f), \end{aligned}$$

dove $a_x^4 = b_x^4 = \dots = f$ è la curva di 4.^o ordine o rispett. di 4.^a classe (se si prende per fondamento il connesso) espressa simbolicamente.

Ora nel luogo citato della Mem. II abbiamo calcolate le espressioni simboliche di

$$f_3, \quad (f_3 f), \quad ((f_3 f), f), \quad (bf)(bf') b_x^2, \quad ((bf), f) b_x^3.$$

Nella (9) raccogliamo quindi i termini col denominatore f_3^4 e riduciamoli allo stesso modo sviluppato nel luogo citato. Si trova che essi termini acquistano per fattore un f_3 , e quindi restano solo col denominatore f_3^3 . Sono propriamente:

$$+ 5 \cdot 8 \cdot \frac{(bc)(ad) b_x^2 c_x^3 a_x^2 a_3}{f_3^3}.$$

Aggiungiamo a questo termine quelli che son rimasti e che hanno pure il denominatore f_3^3 .

Tenendo presenti i risultati ottenuti nella Mem. II (§ 1) la espressione (9) diventa infine semplicemente:

$$\frac{(ab)^2 a_x^2 b_x^2}{f_3^3} + \frac{1}{12} \frac{((f_3 f), f)}{f_3^3} - \frac{1}{2 f_3^3} \sum_1^4 \alpha_{3ij} \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}} \Phi_j^{\frac{1}{2}}}, \quad (11)$$

e nel caso del connesso al solito in luogo dell'ultimo termine vi è il termine (10).

Tale è dunque il coefficiente di ζ^2 nello sviluppo (1) di σ .

Noi sappiamo che le σ sono funzioni *intere* degli integrali w di 1.^a specie e si possono sviluppare secondo le potenze ascendenti di essi (§ 8).

Supponiamo dunque determinato tale sviluppo delle σ , e poi gli sviluppi delle w in funzione di ζ .

(*) Mem. II, § 1.

Per tali ultimi sviluppi le formole corrispondenti le abbiamo trovate nel § 10 della Mem. I.

Allora ponendo nel secondo termine di σ , cioè in $[w]_2$ in luogo delle w i primi termini dei loro sviluppi secondo le potenze di ζ , si otterrà esattamente il coefficiente di ζ^2 nello sviluppo di σ secondo le potenze di ζ ; e tale coefficiente non verrà a contenere per denominatore che solo la seconda potenza di f_3 .

Da ciò si ricava che l'espressione (11) dovrà certamente potersi trasformare in modo che a meno di un denominatore f_3^2 , comparisca come una *funzione intera*; quindi prima di tutto quei denominatori $\Phi_i^{\frac{1}{2}} \Phi_j^{\frac{1}{2}}$ debbono scomparire, e poi i secondi due termini debbono essere tali che (tenendo sempre in vista che la variabile x si muove sulla superficie di RIEMANN corrispondente ad $f=0$) sieno divisibili per f_3 .

Il teorema del paragrafo seguente risolve la prima quistione.

§ 16. Un teorema sulle cubiche di contatto.

Sia Φ_v una cubica di contatto di parametro v ; dico che l'espressione:

$$(f\Phi_v) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_v}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_v}{\partial x_1},$$

considerata per i punti della superficie di RIEMANN, è divisibile per $\sqrt{\Phi_v}$; cioè, in altri termini, può porsi sotto la forma:

$$(f\Phi_v) = \Phi_{1v} A_{1v} + \Phi_{2v} A_{2v} + \Phi_{3v} A_{3v} + \Phi_{4v} A_{4v}, \quad (1)$$

dove Φ_{iv} è la cubica passante per i 12 punti di contatto di Φ_i e di Φ_v colla f .

Dimostrata tale formola, è chiaro che ne risulta senz'altro la divisibilità del primo membro per $\sqrt{\Phi_v}$, perchè *sulla superficie di RIEMANN* si ha sempre $\Phi_{iv} = \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_v}$.

Con questo teorema si risponde alla quistione stabilita alla fine del paragrafo precedente, perchè in forza di questo teorema, l'ultimo termine della formola (11) viene a perdere la parte $\sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_j}$ che comparisce al denominatore.

Per la dimostrazione di questo teorema ci gioveremo della rappresentazione mediante i coefficienti della rete di quadriche.

Poniamo:

$$f == (\alpha \beta \gamma \delta)^2 a_x b_x c_x d_x$$

$$\Phi_v == (\alpha' \beta' \gamma' v)^2 a'_x b'_x c'_x.$$

Si ha allora:

$$(f\Phi_v) = 12(\alpha\beta\gamma\delta)^2(\alpha'\beta'\gamma'v)^2(aa')b_{xx}c_{xx}b'_{xx}c'_{xx}d_{xx}.$$

Usiamo ora la identità:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma'v) = & -(\beta\gamma\delta v)(\alpha'\beta'\gamma'\alpha) - (\gamma\delta v\alpha)(\alpha'\beta'\gamma'\beta) \\ & - (\delta v\alpha\beta)(\alpha'\beta'\gamma'\gamma) - (v\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma'\delta).\end{aligned}$$

Si ha allora semplicemente:

$$(f\Phi_v) = 12(\alpha\beta\gamma\delta)(v\beta\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma'v)(\alpha'\beta'\gamma'\alpha)(aa')b_{xx}c_{xx}b'_{xx}c'_{xx}d_{xx}, \quad (2)$$

essendo fra loro eguali ed eguali poi addirittura a zero, gli altri tre termini che si sono lasciati, perchè per es.:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma v)(\alpha'\beta'\gamma'v)(\alpha'\beta'\gamma'\delta)(aa')b_{xx}c_{xx}b'_{xx}c'_{xx}d_{xx},$$

è zero, perchè muta di segno scambiando tutte le lettere cogli apici nelle corrispondenti senza apici, e inoltre gli altri termini sono eguali a questo segnato, perchè ad esso si riducono con opportune permutazioni di β , γ , δ , fra loro.

La formola (2) è appunto del tipo (1).

Infatti sapendo che in generale:

$$\Phi_{uv} = (\beta\gamma\delta u)(\beta\gamma\delta v)b_{xx}c_{xx}d_{xx},$$

si ha:

$$\Phi_{iv} = (\beta_2\gamma_3\delta_4)(v\beta\gamma\delta)b_{xx}c_{xx}d_{xx},$$

onde si ricava anche che:

$$A_{iv} = 12(\alpha'\beta'\gamma'v)(\alpha'\beta'\gamma'\alpha)(aa')\alpha_i b'_{xx}c'_{xx}. \quad (3)$$

§ 17. Ricerca definitiva del termine $[w]_2$ di σ .

Prima specializzazione del connesso.

L'espressione (11) del § 15 trasformata in maniera che venga a tenere per denominatore solo f^2 , dovrà avere per numeratore una funzione lineare dei tre covarianti (A) (B) (C) trovati al § 9, o rispetti dei tre covarianti (a) (b) (c) trovati al § 14. Con ciò sarebbe immediatamente trovato $[w]_2$.

Però la trasformazione diretta dell'espressione (11) è effettivamente assai più complicata di quanto potrebbe credersi a prima vista.

È perciò che noi per giungere più presto al risultato finale useremo alcuni artifizi di cui esporremo ora i dettagli.

Prendiamo il connesso C sotto la forma speciale:

$$C = 2pu_1z_2z_3 + 2qu_2z_3z_1 + 2ru_3z_1z_2.$$

Allora si ha:

$$f = -2p^2u_1^4 - 2q^2u_2^4 - 2r^2u_3^4 + 4pq u_1^2u_2^2 + 4qr u_2^2u_3^2 + 4rp u_3^2u_1^2$$

$$\Phi_1 = -pu_1u_2u_3$$

$$\Phi_2 = -qu_1u_2u_3$$

$$\Phi_3 = -ru_1u_2u_3$$

$$\Phi_{23} = \frac{1}{2}(ru_1u_3^2 - pu_1^3 + qu_1u_2^2)$$

$$\Phi_{31} = \frac{1}{2}(pu_2u_1^2 - qu_2^3 + ru_2u_3^2)$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{2}(qu_3u_2^2 - ru_3^3 + pu_3u_1^2)$$

$$\Phi_4 = -pqr u_1u_2u_3$$

$$\Phi_{14} = \frac{1}{2}(-p^2u_1^3 + pq u_1u_2^2 + pr u_1u_3^2) = p\Phi_{23}$$

$$\Phi_{24} = \frac{1}{2}(-q^2u_2^3 + qr u_2u_3^2 + qp u_2u_1^2) = q\Phi_{31}$$

$$\Phi_{34} = \frac{1}{2}(-r^2u_3^3 + rp u_3u_1^2 + rq u_3u_2^2) = r\Phi_{12}$$

$$(\Phi_1 f) = 8p \quad [r^2u_2u_3^4 - p^2u_1^4u_2 - qr u_2^2u_3^2 + pq u_1^2u_2^2]$$

$$(\Phi_2 f) = 8q \quad [\quad \text{idem} \quad]$$

$$(\Phi_3 f) = 8r \quad [\quad \text{idem} \quad]$$

$$(\Phi_4 f) = 8pqr [\quad \text{idem} \quad]$$

$$f_3 = 16\Phi_{34}$$

$$f_1 = 16\Phi_{14}.$$

Ora noi già sappiamo in generale che $(\Phi_i f)$ deve essere divisibile per $\sqrt{\Phi_i}$. Verifichiamo questo nel nostro caso.

È facile verificare che la espressione:

$$r^2u_3^4u_2 - p^2u_1^4u_2 - qr u_2^2u_3^2 + pq u_1^2u_2^2,$$

può porsi sotto ciascuna delle quattro forme:

$$A_1 \Phi_{11} + B_1 \Phi_{12} + C_1 \Phi_{13} + D_1 \Phi_{14} \quad (1)$$

$$A_2 \Phi_{21} + B_2 \Phi_{22} + C_2 \Phi_{23} + D_2 \Phi_{24} \quad (2)$$

$$A_3 \Phi_{31} + B_3 \Phi_{32} + C_3 \Phi_{33} + D_3 \Phi_{34} \quad (3)$$

$$A_4 \Phi_{41} + B_4 \Phi_{42} + C_4 \Phi_{43} + D_4 \Phi_{44}. \quad (4)$$

Propriamente nel nostro caso speciale si ha:

$$A_1 = C_1 = 0$$

$$B_2 = D_2 = 0$$

$$A_3 = C_3 = 0$$

$$B_4 = D_4 = 0.$$

Infatti la detta espressione può scriversi:

$$\begin{aligned} & -2r u_2 u_3 \cdot \frac{1}{2} [q u_3 u_2^2 - r u_3^3 + p u_3 u_1^2] \\ & + 2u_1 u_2 \cdot \frac{1}{2} [-p^2 u_1^3 + p q u_1 u_2^2 + p r u_1 u_3^2], \end{aligned}$$

e le due parentesi sono rispettivamente Φ_{12} , Φ_{14} .

Se nella seconda parentesi poniamo in vista il fattore p , resta Φ_2 , e si ha quindi la forma (2); ciò fatto se introduciamo nella prima parentesi il fattore r si ha la forma (3); e finalmente introducendo nella prima parentesi il fattore r e lasciando inalterata la seconda si ha (4).

Abbiamo dunque le seguenti formole:

$$\frac{(\Phi_1 f)}{\sqrt{\Phi_1}} = 16p \quad [-r u_2 u_3 \sqrt{\Phi_2} + u_1 u_2 \sqrt{\Phi_4}]$$

$$\frac{(\Phi_2 f)}{\sqrt{\Phi_2}} = 16q \quad [-r u_2 u_3 \sqrt{\Phi_1} + p u_1 u_2 \sqrt{\Phi_3}]$$

$$\frac{(\Phi_3 f)}{\sqrt{\Phi_3}} = 16r \quad [-u_2 u_3 \sqrt{\Phi_4} + p u_1 u_2 \sqrt{\Phi_2}]$$

$$\frac{(\Phi_4 f)}{\sqrt{\Phi_4}} = 16pqr [-u_2 u_3 \sqrt{\Phi_3} + u_1 u_2 \sqrt{\Phi_1}].$$

La espressione (10) del paragrafo precedente (*) si riduce nel nostro caso (in cui fra i coefficienti α_{3ij} ve n'è solo uno differente da zero, cioè r):

$$\begin{aligned} & -r \frac{(\Phi_1 f)}{\sqrt{\Phi_1}} \frac{(\Phi_2 f)}{\sqrt{\Phi_2}} - \frac{(\Phi_3 f)}{\sqrt{\Phi_3}} \frac{(\Phi_4 f)}{\sqrt{\Phi_4}} = \\ & = -2 \cdot 128 p q r^2 [-r^2 u_2^2 u_3^2 + q r u_2^4 u_3^2 - 2 p r u_1^2 u_2^2 u_3^2 \\ & \quad + 3 p^2 u_1^4 u_2^2 u_3 - p q u_1^2 u_2^4 u_3]. \end{aligned}$$

In tale espressione possiamo porre in vista un fattore f_3 .

Per far questo, scriviamola:

$$\begin{aligned} & -32 p q r^2 u_2^2 u_3^2 \quad \cdot [16 r \Phi_{12}] \\ & -32 p^2 q r u_1^2 u_2^2 \quad \cdot [16 \Phi_{34}] \\ & -16 \cdot 64 \Phi_{23} p r u_2 \cdot [-p q r u_1 u_2 u_3], \end{aligned}$$

e ricordando le formole stabilite avanti, e inoltre che:

$$\Phi_4 \Phi_{23} = \Phi_{24} \Phi_{34} = \frac{1}{16} \Phi_{24} \cdot f_3,$$

si ha che l'espressione (10) del paragrafo precedente divisa per f_3 è:

$$+ 32 p r [q^2 u_2^4 - 2 q r u_2^2 u_3^2 - 2 p q u_2^2 u_1^2]. \quad (5)$$

Calcoliamo ora la espressione:

$$(ab)^2 a_x^2 b_x^2,$$

della formola (11) del paragrafo precedente, dove però (poichè prendiamo qui per fondamento il connesso) dobbiamo supporre sostituite le x colle u e quindi scriviamo:

$$(ab)^2 u_a^2 u_b^2, \quad (6)$$

essendo $u_a^4 = f$, cioè la curva fondamentale di quarta classe.

Si ha:

$$\begin{aligned} a_1^2 u_a^2 &= \frac{1}{3} (-6 p^2 u_1^2 + 2 p q u_2^2 + 2 p r u_3^2) \\ a_3^2 u_a^2 &= \frac{1}{3} (-6 r^2 u_3^2 + 2 p r u_1^2 + 2 q r u_2^2) \\ a_1 a_3 u_a^2 &= \frac{4}{3} p r u_1 u_3, \end{aligned}$$

(*) S'intende che adesso in tale espressione (10), come anche in seguito nella (11), in luogo delle x supponiamo sostituite le u che sono le variabili che nel caso del connesso tengono il luogo delle x .

ed essendo poi la (6) eguale a

$$2(a_1^2 u_a^2 \cdot b_3^2 u_b^2 - (a_1 a_3 u_a^2)^2),$$

si ha:

$$\left. \begin{aligned} &= -\frac{8}{3} pr(p^2 u_1^4 + r^2 u_3^4 - 2pr u_1^2 u_3^2) \\ &\quad - \frac{16}{9} p^2 q r u_1^2 u_2^2 - \frac{16}{9} r^2 p q u_2^2 u_3^2 + \frac{8}{9} p q^2 r u_2^4. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Calcoliamo ora (f_3, f) . Si ha:

$$(f_3 f) = 64 [p r^3 u_3^4 + p^3 r u_1^4 - p q^2 r u_2^4 - 2p^2 r^2 u_1^2 u_3^2 + 4p q r^2 u_2^2 u_3^2]$$

$$\begin{aligned} ((f_3, f), f) &= \frac{\partial(f_3, f)}{\partial u_1} \cdot f_3 - \\ &\quad - 64 [4p r^3 u_1 u_3^3 - 4p^2 r^2 u_1^3 u_3 + 8p q r^2 u_1 u_2^2 u_3] \cdot 16p \cdot \Phi_{13}. \end{aligned}$$

In questa espressione dobbiamo far comparire per fattore f_3 . Nel primo termine c'è già un tale fattore; vi sarà anche nel secondo, se potremo trasformare la parentesi in modo da farle avere per fattore $\sqrt{\Phi_4}$, giacchè allora, poichè esternamente c'è $\sqrt{\Phi_3}$ si forma Φ_{34} che è appunto f_3 .

Ora la parentesi può scriversi appunto:

$$\begin{aligned} &(-8pr\Phi_{34}u_1 + 4pq r^2 u_1 u_2^2 u_3) + 8p q r^2 u_1 u_2^2 u_3 \\ &= -8pru_1\Phi_{34} - 12ru_2\Phi_4. \end{aligned}$$

Si ha dunque infine:

$$\frac{((f_3, f), f)}{f_3} = 64 [p r^3 u_3^4 + p^3 r u_1^4 - 7p q^2 r u_2^4 - 2p^2 r^2 u_1^2 u_3^2 + 10p q r^2 u_2^2 u_3^2 + 10p^2 q r u_1^2 u_2^2]. \quad (8)$$

Raccogliendo tutti questi risultati nell'espressione (11) del § 16, e servendosi della relazione $f=0$ per togliere tutti i termini in $u_1^4, u_3^4, u_1^2 u_3^2$ [e deve appunto accadere che tali termini possano contemporaneamente eliminarsi mediante $f=0$, altrimenti la (11) detta non sarebbe riducibile ad una espressione lineare dei covarianti (a) (b) (c) del § 14, ciò che invece deve necessariamente accadere per le proprietà fondamentali della funzione σ] si ha quindi infine che la (11) del § 16 a meno di un divisore f_3^2 e ponendovi $u_2=1$ (*)

(*) Gli sviluppi del § 15 sono fatti sempre dietro l'ipotesi $u_2=1$, come risulta dai § 9 e 10 della Mem. I. Quindi a tutto rigore in questo § 17 avremmo dovuto supporre sin da principio $u_2=1$.

diventa:

$$-\frac{64}{9} [p^2 q r u_1^2 + p q r^2 u_3^2 + p q^2 r]. \quad (9)$$

Esaminiamo ora che cosa diventano i covarianti (a) (b) (c) del § 14 quando il connesso acquista la forma speciale che gli abbiamo qui data.

Vediamo prima quali dei dieci covarianti (1) (2)... (10) del § 13 diventa zero. È chiaro che quelli che hanno per fattori simbolici α_a , o β_b , ecc., sono senz'altro zero, perchè essi verranno a contenere in ogni termine tali coefficienti del connesso in cui il primo indice è certamente eguale ad uno dei secondi, cioè o al secondo o al terzo; e siffatti coefficienti si sono supposti tutti zero.

Restano quindi solo da considerarsi (5) (7) (10) i quali diventano rispettivamente (per $u_2 = 1$):

$$(5) = -2 [p u_1^2 + r u_3^2 + q] p q r$$

$$(7) = -4 [\text{idem}] p q r$$

$$(10) = -4 [\text{idem}] p q r,$$

onde infine:

$$(a) = -64 [p u_1^2 + r u_3^2 + q] p q r$$

$$(b) = 0$$

$$(c) = \frac{23}{3} [p u_1^2 + r u_3^2 + q] p q r.$$

Chiamiamo n_a , n_b , n_c i tre coefficienti numerici che moltiplicati per (a) (b) (c), danno l'espressione a cui è eguale la (11) del § 16, quando vi si faccia astrazione di un denominatore f_3^2 . Allora chiaramente dai risultati ottenuti si ha una prima relazione a cui debbono soddisfare tali coefficienti n ; propriamente:

$$-64 n_a + \frac{23}{3} n_c = -\frac{64}{9}. \quad (10)$$

§ 18. Seconda specializzazione del connesso (1, 2).

Per trovare ora analogamente altre relazioni fra i coefficienti n introdotti alla fine del paragrafo precedente, supponiamo che il connesso si riduca a

$$C = p' u_1 z_1^2 + q' u_1 z_2^2 + r' u_2 z_3^2.$$

Allora:

$$f = 2p'q'u_1^2u_2^2 + 2p'r'u_1u_2^3 + 2q'r'u_1^3u_2$$

$$f_3 = 4p'q'u_1^2u_3$$

$$f_1 = 4p'q'u_1u_3^2 + 2p'r'u_2^3 + 6q'r'u_1^2u_2$$

$$f_{11} = 4p'q'u_3^2 + 12q'r'u_1u_2$$

$$f_{13} = 8p'q'u_1u_3$$

$$f_{33} = 4p'q'u_1^2 (*),$$

onde si ha:

$$(ab)^2u_a^2u_b^2 = \frac{2}{3}[-p'^2q'^2u_1^2u_3^2 + p'q'^2r'u_1^3u_2].$$

Si hanno inoltre le altre formole:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}r'u_2^2 + \frac{1}{2}q'u_1u_2^2 \quad \Phi_{23} = -\frac{1}{2}p'u_1u_2u_3$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}p'u_1u_3^2 + \frac{1}{2}r'u_1^2u_2 \quad \Phi_{31} = -\frac{1}{2}q'u_1^2u_3$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}q'u_1^3 + \frac{1}{2}p'u_1u_2^2 \quad \Phi_{12} = -\frac{1}{2}r'u_1u_2^2$$

$$\Phi_4 = -\frac{1}{2}p'q'r'u_1^2u_2$$

$$\Phi_{14} = \frac{1}{2}q'r'u_1^2u_2; \quad \Phi_{24} = \frac{1}{2}r'p'u_1u_2^2; \quad \Phi_{34} = \frac{1}{2}p'q'u_1^2u_3$$

$$(\Phi_1 f) = 2[-p'q'^2u_1^2u_3^2 - p'q'r'u_1u_2^3u_3 - 3q'^2r'u_1^3u_2u_3]$$

$$(\Phi_2 f) = 2[-p'q'r'u_1^3u_2u_3 - p'^2r'u_1u_2^3u_3]$$

$$(\Phi_3 f) = 2[3p'q'^2u_1^4u_3 + p'^2q'u_1^2u_2^2u_3] = 4[3q'u_1^2 + p'u_2^2]\Phi_{34}$$

$$(\Phi_4 f) = -4p'^2q'^2r'u_1^3u_2u_3 = 8p'q'u_1u_3 \cdot \Phi_4.$$

La espressione (10) del § 16 calcolata con queste formole diventa (a meno di un divisore f_3^2):

$$= 4[3p'q'^2r'u_1^3u_2 + p'^2q'r'u_1u_2^3].$$

(*) Indichiamo con f_{11} , f_{13} , ecc. le derivate seconde di f .

Inoltre:

$$\begin{aligned}(f_3 f) &= 8 [2 p'^2 q'^2 u_1^3 u_3^2 - p'^2 q' r' u_1^2 u_2^3 - 3 p' q'^2 r' u_1^4 u_2] \\ ((f, f), f) &= 16 [3 p'^2 q'^2 u_1 u_3^2 - p'^2 q' r' u_1 u_2^3 - 3 p' q'^2 r' u_1^3 u_2] \cdot f_3 \\ &\quad - 64 p'^2 q'^2 u_1^3 u_3 [2 p' q' u_1 u_3^2 + p' r' u_2^3 + 3 q' r' u_1^2 u_2].\end{aligned}$$

È facile vedere che ciascun termine di questa espressione contiene f_3 per fattore. Dividendo allora per questo fattore e poi sostituendo i risultati ottenuti nella (11) del § 16 e eliminando mediante $f = 0$ i termini con potenze di u_1 e u_3 superiori alla seconda, e ponendo $u_2 = 1$, si ha infine per espressione della (11) detta a meno di un divisore f_3^2 :

$$\frac{2}{3} p'^2 q' r' u_1. \quad (1)$$

Esaminiamo ora che cosa diventano i dieci covarianti del § 13.

Facilmente si trovano i seguenti risultati (per $u_2 = 1$):

$$\begin{aligned}(1) &= (2) = (7) = -p'^2 q' r' u_1 + p'^3 q' u_3^2 \\ (3) &= (4) = (5) = (6) = p'^3 q' u_3^2, \\ (8) &= (9) = (10) = 2 p'^3 q' u_3^2,\end{aligned}$$

e quindi i tre covarianti (a) (b) (c) avranno i valori:

$$\begin{aligned}(a) &= \frac{25}{3} p'^3 q' u_3^2 - \frac{32}{3} p'^2 q' r' u_1 \\ (b) &= -\frac{1}{6} p'^3 q' u_3^2 + \frac{1}{3} p'^2 q' r' u_1 \\ (c) &= -\frac{7}{2} p'^3 q' u_3^2 - \frac{2}{3} p'^2 q' r' u_1.\end{aligned}$$

Fra i coefficienti numerici n_a n_b n_c abbiamo dunque per effetto di (1), le seguenti altre relazioni:

$$\frac{25}{3} n_a - \frac{1}{6} n_b - \frac{7}{2} n_c = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{32}{3} n_a + \frac{1}{3} n_b - \frac{2}{3} n_c = \frac{2}{3}, \quad (3)$$

le quali unite colla (10) del § 17 dànno:

$$n_a = \frac{1}{3^2}$$

$$n_b = \frac{2 \cdot 5^2}{3^2}$$

$$n_c = 0.$$

Possiamo concludere che l'espressione (11) del § 16 è identicamente:

$$\frac{1}{f_3^2} \left\{ \frac{1}{3^2} (a) + \frac{2 \cdot 5^2}{3^2} (b) \right\}. \quad (4)$$

Ora per passare al secondo termine $[w]_2$ dello sviluppo di σ , bisogna ricordarsi gli sviluppi degli integrali w secondo le potenze di ζ .

Ponendo (vedi Mem. I, § 10):

$$w_i = -4 \int_y^x \frac{z_i dz_1}{f_3(z)},$$

i primi termini di tali sviluppi sono:

$$w_1 = -\frac{4u_1}{f_3} \zeta + \dots$$

$$w_2 = -\frac{4}{f_3} \zeta + \dots$$

$$w_3 = -\frac{4u_3}{f_3} \zeta + \dots,$$

dove abbiamo sostituite le x colle u che, come abbiamo già avvertito, tengono il luogo delle x quando si prende per fondamento il connesso.

Per trovare quindi $[w]_2$ basta in (4) porre in luogo delle u rispettivamente:

$$-\frac{1}{4} w_1 f_3, \quad -\frac{1}{4} w_2 f_3, \quad -\frac{1}{4} w_3 f_3.$$

Si ha allora infine:

$$[w]_2 = \frac{1}{2^4 \cdot 3^2} (a) + \frac{5^2}{2^3 \cdot 3^2} (b), \quad (5)$$

dove nei covarianti (a) (b) bisogna supporre poste rispettivamente w_1, w_2, w_3 in luogo delle u .

Non vogliamo mancare di giovare dei risultati numerici ultimamente ottenuti per ricavarne la dimostrazione di un assunto proposto sin dal § 14, la dimostrazione cioè della indipendenza lineare dei tre covarianti (a) (b) (c) ivi trovati. Se potesse fra tali tre covarianti sussistere una relazione lineare:

$$m_a(a) + m_b(b) + m_c(c) = 0,$$

dovrebbero esservi fra i coefficienti m , per effetto dei risultati dei §§ 17 e 18, le relazioni:

$$-64 m_a + \frac{23}{3} m_c = 0$$

$$\frac{25}{3} m_a - \frac{1}{6} m_b - \frac{7}{2} m_c = 0$$

$$-\frac{32}{3} m_a + \frac{1}{3} m_b - \frac{2}{3} m_c = 0,$$

le quali non possono coesistere.

Con ciò resta anche dimostrata la indipendenza dei tre altri covarianti (A) (B) (C) trovati al § 9.

Napoli, $\frac{\text{Ottobre 1889}}{\text{Gennaio 1890}}$.