Über die Herleitbarkeit einiger Hauptsätze der Potentialtheorie aus der Stefan'schen Entwicklung der Maxwell'schen Gleichungen.

Von Emil Kohl in Wien.

J. Stefan¹⁾ hat die Gleichung für die elektrische Bewegung in einem gleichartigen Mittel vom Standpunkte der Fernwirkungstheorie entwickelt und ist hiebei zu Ausdrücken gelangt, welche bis auf eine Verschiedenheit in Bezug auf die Größe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen den Maxwell'schen gleichen. Der Verfasser dieses Aufsatzes hat in diesen „Monatsheften“ gezeigt²⁾, dass man durch strenges Auseinanderhalten der Begriffe freie und wahre Elektrizität auch in dieser Beziehung eine vollkommene Übereinstimmung herstellen kann.

Die Grundgleichungen der Stefan'schen Entwicklungen lassen sich auf folgende zwei zurückführen:

$$(1) \quad \begin{cases} P = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{M}{\mathfrak{B}^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{i_x}{r} d\tau, \\ Q = -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{M}{\mathfrak{B}^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{i_y}{r} d\tau, \\ R = -\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{M}{\mathfrak{B}^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{i_z}{r} d\tau. \end{cases} \quad (d\tau = dx dy dz)$$

¹⁾ J. Stefan, Über die Gesetze der magnetischen und elektrischen Kräfte in magnetischen und dielektrischen Medien und ihre Beziehung zur Theorie des Lichtes. Wiener Berichte, Bd. LXX, II/a, 1874.

²⁾ Über die Stefan'sche Entwicklung der Maxwell'schen Gleichungen für gleichartige Mittel und ihre Voraussetzungen. Diese Monatshefte, XII. Jahrgang, S. 239 ff. — Über eine Erweiterung der Stefan'schen Entwicklung der Maxwell'schen Gleichungen für ungleichartige Mittel. Diese Monatsh., XIII. Jahrg. S. 156 ff.

$$(2) \quad \frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0.$$

Hiebei bedeuten P, Q, R die Componenten der elektrisierenden Kräfte, (deren Erklärung weiter unten gegeben werden wird), U ist das Potential der freien elektrischen Massen, i_x, i_y, i_z stellen die Componenten der Gesamtströmung (bestehend aus dielektrischer Verschiebung und Leitungsströmung) dar, M ist die Magnetisierungsconstante und $\mathfrak{B}$ jene Constante, durch welche eine elektrostatisch gemessene Elektrizitätsmenge zu dividieren ist, um in elektromagnetisches Maß übergeführt zu werden.

Wie in der zweiten bezogenen Arbeit bewiesen wurde, bilden diese Gleichungen den Ausgangspunkt für die Herleitung der Maxwell'schen Ausdrücke aus der Fernwirkungstheorie, wenn man eine Reihe von Voraussetzungen zugrunde legt, welche übrigen dieser Theorie nicht fremd sind. Es ist freilich zu bemerken, dass erst durch die neueren, von Maxwell ihren Ursprung nehmenden Untersuchungen volles Licht über gewisse Begriffe, wie freie und wahre Elektrizität, Verschiebungs- und Leitungsströme, elektrisierende und elektromotorische Kräfte, elektrische und magnetische Energie u. s. w. verbreitet wurde, welche in der älteren Theorie vielfach schwankend und unklar waren.

Bevor in die eigentlichen Entwicklungen eingegangen werde, sollen zuerst die denselben zugrunde gelegten Annahmen vorgeführt und sodann die gestellte Aufgabe dargelegt werden.

Es werden folgende drei Annahmen gemacht, wovon die erste und dritte im wesentlichen mit den beiden Stefan'schen Grundgleichungen zusammenfallen; während die zweite der Maxwell'schen Auffassung entlehnt ist.

A. Unter elektrisierenden Kräften seien jene Kräfte verstanden, welche die Elektrizität zu verschieben trachten und deren Arbeit in einem Umsatze elektromagnetischer Energie besteht. Ihrer allgemeinsten mathematischen Form nach bestehen sie aus zwei Arten: Die Kräfte der ersten Art haben die Eigenschaft, dass sie durch die negativen Ableitungen einer gewissen Function, der Potentialfunction, nach der Kraftrichtung dargestellt werden können, wobei über die Gestalt dieser Function noch keine Aussage gemacht werden soll; sie werden in der Fernwirkungstheorie der Wirkung elektrischer Massen zugeschrieben. Die Kräfte der zweiten Art besitzen kein Potential, sondern können als Quirl von gewissen, hier nicht weiter gebrauchten Functionen ausgedrückt werden; sie sind jedenfalls als Differentialquotienten nach der Zeit darstellbar, da bei stationären Vorgängen ihr Einfluss erfahrungsgemäß verschwindet; sie geben die Wirkung der vorhandenen Ströme auf die elektrischen Theilchen an. Man erhält hienach für die Componenten der elektrisierenden Kräfte ganz allgemein:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ Q = -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \\ R = -\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial t}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

B. Die Gesamtströmung besteht aus zwei Theilen, aus der dielektrischen Verschiebungsströmung mit den Componenten α, β, γ und aus der Leitungsströmung mit den Componenten u, v, w . Die dielektrischen Verschiebungen stellen die in vollkommenen Nichtleitern auftretende Art der elektrischen Bewegung dar. Es soll angenommen werden, dass sie proportional den wirkenden elektrisierenden Kräften sind. Dann folgt für die dielektrischen Strömungscomponenten:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = C \frac{\partial P}{\partial t}, \\ \beta = C \frac{\partial Q}{\partial t}, \\ \gamma = C \frac{\partial R}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Unter C ist eine noch näher zu bestimmende Constante zu verstehen.

Die Leitungsströmung liefert die Bewegung der Elektrizität in vollkommenen Leitern; ihre Componenten sind zusammengesetzt, aus der Bewegung unter dem Einflusse der elektrisierenden Kräfte (welche ja überhaupt auf jedes Theilchen bewegend wirken) und aus einer zweiten Bewegung, welche infolge äußerer Kräfte mit den Componenten X, Y, Z auftritt, deren Arbeit in einem Umsatze nicht unmittelbar elektromagnetischer Energie besteht und welche als elektromotorische Kräfte bezeichnet werden. Man hat demnach:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = L(P + X), \\ v = L(Q + Y), \\ w = L(R + Z). \end{array} \right.$$

L heißt das Leitungsvermögen des betreffenden Körpers. Die vollständigen Componenten der Gesamtströmung nehmen daher folgende Gestalt an:

$$(6) \quad \begin{cases} i_x = \alpha + u = C \frac{\partial P}{\partial t} + L(P + X), \\ i_y = \beta + v = C \frac{\partial Q}{\partial t} + L(Q + Y), \\ i_z = \gamma + w = C \frac{\partial R}{\partial t} + L(R + Z). \end{cases}$$

C. Die Gesamtströmung sei überall im Raume geschlossen, das heißt, in jedes Raumtheilchen tritt ebensoviele Elektrizität ein, als aus ihm weggeführt wird. Dies ist gleichbedeutend mit der Voraussetzung, dass die gesammte Strömung in beliebig viele Theilströme zerlegt werden kann, welche überall geschlossen sind. Der mathematische Ausdruck für diese Annahme lautet:

$$(7) \quad \frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0.$$

Damit sind die in den weiteren Entwicklungen gebrauchten Annahmen erschöpft.

Die gestellte Aufgabe lautet:

Es sind aus diesen Voraussetzungen die Eigenschaften der Potentialfunction U_0 für die statische Wirkung von freien elektrischen Massen zu entwickeln.¹⁾

Es soll nunmehr der Weg angegeben werden, der in den folgenden Betrachtungen stets eingeschlagen werden wird, um diese Aufgabe ihrer Lösung zuzuführen.

Es werde zunächst ein unendlich ausgedehnter, vollkommener Nichtleiter vorausgesetzt, in welchem an einem bestimmten Orte eine fernwirkende Elektrizitätsmenge e vorhanden sei. Um die Betrachtungen sinnfälliger zu machen werde angenommen, dass sich diese Elektrizitätsmenge auf einer sehr kleinen leitenden Kugel befinde. Es werde nun eine gleichgroße, aber ungleichnamige Elektrizitätsmenge $-e$ in das Mittel gebracht, deren Entfernung von der ersten noch beliebig gewählt werden kann und die ebenfalls auf einer kleinen leitenden Kugel angehäuft ist. Durch einen sehr dünnen Leitungsdraht soll zwischen den beiden Elektrizitätstheilen e und $-e$ ein vollkommener Ausgleich hergestellt werden können, sodass nach Ablauf des Ausgleichsvorganges nirgends mehr fernwirkende Elektrizität vorhanden ist. Wie man sieht, entsteht bei der leitenden Verbindung beider Massen im Drahte eine Leitungsströmung, während im umgebenden Mittel eine dielektrische Verschiebungsströmung auftritt. Diese letztere wird dadurch erzeugt, dass die verschobenen Elektrizitäten im Nichtleiter wegen des Nachlassens der Stärke der elektrisierenden Kräfte allmählich wieder in ihre ursprüngliche Ruhelage zurückkehren. Eine einfache Über-

¹⁾ Die Entwicklungen beziehen sich also auf die Zeit $t=0$; in welcher Weise hingegen U etwa von t abhängt, wird hier nicht weiter untersucht.

legung zeigt, dass die Curven der dielektrischen Strömung durch die Kraftlinien der elektrisierenden Kräfte gegeben sind, sowie, dass diese Strömung auf diesen Linien in der Richtung von $-e$ zu e vor sich geht, während die Leitungsströmung von e zu $-e$ gerichtet ist. Es gilt nun vermöge der Annahme C) der Grundsatz:

Legt man im Mittel eine beliebige Fläche F , welche den ganzen unendlichen Raum desselben in zwei vollkommen getrennte Hälften zerlegt, wovon die eine Hälfte das Theilchen e , die andere Hälfte das Theilchen $-e$ enthält, so wird während des Ausgleichsvorganges infolge der Leitungsströmung ebensoviel Elektrizität durch den Draht von e zu $-e$ geführt, als infolge der dielektrischen Verschiebungsströmung durch die Fläche von $-e$ zu e tritt.

Ferner sieht man sofort die Richtigkeit der beiden folgenden Sätze ein:

Die Größe der dielektrischen Verschiebungsströmung wird gefunden, indem man in jedem Flächentheilchen dO die in die Richtung der Flächennormale fallende dielektrische Strömung nach B) berechnet und über die ganze Fläche F integriert.

Die während des ganzen Ausgleichsvorganges durch die Leitungsströmung übergeführte Elektrizitätsmenge ist gleich der ursprünglich vorhandenen Masse e .

Es handelt sich vor allem darum, die Form der Potentialfunction selbst zu finden. Man setze zu diesem Zwecke ein vollkommen gleichartiges Mittel voraus, bezeichne mit $2x$ die Entfernung der Theilchen e und $-e$ und lege in der Mitte der Verbindungsgeraden auf ihr senkrecht eine unendlich ausge dehnte Ebene, welche demnach den Raum in der durch den Grundsatz geforderten Weise theilt. Um die Elektrizitätsmenge zu bestimmen, die infolge der dielektrischen Verschiebungsströmung durch die ganze Ebene von $-e$ zu e tritt, hat man gemäß der Voraussetzung B) die auf der Ebene im Flächentheilchen dO senkrecht stehende elektrisierende Kraft S zu bestimmen und sodann das Doppelintegral

$$-\int_F \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial S}{\partial t} dt dO$$

über die ganze Ebene während der Zeit $t=0$ bis $t=\infty$ zu berechnen. Das negative Zeichen ist deswegen zu wählen, weil die Bewegung der dielektrischen Strömung die entgegengesetzte Richtung von jener der Leitungsströmung besitzt. Da sich nach Ablauf des Ausgleichsvorganges die beiden ungleichnamigen Elektrizitäten e und $-e$ vollkommen aufgehoben haben und die gesammte Bewegung für $t=\infty$ verschwunden ist, erhält man dieses Integral in der einfacheren Gestalt:

$$C \int S_0 dO,$$

wobei S_0 die elektrisierende Kraft senkrecht zur Ebene im Augenblicke vor der Einleitung des Ausgleichsvorganges bedeutet. Da in diesem Zeitpunkte aber bloß ruhende Elektrizität vorhanden war, fallen nach (3) die von den Strömen herrührenden Glieder weg und man erhält das Integral in der Form:

$$- C \int_F \frac{\partial U_0}{\partial n} d\Omega. \quad (n \perp d\Omega).$$

Bezüglich der Gestalt des Potentials U_0 können sofort einige Aussagen gemacht werden, deren Begründung weiter keines Beweises bedarf. Zunächst kann U_0 nur Function von r allein sein, da die von e ausgeübten elektrisierenden Kräfte wegen der Gleichartigkeit des Mittels in concentrischen Kugelschalen um e gleichen Wert besitzen müssen. Ferner muss U_0 für unendlich große Werte von r verschwinden, da dort jede Wirkung von e erfahrungsgemäß aufhört. Endlich kann man voraussetzen, dass diese Kräfte proportional der vorhandenen Elektrizitätsmenge sind, weshalb U_0 die die Größe εe im Zähler enthalten wird, wobei ε eine noch näher zu bestimmende Proportionalitätsconstante bedeutet.¹⁾

Bezeichnet man mit a_k und b_i constante Coefficienten, so kann man U_0 innerhalb eines bestimmten Gebietes in eine Potenzreihe nach r entwickeln, welche in ihrer allgemeinsten Form sowohl positive wie auch negative Potenzen von r enthalten kann und sich in der Gestalt

$$U_0 = \varepsilon e \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{r^i} \right]$$

darstellen lässt. Man ersieht nun leicht aus der beigegebenen Figur dass folgende Beziehungen bestehen:

$$S_0 : - \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon e \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{r^i} \right] = 2x : r,$$

oder

$$S_0 = - \frac{2x \varepsilon e}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{r^i} \right],$$

ferner

$$d\Omega = 2\pi \rho d\rho,$$

oder da die Proportion

$$\rho : r = dr : d\rho$$

gilt,

$$d\Omega = 2\pi r dr.$$

¹⁾ Eigentlich sollte man richtiger sagen, dass man die Elektrizitätsmenge e dadurch definiert, dass man sie proportional den wirkenden Kräften setzt und als Vergleichsmittel den leeren Raum mit der Constante $\varepsilon = 1$ wählt.

Das Integral nimmt daher nach einigen einfachen Ausrechnungen den Wert an:

$$\begin{aligned}
 C \int_{\mathbb{R}} S_0 d\theta &= -4\pi C \varepsilon e x \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{r^i} \right]_{r=x}^{\infty} = \\
 &= 4\pi C \varepsilon e \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{x^{i-1}} \right],
 \end{aligned}$$

da diese Summen nach einer früheren Bemerkung über die Form der Potentialfunction für $r = \infty$ verschwinden. Dieser Betrag muss ebenso groß wie die ganze infolge der Leitungsströmung von e nach $-e$ abgeführte Elektrizität, also gleich e sein. Man erhält daher, wenn man durch e dividiert, die Gleichung

$$(8) \quad 4\pi C \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{x^{i-1}} \right] = 1.$$

Man kann nun bei gleicher Lage von e die Ebene durch Drehung und Parallelverschiebung beliebig ändern, wodurch man

der Größe x jeden Wert von 0 bis ∞ nach jeder Richtung hin ertheilen kann. Daraus folgt nach einem bekannten Satze der Algebra, dass sich diese Summe auf das constante Glied beschränken muss, also $a_k = 0$ ($k = 0 \dots \infty$), $b_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots \infty$) zu setzen ist. Daher ergibt sich U_0 in der Gestalt:

$$(9) \quad U_0 = \frac{\varepsilon_0 e}{r}$$

wobei ε_0 eine neue Constante $= \varepsilon b_1$ darstellt. Man erhält demnach den Satz:

Das einzig mögliche Gesetz für die von fernwirkenden ruhenden elektrischen Massen ausgeübten Kräfte ist bei Geltung der Voraussetzungen A, B, C jenes von Coulomb.

Aus Gleichung (8) erhält man weiter

$$(10) \quad C = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}$$

Gewöhnlich wird $\frac{1}{\varepsilon_0}$ einer neuen Constante D gleichgesetzt, welche den Namen Dielektricitätsconstante führt, sodass man schreiben kann:

$$(10') \quad C = \frac{D}{4 \pi}$$

Diese Constante hat eine einfache Bedeutung. Bringt man eine Elektrizitätsmenge e , welche im leeren Raume eine bestimmte Fernwirkung besitzt, in einen Nichtleiter, so wird erfahrungsgemäß die Wirkung verringert. Man kann sich vorstellen, dass hierbei keine Elektrizität verschwunden ist, sondern bloß ein Theil davon unwirksam gemacht wurde. Diese wirklich vorhandene Elektrizitätsmenge e wird wahre, der fernwirkende Theil freie Elektrizität genannt und mit e_w , beziehungsweise e_f bezeichnet; die Differenz zwischen wahrer und freier heißt die gebundene Elektrizität e_g . Wie nun die Gleichung (9) lehrt, ist die fernwirkende elektrische Masse durch $\varepsilon_0 e$ gegeben; da diese fernwirkende Masse die freie, die Masse e aber die wahre Elektrizitätsmenge darstellt, so bestehen die Gleichungen

$$(10'') \quad \frac{e_w}{e_f} = \frac{1}{\varepsilon_0} = D; \quad e_g = e_w \left(1 - \frac{1}{D}\right) = e_f (D - 1).$$

Die Constante D gibt also das Verhältnis zwischen wahrer und freier Elektrizität an. Man kann sich ein einfaches Bild von dem Vorgange selbst machen, wenn man annimmt, dass sich durch die dielektrische Verschiebung rings um das wahre Theilchen e_w

eine Schichte ungleichnamiger Elektrizität $e_w \left(1 - \frac{1}{D}\right)$ anlegt und den entsprechenden Theil von e bindet, sodass bloß $\frac{e_w}{D}$ zur Wirkung kommt.¹⁾

Nachdem die Form des Potentials U_0 und der Constante C gefunden ist, soll ein allgemeinerer Fall betrachtet werden.

Man setze eine geschlossene, endlich ausgedehnte Fläche F voraus, welche das Theilchen e_w vollkommen umschließt. Man bringe ein zweites gleichgroßes, aber ungleichnamiges Theilchen $-e_w$ in beliebig zu wählender Entfernung von dem ersten in das Mittel und denke sich nach Bedarf beide durch einen sehr dünnen Leitungsdraht miteinander verbunden. Die Anwendung des oben ausgesprochenen Grundsatzes liefert, in ähnlicher Weise wie bei der Ebene durchgeführt, die Gleichung:

$$(11) \quad \frac{D}{4\pi} \int_F \frac{\partial U_0}{\partial n} d\sigma = e_w,$$

worin dn eine Differentiation in der Richtung der nach einwärts gekehrten Normale des Flächentheilchens $d\sigma$ bedeutet.

Man nehme weiter an, dass sich die in dieselbe Richtung fallenden Componenten der von e_f und $-e_f$ ausgeübten Kräfte summieren. Dann ist

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} = \left(\frac{\partial U_0}{\partial n}\right)_{e_f} + \left(\frac{\partial U_0}{\partial n}\right)_{-e_f}$$

wobei sich der Zeiger e_f , beziehungsweise $-e_f$ auf das von e_f , beziehungsweise $-e_f$ herrührende Potential bezieht. Man erhält, wenn e_w durch De_f ersetzt und dann durch D dividirt wird,

$$(12) \quad \int_F \left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial n}\right)_{e_f} + \left(\frac{\partial U_0}{\partial n}\right)_{-e_f} \right] d\sigma = 4\pi e_f.$$

Man kann nun die Fläche F und das Theilchen e_w festhalten, dagegen $-e_w$ beliebig im Raume verschieben. Dann ändert sich in dieser Gleichung bloß das zweite Glied der linken Seite, während die übrigen Glieder keine Änderung erfahren. Daraus folgt:

$$(13) \quad \int_F \left(\frac{\partial U_0}{\partial n}\right)_{e_f} d\sigma = 4\pi e_f,$$

¹⁾ Es ist hiebei zu erwähnen, dass die Festlegung der wahren Elektrizitätsmenge 1 nach einer früheren Bemerkung sowohl von der Wahl der Maßeinheiten der wirkenden Kräfte, wie auch von jener des Vergleichsmittels abhängt. Dies zeigt sich auch dadurch, dass ϵ_0 eine unbenannte Zahl ist, demnach nur das Verhältniß, nicht aber die wahren Mengen von e_f und e_w liefert.

$$(14) \quad \int_F \left(\frac{\partial U_0}{\partial n} \right)_{-e_f} d\sigma = 0.$$

Würde man die geschlossene Fläche um das Theilchen $-e_w$ gelegt und e_w verschoben haben, so hätten sich folgende Beziehungen ergeben:

$$(13') \quad \int_F \left(\frac{\partial U_0}{\partial n} \right)_{e_f} d\sigma = 0,$$

$$(14') \quad \int_F \left(\frac{\partial U_0}{\partial n} \right)_{-e_f} d\sigma = -4\pi e_f.$$

Diese Gleichungen bilden den Satz von Gauß und lassen sich in der nachstehenden Weise ausdrücken:

Das Integral $\int_F \frac{\partial U_0}{\partial n} d\sigma$, über eine geschlossene Fläche F erstreckt, ist gleich dem 4-fachen derjenigen in der Fläche F enthaltenen freien elektrischen Masse, von welcher das Potential herrührt. Dieses Integral hat daher den Wert $4\pi e_f$, wenn die Fläche F die fernwirkende elektrische Masse e_f umschließt, es ist gleich Null, wenn die fernwirkende Masse außerhalb der Fläche liegt.

Aus (13) und (13') können bekanntlich mehrere andere wichtige Eigenschaften der Potentialfunction entwickelt werden, wenn man eine aus (9) leicht zu bewahrheitende Beziehung darauf anwendet. Bezeichnet man mit N irgend eine Gerade im Raume, mit $-N$ dieselbe Gerade, aber in der entgegengesetzten Richtung laufend, so hat man

$$(15) \quad \frac{\partial U_0}{\partial -N} = - \frac{\partial U_0}{\partial N}.$$

Dieser Satz folgt aus dem Begriffe des Potentials als jener Function, deren Ableitung nach einer gegebenen Richtung die nach dieser Richtung wirkende Kraft darstellt.

Wählt man als Fläche F ein unendlich kleines Parallelepiped mit den Seiten dx, dy, dz , so erhält man unter Anwendung der eben erwähnten Beziehung (15) den Poisson'schen Satz:

$$(I) \quad \Delta U_0 = - \frac{4\pi e_f}{dx dy dz} = -4\pi d$$

und den Laplace'schen Satz:

$$(II) \quad \Delta U_0 = 0,$$

je nachdem e_f im betreffenden Parallelepiped liegt oder nicht.

Der Quotient $\frac{e_f}{dx dy dz} = d$ wird die räumliche Dichte der Elektrizität an der Stelle x, y, z genannt.

Ferner lässt sich aus dem Gauß'schen Satze der bekannte Ausdruck für die Dichte einer elektrischen Flächenschichte auf einem Oberflächentheilchen dO gewinnen ¹⁾

$$(III) \quad \left(\frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_e - \left(\frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_i = - \frac{4\pi e_f}{dO} = - 4\pi \sigma.$$

∂N bedeutet hierin eine Differentiation in der Richtung der wachsenden Normale N im Flächentheilchen dO , $(U_0)_e$ und $(U_0)_i$ den Potentialwert unmittelbar vor und hinter der Fläche H ; σ wird als Dichte der elektrischen Flächenbelegung an der Stelle dO bezeichnet.

Die Ableitung der Gleichungen (I), (II), (III) bietet natürlich nichts Neues dar, da diese nur Folgesätze des Gauß'schen Satzes sind und auch häufig aus diesem entwickelt werden. Ebenso ist bekannt, dass sich der Gauß'sche Satz aus der Maxwell'schen Theorie durch Betrachtungen ableiten lässt, welche den hier angewendeten im Wesentlichen gleichen.²⁾ Dagegen sind die hier durchgeführten Entwicklungen, insofern von den gewöhnlichen abweichend, als dabei nicht von der mathematischen Form des Potentials ausgegangen wurde, sondern dieselbe lediglich als Folge von rein physikalischen Betrachtungen gewonnen wurde.

Die bisher gefundenen Gleichungen sind unter der Voraussetzung abgeleitet, dass sich die elektrischen Massen in einem Nichtleiter befinden und auf leitenden Kugeln ausgebreitet sind. Wie man sieht, ist diese Annahme für die Richtigkeit der entwickelten Formeln nicht wesentlich, da es sich nur um die Denkmöglichkeit eines Austausches der ungleichnamigen Elektricitäten handelt, ohne dass dieser Austausch wirklich vollzogen zu werden braucht. Ebenso wenig ist die Geltung dieser Gleichungen an das Vorhandensein eines vollkommenen Nichtleiters geknüpft; denn bei Anwesenheit eines Halbleiters werden sich die ungleichnamigen Elektricitäten eben nicht mehr längs einer einzigen Strombahn, sondern in einer stetigen Folge von Stromcurven ausgleichen, dagegen bleiben die Mengen der übergelassenen Elektricität und der Sinn der Richtung sowohl der Strömung wie auch der dielektrischen Verschiebungen ungeändert. Die Entwicklungen gelten demnach auch dann, wenn die elektrischen Massen einen Theil des Raumes stetig erfüllen, also nicht mehr in der Gestalt elektrischer Molekel vorausgesetzt werden. Es ergibt sich dies unter Berücksichtigung

¹⁾ Siehe B. Riemann, Schwere, Elektricität und Magnetismus. Herausgegeben von Karl Hattendorff. Hannover, 1880. S. 49—51.

²⁾ L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektricität und des Lichtes. II. Theil, 14. Vorlesung, S. 147—148.

sichtigung der eben gemachten Bemerkung daraus, dass man jeden in der Natur vorkommenden Nichtleiter als Halbleiter auffassen kann, dessen Leitungsvermögen unendlich klein ist und in welchem nach unendlich langer Zeit ein Ausgleich der ungleichnamigen Elektricitäten von selbst eintritt. Ebenso kann die Fläche F durch einen Theil der den Raum stetig erfüllenden Massen gehen, wenn nur die Voraussetzung gültig bleibt, dass die Dielektricitätsconstante D überall den gleichen Wert besitzt.

Aus den Gleichungen (I) und (II) kann man ohne weiters die bekannte scalare Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta \Phi = \Psi$$

in der Form

$$(16) \quad \Phi = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Psi}{r} d\tau$$

gewinnen. Dieses Integral besitzt nämlich die Gestalt einer Potentialfunction von fernwirkenden elektrischen Massen, welche an der Stelle x, y, z die räumliche Dichte $-\frac{\Psi}{4\pi}$ besitzen. Wendet man auf diese Massenvertheilung den Gauß'schen Satz an, so ist für alle Massen, welche sich außerhalb des Parallelepipedes $dx \cdot dy \cdot dz$ befinden, $\Delta \Phi = 0$; für die betrachtete Stelle aber $= \Psi$, womit die Behauptung erwiesen ist.

Diese Betrachtungen bedürfen noch in einem Punkte einer näheren Erörterung. Bezüglich der Annahme C könnte nämlich die Frage aufgeworfen werden, warum die Strömung der Elektricität allmählich schwächer wird, trotzdem wegen des Geschlossen-seins der Ströme ebensoviel Elektricität zu dem Theilchen e im Mittel hinfließt, als durch den Leitungsdraht von ihm weggeführt wird. Es ist nun zu bemerken, dass die Strömung durch das Vorhandensein der dielektrischen Verschiebungen hervorgerufen wird; infolge dieser Verschiebungen bestehen in dem Mittel Spannungskräfte, welche bei Darbietung eines Verbindungsweges in Gestalt des Leitungsdrahtes die getrennten Elektricitäten als elektrischen Strom durch denselben hindurchtreiben. Zur Herstellung dieser Spannungen muss eine gewisse Arbeit aufgewendet werden, welche als Joule'sche Wärme im Drahte wieder frei wird. Es ist nun leicht zu übersehen, dass der Verschiebungsstrom mit einem Nachlassen dieser Spannungen verbunden ist, da er ja in der Wiedervereinigung der getrennten Elektricitäten besteht. Die Folge davon ist, dass die treibenden Kräfte der Strömung bei fortschreitender Entladung immer mehr abnehmen, weshalb schließlich die Bewegung selbst zu Stillstande kommt.

Schließlich handelt es sich noch darum, die Entwicklungen durch die Betrachtung eines ungleichartigen Mittels zu vervollständigen. Die Ungleichartigkeit des Mittels soll darin bestehen, dass die dielektrischen Verschiebungen zwar noch an jeder Stelle nach jeder Richtung hin den wirkenden Kräften proportional sind, dass sich aber der Proportionalitätsfactor von Stelle zu Stelle stetig ändert. Es bleiben demnach die Voraussetzungen A, B, C auch hier aufrecht, nur ist darin C keine Constante mehr, sondern eine Function der Coordinaten x, y, z .

Man denke sich wieder einen bestimmten, die elektrische Masse e enthaltenden Raumtheil des Mittels durch eine geschlossene Fläche F umhüllt und außerhalb e eine zweite Masse $-e$ angenommen. Zwischen e und $-e$ soll wie im früheren Falle ein vollkommener Ausgleich hergestellt werden können. Durch Überlegungen, welche denen des früheren Abschnittes ganz gleichen, ergibt sich der Gauß'sche Satz nunmehr in der Form:

$$(17) \quad \int_F C \left(\frac{\partial U_0}{\partial n} \right)_e d\sigma = e,$$

$$(18) \quad \int_F C \left(\frac{\partial U_0}{\partial n} \right)_{-e} d\sigma = 0,$$

worin C den Wert an der Stelle $d\sigma$ bedeutet. Der Satz für die Flächendichte nimmt die Gestalt an:

$$(19) \quad C_e \left(\frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_e - C_i \left(\frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_i = -4\pi\sigma.$$

Diese Gleichungen gelten, wie immer auch C, U und e beschaffen seien; e ist die durch Strömung ableitbare, also in das Mittel hineingebrachte Elektrizität.

Man wähle wieder als Fläche F ein unendlich kleines Parallelepiped mit den Seiten dx, dy, dz und wende darauf die Gleichungen (17) und (18) an. Dann ergibt sich für solche Stellen, wo die elektrische Masse e in das Mittel hineingebracht wurde,

$$(20) \quad \Delta U_0 = - \frac{1}{C} \left[\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z} \right] - \frac{d}{C}, \quad \left(d = \frac{e}{dx dy dz} \right)$$

für solche Stellen, wo dies aber nicht der Fall ist,

$$(21) \quad \Delta U_0 = - \frac{1}{C} \left[\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z} \right].$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass das Potential U_0 einer im Mittel vorhandenen Elektrizitätsmenge e für eine gegebene Stelle x, y, z nicht mehr die einfache Gestalt $\frac{e}{r}$ besitzt, sondern

durch eine partielle Differentialgleichung mit der Function C verknüpft ist. Man kann nun mit Hilfe der Gleichung (16) eine Eigenschaft dieser Potentialfunction entwickeln, welche zwar keine allgemeine eigentliche Lösung darstellt, wohl aber eine bemerkenswerte Folgerung über deren Form und die Vorgänge im Mittel gestattet. Es lässt sich nämlich beweisen, dass die Function

$$(22) U_0 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int \frac{1}{C} \left[\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z} \right] \frac{d\tau}{r} + \int \frac{d}{C} \frac{1}{r} d\tau \right\}$$

eine Lösung dieser Gleichung darstellt. In der That besitzt jetzt U_0 die Gestalt

$$U_0 = \sum \frac{\delta \, dx \, dy \, dz}{r} = \int \frac{\delta \, d\tau}{r},$$

wobei unter δ die GröÙe

$$(23) \delta = \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z} \right] + \frac{d}{4\pi C} = \frac{1}{4\pi C} (\partial + d)$$

verstanden und d für jene Stellen, wo keine Massen in das Mittel gebracht wurden, $=0$ zu setzen ist. Man kann daher U_0 als Potential einer elektrischen Massenvertheilung in einem gleichartigen Mittel auffassen, bei welcher in jedem Raumtheilchen eine freie Elektricität mit der Dichte δ angehäuft ist. Nun genügt eine Potentialfunction von der Gestalt $\int \frac{\delta \, d\tau}{r}$ nach (9) und (16) der Gleichung

$$\Delta U_0 = -4\pi \delta,$$

(δ = Dichte der freien Elektricität im Raumtheilchen $dx \, dy \, dz$) woraus sich ergibt, dass die durch (22) dargestellte Function U_0 die Gleichungen (20) und (21) wirklich erfüllt.

Es lässt sich somit der Satz aussprechen:

Wenn in ein ungleichartiges Mittel an eine Stelle die Elektricitätsmenge e hineingebracht wird, so besteht das von ihr herrührende Potential aus zwei Theilen: der erste Theil entspricht dem Potential einer elektrischen Massenvertheilung, bei welcher in jedem Raumtheilchen des Mittels eine freie Elektricität mit der Dichte

$$\delta_f = \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z} \right]$$

vorhanden ist; der zweite Theil rührt von einer freien

Elektricitätsmenge $\frac{e}{4\pi C}$ her, welche die Fernwirkung der Masse e liefert.

Es ist zu bemerken, dass dieser erste Theil von selbst verschwindet, wenn sich die in das Mittel gebrachten Massen ausgleichen, dass daher hiezu keine besondere Ableitung durch Strömung nöthig ist.

Man kann dieses Ergebnis folgendermaßen aussprechen. Die wahre Elektricität e_w übt auch in im Falle eines ungleichartigen Mittels eine Fernwirkung aus, welche von der freien Masse $e_f = \frac{e_w}{C}$ herrührt und das Coulomb'sche Gesetz befolgt. Außerdem entsteht aber noch in jedem Raumtheilchen freie Elektricität mit der Dichte $\partial_f = \frac{\partial_w}{4\pi C}$, wobei

$$\partial_w = \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z}$$

ist, welche infolge der stetigen Änderung der Constante C durch die vertheilende Wirkung aller vorhandenen Massen hervorgerufen wird. Die physikalische Deutung dieses Ausdruckes ergibt sich leicht aus der Vorstellung, dass infolge der vertheilenden Wirkung der Massen an den Grenzflächen $dydz$, $dx dz$, $dx dy$ des Parallelepipeds $dx dy dz$ freie elektrische Flächenschichten mit den Dichten $\partial_f dx$, $\partial_f dy$, $\partial_f dz$ auftreten. Wie man sieht, kann man jetzt nicht mehr wie im Falle eines gleichartigen Mittels voraussetzen, dass bloß an einer einzigen Stelle eine fernwirkende elektrische Masse e vorhanden sei, sondern es ist der ganze Raum mit fernwirkenden elektrischen Massen erfüllt, sobald auch nur an einer einzigen Stelle solche vorkommen.

Aus diesen Untersuchungen folgt, dass sich die Betrachtungen bei einem ungleichartigen Mittel von der oben festgelegten Eigenschaft auf jene bei einem gleichartigen zurückführen lassen. Nur ist jetzt infolge der Veränderlichkeit der Größe C ein Unterschied im Vorkommen der wahren Elektricität zu machen. An Stellen, wo keine Elektricität in das Mittel hineingebracht wurde, besteht sie aus der durch die vertheilende Wirkung der übrigen elektrischen Massen inducierten Elektricität, an solchen Stellen aber, wo man Elektricität durch bestimmte Vorgänge erzeugt hat, ist sie aus dieser und aus der durch Vertheilung hervorgerufenen Masse zusammengesetzt.

Es ergibt sich weiters aus der Gleichung (23), dass auch im jetzigen Falle die Beziehung

$$e_f = \frac{e_w}{D}$$

besteht, wenn die Größe $D = 4 \pi C$ gesetzt und Dielektricitäts-
constante des ungleichartigen Mittels genannt wird. Diese Größe
 D spielt dieselbe Rolle und kann genau so gedeutet werden, wie
im Falle eines gleichartigen Mittels, nur ist sie nunmehr Function
der Coordinaten desjenigen Ortes, wo die elektrisierenden Kräfte
 P, Q, R angreifen.