

УДК 378.147

І.Г. Яловега, М.В. Сидоров, Д.О. Гончаров

МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛАСТИЧНОСТІ ПОПИТУ ТА ПРОПОЗИЦІЇ

В статті розглядаються методологічні особливості вивчення поняття еластичності функції, як найважливішого напряму застосування диференціального числення в економіці. Виділено поняття похідної функції, центрального поняття диференціального числення, яке має важливе значення в економіці та є основою базового економічного поняття еластичність. Розглянуто проблему відповідності процесу викладання основ математичного аналізу студентам ВНЗ вимогам сучасності та теперішньому стану наукового розвитку. На основі аналізу навчальних матеріалів з математичного аналізу виявлено недостатність наочних прикладів застосувань основних положень диференціального числення в економічних дисциплінах. Запропоновано доповнення класичного курсу математичного аналізу економічним змістом похідної. Включення поняття еластичність функції до курсу математичного аналізу має допомогти студентам опанувати важливе математичне поняття похідної, яке має велике значення у економічних дисциплінах.

Ключові слова: еластичність функції, похідна функції, економічний зміст похідної, математичний аналіз, диференціальне числення.

В статье рассматриваются методологические особенности изучения понятия эластичности функции, как важнейшего направления применения дифференциального исчисления в экономике. Выделено понятие производной функции, центрального понятия дифференциального исчисления, которое имеет важное значение в экономике и является основой базового экономического понятия эластичность. Рассмотрена проблема соответствия процесса преподавания основ математического анализа студентам ВУЗов требованиям современности и нынешнему состоянию научного развития. На основе анализа учебных материалов по математическому анализу выявлено недостаточность наглядных примеров приложений основных положений дифференциального исчисления в экономических дисциплинах. Предложены дополнения классического курса математического анализа экономическим содержанием производной. Включение понятия эластичность функции к курсу математического анализа должно помочь студентам овладеть важным математическим понятием производной, которое имеет большое значение в экономических дисциплинах.

Ключевые слова: эластичность функции, производная функции, экономический смысл производной, математический анализ, дифференциальное исчисление.

In the article the methodological features of the study of the concept of elasticity functions as an important direction of application of differential calculus in economics. Highlight features original concept, the central concept of differential calculus, which is important in the economy and is the foundation of basic economic concept of elasticity. The problem of matching process teaching of mathematical analysis for students of our university requirements and the present state of scientific development. On the basis of educational materials on mathematical analysis the failure of illustrative examples of applications of the main provisions differential calculus in economic disciplines. A supplement classical course of mathematical analysis the economic content of the original. The inclusion of the concept of elasticity function to mathematical analysis course should help students learn important mathematical concept of derivative, which is important in economic disciplines.

Keywords: *elasticity features original, features original, economic sense, mathematical analysis, differential calculus.*

Постановка проблеми. В умовах сучасних реформ вищої освіти України постійна робота працівників професорсько-викладацького складу вищих навчальних закладів над удосконаленням викладання навчальних курсів стає найважливішою складовою. У зв'язку з приєднанням України до Болонської системи та відповідною перебудовою вищої школи особливу актуальність здобувають курси, які дозволяють розглянути зв'язок між різними науками, взаємне використання їх понять та методів.

Економіка – є однією з найбільш математизованих наук, математичні методи проникли майже в усі напрями економічних дисциплін. Але протягом багатьох десятиліть навчальні програми з математичних дисциплін в аспекті їх застосувань в економіці суттєво не змінювались, особливо програми з класичних фундаментальних курсів, таких, як математичний аналіз. Економічні науки стрімко розвиваються і економічне виховання стає вкрай важливим у навчанні студентів ВНЗ. На жаль, математика як засіб пізнання реальних економічних процесів розглядається недостатньо, у той час, коли такі якості, як економічне мислення, економічна грамотність, не можуть формуватись без засобів математики. Актуальним завданням залишається удосконалення

викладання математичних дисциплін з метою розкриття важливих міжпредметних зв'язків між математичними та економічними дисциплінами.

Мета статті. Економічне поняття еластичності функції вперше з'являється в різних дисциплінах, в залежності від напряму спеціалізації навчання студентів ВНЗ. Треба відзначити, що на сьогоднішній день поняття еластичність функції відоме не тільки кожному економісту, але й будь-якій людині з вищою освітою, бо тема, що розкриває це поняття, входить до навчальної програми дисципліни «Основи економіки», яка є обов'язковою дисципліною у вищих навчальних закладах України. Тому вкрай важливо приділити увагу до методологічних особливостей при навчанні цьому поняттю.

Досліджуючи міжпредметні зв'язки між математичним аналізом та економічними дисциплінами, окремо можна виділити поняття похідної функції, центрального поняття диференціального числення. Це поняття виникло при розв'язуванні задач природознавства та математики, найважливіші серед них – фізична задача визначення швидкості нерівномірного руху та геометрична задача побудови дотичної до кривої. Треба відмітити, що похідна вивчається не тільки в курсі математичного аналізу в ВНЗ, а також входить до навчальних програм з математики старшої школи. У багатьох учнів виникають труднощі при ознайомленні з цією темою, тому важливо надати викладанню більш наочний вигляд. При цьому у викладанні диференціального числення в курсі математичного аналізу в ВНЗ велика увага приділяється лише фізичним і геометричним застосуванням похідної, у той час, як похідна є важливим поняттям і в економіці. Найважливішим напрямом застосування диференціального числення в економічному аналізі є обчислення еластичності. Доцільно доповнити класичне викладання математичного аналізу важливим застосуванням поняття похідної функції в економіці. До того, що зв'язане з похідною поняття еластичності є базовим в економіці, слід додати, що стрімкий розвиток економічного аналізу за останнє століття надав змогу вивчати більш

складні економічні процеси та досліджувати відповідні їм математичні моделі, теорія еластичності розвинута вже і для функцій багатьох змінних.

Аналіз актуальних досліджень. Проблема відповідності фундаментальних математичних дисциплін сучасному стану науки була завжди актуальною, науковий розвиток є неперервним процесом, тому задачею викладача стає постійний моніторинг нових напрямів важливих застосувань математики. Так, ще в 1969 році харківським науковцем Ю.М. Гайдуком було запропоновано доповнення класичного курсу математичного аналізу економічним змістом похідної [5, с. 130-136]. Слід зазначити, що в курсі вищої математики для економічних спеціальностей, дійсно, поняття еластичність включено до навчальних програм при введенні поняття похідної функції [3, с. 224; 7, с. 73], але для інших спеціальностей поняття еластичності функції не включено до курсу вищої математики. У той час, як в сучасних умовах еластичність є тим поняттям, опанування яким характеризує економічну грамотність людини. В останні роки багато науковців працюють над питанням удосконалення викладання математичних дисциплін у напрямку реалізації міжпредметних зв'язків з економічними дисциплінами, це Г. П. Вохминцева, І. Н. Шевченко, Г. Н. Торопчина, Є. В. Круглов, С. С. Круглова, М. В. Котельнікова, В. М. Соколов та інші [4, с. 138-143; 9, с. 86-89; 10, с. 68-71]. Досліджуються взаємозв'язки окремих модулів математичного аналізу з курсами «Мікроекономіка», «Макроекономіка» та іншими економічними дисциплінами, розглядаються можливі ілюстративні приклади економічної теорії та їх структура.

Виклад основного матеріалу. Математичний аналіз для студентів ВНЗ будь-яких спеціальностей є одним з найскладніших курсів математичного циклу. Значення математичного аналізу полягає в тому, що він дозволяє привести до єдиного вигляду опис багатьох різноманітних за природою процесів, використовуючи систему універсальних методів аналізу та строгих математичних понять. Викладання математичного аналізу для студентів фізико-математичних напрямів має усталений вигляд [1; 6]. Послідовність викладання

диференціального числення в курсі математичного аналізу також давно визначена. Викладання матеріалу зазвичай починають із задачі про миттєву швидкість та розкривають механічний зміст похідної, після чого вводиться математичне означення та геометричний зміст похідної. Такий же підхід найчастіше переноситься і на викладання для студентів інших напрямів. Зауважимо, що у діючих навчальних програмах з математичного аналізу при введенні поняття похідної не включено економічний зміст похідної, у той час, коли економічний термін «еластичність» є одним з базових в обов'язковому курсі з економічної теорії. Курс математичного аналізу займає особливе місце в структурі навчальних планів економічних спеціальностей, він є базовим при навчанні інших дисциплін (теорія ймовірностей, статистика, мікроекономіка, економіко-математичне моделювання та ін.), та має важливе значення для розвитку загального інтелектуального рівня студентів.

Важливість доповнення викладання курсу математичного аналізу застосуванням похідної в економіці не обмежується лише тісним зв'язком з економічними дисциплінами. Деякі відмінності при обчисленні звичайної похідної функції і обчисленні еластичності функції сприяють більш якісному опануванню таким важливим математичним поняттям, як похідна. Крім цього виникають дуже цікаві аналогії з відповідними темами розділу диференціального числення. Тобто, поняття «еластичність» важливо не тільки як наочний приклад застосування похідної в економіці, а ще й є цінним і з теоретичного погляду, бо аналогії та відмінності цього числення від числення похідних дають можливість краще усвідомити внутрішній механізм останнього.

Наведемо варіант можливого доповнення викладання диференціального числення в курсі математичного аналізу. Так, при введенні означення похідної функції та розкриття її фізичного та геометричного змісту, пропонуємо додати матеріал про економічний зміст похідної. На лекційні заняття винести математичне та економічне означення еластичності функції та деякі теоретичні положення.

Пропонується навести термін «еластичність» відразу після введення поняття похідної, її фізичного і геометричного змістів та таблиці похідних для елементарних функцій у наступному вигляді.

Похідна функції показує швидкість зміни залежної змінної y від x , але в економіці звичайна похідна не є зручною, бо знайдений у такий спосіб показник залежить від вибору одиниць вимірювання величин x та y . Тому в економіці при вимірюванні «чутливості» зміни функції до зміни аргументу досліджують зв'язок не абсолютних приростів, а їх відносних величин. Поняття еластичності функції виникає при вирішенні питання, як при заданій функціональній залежності одного фактора y від другого x , виміряти «чутливість» залежної змінної y від x . Коефіцієнт еластичності показує відносне змінення економічного показника, що досліджується, під дією одиничного відносного змінення економічного фактора, від якого він залежить, при незмінних інших факторах, що впливають на нього.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай Δx – приріст аргументу, а Δy – відповідний приріст функції. Тоді похідна функції $y = f(x)$ дорівнює:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Наприклад, якщо розглянути функцію попиту на цукор Q від його ціни P , то побачимо, що значення похідної при кожній ціні P (що вимірюється в гривнях)

$$Q_P = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

залежить від того, вимірюється попит на цукор у кілограмах чи центнерах. Тому при вимірюванні чутливості змінення функції до змінення аргументу в економіці вивчають зв'язок їх відносних величин.

Розглянемо відносний приріст аргументу $\frac{\Delta x}{x}$ та відносний приріст

функції $\frac{\Delta y}{y}$. Величина $\frac{\Delta y / y}{\Delta x / x}$ – відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу – називається середньою еластичністю функції за аргументом на відрізку $[x, x + \Delta x]$, а границя цього відношення при $\Delta x \rightarrow 0$ називається еластичністю функції $y = f(x)$ у точці x :

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$

Після введення означення еластичності, можна навести декілька прикладів з так званої таблиці еластичності деяких елементарних функцій:

$$1) E_x(c) = \frac{x}{c} \cdot 0 = 0, \quad c = \text{const} \in \mathbf{R}, \quad c \neq 0;$$

$$2) E_x(x^n) = \frac{x}{x^n} \cdot n \cdot x^{n-1} = n;$$

$$3) E_x(a^x) = \frac{x}{a^x} \cdot a^x \cdot \ln a = x \ln a, \quad a > 0;$$

$$4) E_x(\ln x) = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln x}, \quad x > 0, \quad x \neq 1;$$

$$5) E_x(\sin x) = \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = x \cdot \text{ctg } x, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пропонуємо винести на самостійну роботу складання повної таблиці у відповідності до вже розглянутої таблиці похідних елементарних функцій. Також до самостійної роботи або роботи на практичних заняттях можна віднести відповідні до основних правил обчислення похідної – основні правила обчислення еластичності. Це допоможе не тільки краще запам'ятати таблицю похідних та правила її обчислення, а зрозуміти сутність понять – математичного та економічного, та логіку побудови доведень.

Гарним теоретичним завданням стане також геометричний зміст еластичності. При викладанні основних теорем диференціального числення

завжди окремо виділяється теорема Лагранжа, яка має надзвичайно важливе значення у курсі математичного аналізу. Для приділення більшої уваги до цієї теореми можна навести аналог теореми Лагранжа для еластичності.

Еластичність функції застосовується при аналізі попиту та пропозиції [2, с. 45-59; 8, с. 46-66]. На аудиторних заняттях треба відмітити, що в практичній діяльності часто доводиться стикатися з такими задачами, які раціонально розв'язувати саме методами математичного аналізу. Це задачі на знаходження об'єму продукції при відомому доході, визначення моменту часу рентабельності виробництва, розмірів вкладу при відомих начальних вкладах та ін. На самостійну роботу пропонується винести ознайомлення з різними видами еластичності в економіці та їх математичними означеннями і основними властивостями.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Застосування математичного аналізу в економіці не обмежується лише обчисленням еластичності функції, апарат цієї математичної дисципліни широко використовується в економічних курсах. Теорія границь є основою для маржинального аналізу, в якому при дослідженні економічних процесів використовуються граничні величини. Важливість основного поняття математичного аналізу – функції ні в кого не викликає сумнівів, бо саме за допомогою дослідження функціональних залежностей між показниками економічного процесу вирішується можливість керування ним. Існує економічна інтерпретація неперервності функцій. Мабуть, найвідомішим застосуванням в економіці математичного аналізу є дослідження функцій на екстремуми, яке стало основою окремої навчальної дисципліни – лінійного програмування. Економічний зміст має і визначений інтеграл. Апарат математичного аналізу міцно вбудувався в економічні дисципліни, які вже давно широко використовують математичне моделювання.

В умовах сучасного стрімкого розвитку економіко-математичних дисциплін вкрай важлива постійна кропітка праця викладачів математики з

викладачами економічних дисциплін з ціллю виявлення міжпредметних зв'язків та виділення важливих застосувань математичного аналізу в економіці. Зусилля викладачів різних дисциплін можуть бути об'єднані шляхом узгодження робочих навчальних програм, використання в процесі навчання завдань, що потребують комплексного використання отриманих знань з різних областей. Викладачі математичних дисциплін повинні розставляти акценти так, щоб звертати увагу на ті розділи, що найбільш часто використовуються в наступних курсах. Проблема скорочення аудиторних годин веде за собою складність донесення необхідного об'єму матеріалу, винесення на самостійну роботу достатньо великої частини теоретичного матеріалу потребує від викладачів ще більш кропіткої роботи з побудови методики навчання математичних дисциплін. Всі ці проблеми мають бути вирішені комплексним підходом до процесу навчання в цілому.

Література

1. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В. Н. Чубариков – Москва: Высшая школа, 2000. – 696 с.
2. Базілінська О.Я. Мікроекономіка: Навч. пос. / О.Я. Базілінська, О.В. Мініна – Київ: «Центр учбової літератури», 2009. – 352 с.
3. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник / М. К. Бугір – Київ: ВЦ «Академія», 2003. – 520 с.
4. Вохминцева Г. П. Особенности изучения дисциплины «Математический анализ» бакалаврами направления подготовки «Экономика» в условиях модернизации высшего профессионального образования / Г.П. Вохминцева, И.Н. Шевченко, Г.Н. Торопчина // Научно-теоретический журнал «Вестник Амурского государственного университета» – 2014. – № 64. – С. 138–143.

5. Гайдук Ю.М. Числення еластичностей / Ю.М. Гайдук // Методика викладання математики. Республіканський науково-методичний збірник – Київ: «Радянська школа», 1969. – Вип. 5. – С. 130–136.
6. Заблоцький М.В. Математичний аналіз / М.В. Заблоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк – Київ: Знання, 2008. – 424 с.
7. Замков О.О. Математические методы в экономике.: Учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных – Москва: Издательство «Дело и Сервис», 2001. – 368 с. – (МГУ им. М. В. Ломоносова).
8. Косік А.Ф. Мікроекономіка: Навч. пос. / А.Ф. Косік, Г.Е. Гронтковська – Київ: «Центр учбової літератури», 2008. – 438 с.
9. Котельникова М.В. Об анализе содержания курса математического анализа для экономистов / М.В. Котельникова, В.М. Соколов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2013. – № 5(2). – С. 86–89.
10. Круглов Е.В. Об организации учебной работы студентов на лекциях и практических занятиях по математике / Е.В. Круглов, С.С. Круглова // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2014. – № 2(1). – С. 68–71.